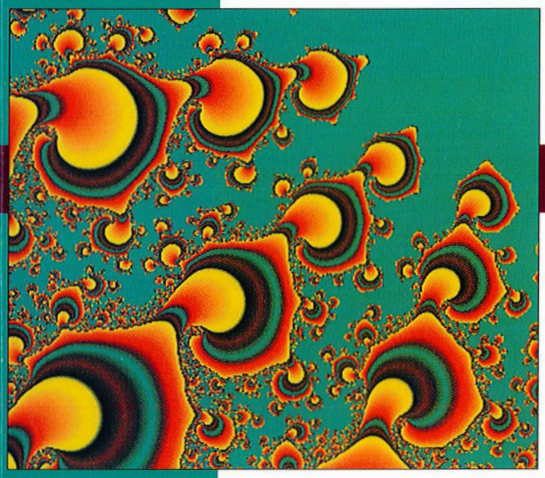


UNIVERSITÉS

MÉCANIQUE

Bifurcations et chaos

Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica

Huyên DANG-VU
Claudine DELCARTE

ellipses

UNIVERSITÉS

UNIVERSITÉS

MÉCANIQUE

Bifurcations et Chaos

Une introduction à la Dynamique contemporaine

avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica

Huyên DANG-VU
Université Pierre et Marie Curie

Claudine DELCARTE
Université Paris-Sud XI

ellipses

Authors: Huyên Dang-Vu and Claudine Delcarte

Title: BIFURCATIONS and CHAOS - An introduction to Contemporary Dynamics with Programs written in Pascal, Fortran and Mathematica

Number of pages: 447

Abstract: *This book is based on lectures given at the University of Paris 11 and covers the background to non-linear dynamical systems. Written for the advanced undergraduate/graduate student, it is self-contained. Among its many special topics are center manifolds and normal forms, local bifurcations and catastrophes, homoclinic bifurcation and Melnikov's method, Feigenbaum constants, Yoccoz puzzles, KAM surfaces, 3-body problem (including Sitnikov problem).... Many notions are illustrated by computer programs written in Pascal, Fortran and Mathematica. Included are numerous references to contemporary research literature. Cover illustration: homoclinic tangle for the Arrowsmith-Place map, obtained by plotting the stable and unstable manifolds of the saddle point at* $(1, 0)$ *(Figure generated by the Pascal program 4.11 on an IBM compatible PC).*

Key words: Dynamical systems, bifurcations, iterated maps, KAM surfaces, 3-body problem.

Reprinted by permission of John Wiley & Sons, Inc.: Figs. 1.4, 1.9, 1.16, 1.25, 3.36, 4.7, A.32.
Reprinted by permission of Springer-Verlag: Figs. 3.7, 4.14, 4.19, 4.43, 4.44, A.26.

ISBN 2-7298-0109-X

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2000
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L.122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (Art. L.122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

A Véronique, Christophe et Hélène

AVANT-PROPOS

Ce livre reproduit, avec quelques compléments, un cours de "Dynamique non-linéaire" enseigné à la Maîtrise de Mécanique de l'Université de Paris-Sud XI. Le niveau de connaissances nécessaire pour aborder cet ouvrage correspond approximativement à celui que possède tout étudiant scientifique au cours de sa quatrième année d'études après le Baccalauréat.

Si ce livre est particulièrement destiné aux étudiants de Maîtrise de Mécanique ou de Mathématiques appliquées, il s'adresse aussi aux étudiants de D. E. A. ou aux élèves des écoles d'ingénieurs intéressés par la Dynamique non-linéaire et le Chaos.

L'objectif visé est d'apporter à l'étudiant des notions fondamentales suffisamment diversifiées pour lui permettre d'aborder ensuite des ouvrages plus spécialisés dans un grand nombre de domaines d'applications. Cet ouvrage n'a nullement la prétention d'apporter des connaissances nouvelles au lecteur averti.

Les sujets abordés sont : variétés centrales et formes normales, bifurcations locales et catastrophes, bifurcation homocline et méthode de Melnikov, constantes de Feigenbaum, théorie KAM, problème des trois corps (y compris le problème de Sitnikov)... Afin d'aider à une compréhension opérationnelle de formulations souvent mathématiques, elles ont, dans la très grande majorité des cas, été illustrées par des exemples simples résolus par voie analytique ou numérique. Par contre, les auteurs n'ont pas voulu insister sur des démonstrations et validations théoriques, importantes certes, mais qui ne leur ont pas semblé indispensables du point de vue d'un utilisateur soucieux avant tout de se familiariser avec des notions nouvelles et de voir leur signification dans des cas concrets. C'est dans ce même but que sont donnés, à la fin de chaque chapitre, des énoncés d'exercices dont on trouvera la correction en annexe. Certains d'entre eux sont des extensions de ce cours.

Il va de soi que cet ouvrage ne peut être profitable que si l'étudiant a la possibilité d'expérimenter lui-même le comportement des systèmes dynamiques. C'est pourquoi à la fin de chaque chapitre, des programmes écrits en Turbo-Pascal, Fortran et Mathematica[1] lui permettent d'utiliser l'ordinateur pour faire son apprentissage. Tous ces programmes ont été testés sur des ordinateurs (PC, SUN, CRAY YMP) du Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (LIMSI-CNRS) et du Centre de Ressources en Informatique (CRI) de l'Université Paris-Sud XI. Nombre de ces programmes ont été proposés, comme projets, aux étudiants de C4 d'Analyse Numérique, Algorithmique et Informatique de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Les courbes présentées ont été obtenues en utilisant les programmes de tracé GNUPLOT ou DISSPLA.

Située à la fin du livre, la bibliographie est constituée de traités fondamentaux et d'articles récents. Il est fait largement référence aux livres et articles de Baker et Gollub, Bergé, Pomeau et Vidal, Feigenbaum, Guckenheimer et Holmes, Hale, Hénon, Hirsch et Smale, Manneville, Schuster, Wiggins, etc. et à beaucoup d'autres dont on trouvera les références dans la bibliographie.

---

1. Avec une majorité de programmes écrits en Turbo-Pascal car c'est le langage enseigné dans la plupart des universités françaises. Ces programmes peuvent être consultés sur le site Internet de l'Université de Paris-Sud XI : //www.u-psud.fr/siecle

Le chapitre 1 introduit les notions de base auxquelles il sera fait appel tout au long de cet ouvrage. Certains paragraphes sont de simples rappels de mathématiques ou de mécanique lagrangienne.

Le chapitre 2 est consacré aux bifurcations locales d'un système dynamique. Les bifurcations nœud-col, transcritique, fourche et de Hopf sont traitées en détails. L'étude du système de Rössler constitue une introduction aux systèmes de codimension 2. La dernière partie du chapitre traite des systèmes gradients, de la classification de Thom et de ses 7 catastrophes élémentaires.

Les applications itérées font l'objet du chapitre 3. Certaines notions développées sur les systèmes dynamiques continus se transposent aux systèmes discrets. Deux exemples sont étudiés en détails : l'application quadratique et l'endomorphisme du cercle. L'application quadratique met en évidence une route vers le chaos par doublement de période. L'application standard, le plus connu des endomorphismes du cercle, comporte un phénomène d'accrochage de périodes. Les ensembles de Julia et de Mandelbrot sont illustrés sur le cas du polynôme quadratique complexe et du polynôme cubique complexe. Le chapitre se termine par les puzzles d'Yoccoz.

Le chapitre 4 donne des méthodes d'analyse et de mesure des structures périodiques et chaotiques dans leur diversité. Un grand nombre de méthodes font appel à l'ordinateur : spectre de Fourier, section de Poincaré, calcul des exposants et de la dimension de Lyapunov... Dans un nombre limité de cas, l'étude peut se faire par voie analytique : méthode de Lindstedt-Poincaré, méthode de Melnikov. La théorie KAM relative aux systèmes hamiltoniens est exposée dans ce chapitre.

Le chapitre 5 concerne le problème des trois corps. La première partie traite du problème restreint plan. La deuxième partie contient diverses applications faisant appel à des concepts développés dans les chapitres précédents : les orbites périodiques symétriques contiennent des p-cycles, le problème de Sitnikov de même que l'étude des orbites homoclines du problème restreint mettent en évidence des applications du fer à cheval de Smale.

Ce livre contient certainement des imprécisions, des lacunes, peut être même des erreurs. Les auteurs remercient par avance tous ceux qui voudront bien leur faire part de leurs critiques et de leurs remarques constructives. Ils espèrent que ce livre rendra service à de nombreux étudiants et souhaitent que le lecteur trouve dans cet ouvrage une introduction utile et aisée qui l'encourage à prolonger ultérieurement l'étude de la dynamique non-linéaire et du chaos.

Au terme de cet avant-propos les auteurs tiennent à remercier le LIMSI-CNRS pour avoir permis la réalisation de leur projet ainsi que la maison Ellipses pour son amicale coopération.

Table des matières

1 Introduction aux systèmes dynamiques **1**

1.1 Définition du système dynamique 2
1.2 Systèmes autonomes et non-autonomes 2
1.3 Flot et points fixes 4
1.3.1 Stabilité des points fixes 6
1.3.2 Système linéarisé - Valeurs propres 8
1.4 Théorème de Poincaré-Bendixson 12
1.5 La fonction de Lyapunov 17
1.6 Attracteurs et attracteurs étranges 18
1.6.1 Attracteurs 18
1.6.2 La fonction sphérique de Lorenz 20
1.6.3 L'attracteur étrange 22
1.7 Système hamiltonien 28
1.7.1 Définition 28
1.7.2 Transformation canonique 30
1.7.3 Système intégrable - Variables d'action et angulaires 33
1.8 Variétés centrales 35
1.8.1 Théorème de la variété centrale 35
1.8.2 Etude locale de la variété centrale 39
1.8.3 Variété centrale dépendant d'un paramètre 42
1.9 Formes normales 46
1.9.1 Théorème de la forme normale 46
1.9.2 Utilisation de la base d'opérateurs $\partial/\partial x_i$ 50
1.9.3 Utilisation des coordonnées complexes 53
1.9.4 Résonance 56
1.9.5 Orbites homocline et hétérocline 58
1.10 Programmes 62
1.11 Exercices 67

2 Bifurcations locales et catastrophes **71**

2.1 Stabilité structurelle et codimension 71
2.2 L'ensemble catastrophe 73
2.3 Bifurcations de codimension un 74
2.3.1 Bifurcation nœud-col 76
2.3.2 Echange de stabilité - Bifurcation transcritique 79
2.3.3 Bifurcation fourche 81
2.3.4 Bifurcation de Hopf 84

2.4 L'algorithme de Hassard, Kazarinoff et Wan 87
2.4.1 Systèmes à n dimensions 88
2.4.2 Systèmes à trois et deux dimensions 91
2.5 La bifurcation du système de Rössler 104
2.6 Champs de gradients - Théorie de Thom 110
2.7 Programmes 116
2.8 Exercices 121

3 Applications itérées **125**
3.1 Systèmes dynamiques discrets 126
3.1.1 Théorème de la variété centrale 126
3.1.2 Cycles et cycles super-stables 131
3.2 Bifurcations 136
3.2.1 Bifurcations à un paramètre 136
3.2.2 Forme normale 138
3.3 L'application quadratique 141
3.3.1 Conjugaison 141
3.3.2 Route du doublement de période 142
3.3.3 La période trois et le théorème de Sarkovski 144
3.3.4 Les poussières de Fatou et la dynamique symbolique 148
3.4 Calcul des constantes de Feigenbaum 149
3.4.1 Points critiques et supercycles 149
3.4.2 Calcul de la constante δ. 150
3.4.3 La constante α et la fonction universelle $g(x)$ 152
3.5 L'endomorphisme du cercle 155
3.5.1 L'application standard 155
3.5.2 Les langues d'Arnold et l'escalier du diable 158
3.6 Ensembles de Julia et de Mandelbrot 164
3.6.1 Polynôme quadratique complexe 166
3.6.2 Points fixes indifférents 172
3.6.3 Polynôme cubique complexe 174
3.6.4 Rayons externes et puzzles d'Yoccoz 182
3.6.5 Algorithme de Schleicher 188
3.7 Programmes 190
3.8 Exercices 204

4 Mesures et structures du chaos **207**
4.1 Méthode de Lindstedt-Poincaré 207
4.2 Séries temporelles et spectre de puissance 213
4.3 La section de Poincaré et la méthode de Hénon 219
4.3.1 Les applications de Poincaré 219
4.3.2 La méthode de Hénon 223
4.4 Introduction à la théorie KAM 226
4.4.1 Tore KAM et points de Poincaré-Birkhoff 226
4.4.2 La diffusion d'Arnold 234
4.5 Dimensions fractales 235
4.5.1 Dimension de Kolmogorov ou de capacité 235

4.5.2 Système de fonctions itérées 240
4.5.3 Dimension de Hausdorff 248
4.6 Exposants et dimension de Lyapunov 249
4.6.1 Calcul des exposants de Lyapunov 249
4.6.2 Formule de Kaplan-Yorke et dimension de Lyapunov 254
4.7 Le fer à cheval de Smale 256
4.7.1 Le fer à cheval de Smale 256
4.7.2 Points homoclines 259
4.7.3 La méthode de Melnikov 262
4.7.4 Orbites de Silnikov 268
4.8 L'intermittence ou l'antichambre du chaos 270
4.8.1 Le mécanisme 270
4.8.2 Longueur moyenne de la phase laminaire 272
4.8.3 Classification des intermittences 273
4.9 Programmes 274
4.10 Exercices 296

5 Problème des trois corps **301**
5.1 Equations du mouvement 302
5.1.1 Equations du mouvement par rapport au centre de gravité . . 302
5.1.2 Equations du mouvement par rapport à P_1 303
5.2 Problème restreint plan des trois corps 306
5.2.1 Equations du mouvement dans le système sidéral 306
5.2.2 Equations du mouvement dans le système synodique 307
5.2.3 Résonance k:l 310
5.3 Réduction de Birkhoff 311
5.4 Points de Lagrange et courbes de vitesse nulle 312
5.4.1 Les points d'équilibre de Lagrange 312
5.4.2 Stabilité des points d'équilibre 313
5.4.3 Courbes de vitesse nulle 315
5.5 Régularisation 316
5.5.1 Transformations de Levi-Civita 317
5.5.2 Transformation de Birkhoff 318
5.6 Orbites périodiques symétriques 321
5.7 Problème de Sitnikov 329
5.7.1 Application de Poincaré 331
5.7.2 Transformation de McGehee 333
5.7.3 Transformation de Wodnar 334
5.8 Orbites homoclines du problème restreint 335
5.8.1 Transformation de McGehee 336
5.8.2 Transformation de Xia 339
5.9 Programmes 342
5.10 Exercices 348

A Réponses aux exercices **351**
A.1 Réponses aux exercices du chapitre 1 351
A.2 Réponses aux exercices du chapitre 2 364
A.3 Réponses aux exercices du chapitre 3 375
A.4 Réponses aux exercices du chapitre 4 389
A.5 Réponses aux exercices du chapitre 5 406
A.6 Programmes 412

Bibliographie **427**

Index **435**

Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques

Dans ce chapitre, nous définissons les systèmes dynamiques qui seront étudiés dans cet ouvrage. Après quelques rappels sur les systèmes autonomes et les variétés invariantes, les différents types de points fixes selon leur stabilité sont définis. Dans un espace des phases à deux dimensions, les seuls attracteurs possibles sont les points fixes, les cycles limites (théorème de Poincaré-Bendixon) et les orbites homoclines et hétéroclines ; le critère de Bendixon permet de prouver la non-existence d'orbite périodique, dans un domaine de l'espace des phases à deux dimensions, sans avoir à résoudre le système différentiel. La fonction de Lyapunov conduit à déterminer aisément la stabilité d'un point fixe dans un espace des phases de dimension $n \geq 1$. Lorsque l'espace des phases est de dimension $n \geq 3$, peuvent exister des attracteurs dits étranges liés à la notion de chaos. La plus grande richesse de ces espaces va de paire avec une plus grande complexité et il n'est pas toujours possible de montrer que le système possède une région d'attraction ; dans certains cas, la fonction sphérique de Lorenz le permet.

Un paragraphe est consacré à des rappels sur les systèmes hamiltoniens dont nous faisons état dans le chapitre 4 (théorème KAM). Les variétés invariantes stables, instables et centrales jouent un rôle fondamental dans l'étude de la stabilité des trajectoires au voisinage des points fixes d'un système dynamique. L'intersection des variétés stables et instables conduit aux notions d'orbite homocline et hétérocline qui sont largement utilisées dans le problème des trois corps (chapitre 5). L'étude locale de la variété centrale et le théorème de la forme normale sont importants pour l'étude des bifurcations (chapitres 2 et 3). La base des vecteurs tangents à la variété centrale est souvent utilisée pour calculer les formes normales, notamment pour obtenir la forme normale de la bifurcation de Hopf. La notion de valeurs propres résonantes et non-résonantes (au sens d'Arnold [6]) permet également de trouver la forme normale d'un sytème d'équations différentielles. Si toutes les valeurs propres sont non-résonnantes, on peut ramener le sytème à un système linéaire. A la fin du chapitre, nous donnons les programmes et exercices qui aideront le lecteur à sa compréhension.

1.1 Définition du système dynamique

Dans ce livre nous étudions des systèmes d'équations différentielles de la forme (cas continu) :

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = f(x,t,\nu), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \nu \in V \subseteq \mathbb{R}^p \tag{1.1}$$

ou des applications (cas discret) :

$$x_{k+1} = f(x_k,\nu), \quad x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \nu \in V \subseteq \mathbb{R}^p, \quad k = 1,2,\ldots \tag{1.2}$$

Les systèmes (1.1), (1.2) s'appellent des *systèmes dynamiques.* $\mathbb{R}^n$ est *l'espace des phases*, $\mathbb{R}^p$ est *l'espace des paramètres.*

Exemple 1.1.1 L'oscillateur de Duffing :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{aligned} \tag{1.3}$$

où δ, γ et ω sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est $\mathbb{R}^2$ et l'espace des paramètres est $\mathbb{R}^3$.

Exemple 1.1.2 L'application de Hénon :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= y_k + 1 - a x_k^2, \\ y_{k+1} &= b x_k \end{aligned} \tag{1.4}$$

où a et b sont des paramètres réels. L'espace des phases est $\mathbb{R}^2$ et l'espace des paramètres est $\mathbb{R}^2$.

Ce chapitre et le chapitre suivant concernent seulement le cas continu. Le cas discret est traité au chapitre 3.

1.2 Systèmes autonomes et non-autonomes

Considérons un système de n équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \tag{1.5}$$

avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ et $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ est un champ de vecteurs (pour simplifier l'écriture, nous ne mentionnons pas les paramètres qui se trouvent dans les f_i). Nous supposons que les f_i sont de classe C^r ($r \geq 1$) en x et t. Dans ce cas les fonctions $x_i(t)$ sont aussi de classe C^r. Par un changement de variables approprié, les équations différentielles d'ordre n, $n > 1$ peuvent se transformer en un système de n équations différentielles du premier ordre. Par exemple l'équation différentielle d'ordre n

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, t) \tag{1.6}$$

peut s'écrire sous la forme d'un système :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

où l'on a posé $x_1 = x$ (à noter que cette transformation n'est pas unique).

La solution de (1.5) avec conditions initiales $x(t_0) = x_0$ sera notée $x(x_0, t)$. Elle décrit, dans l'espace des phases $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, une courbe intégrale appelée *trajectoire* ou *orbite*.

Lorsque le champ de vecteurs f dépend explicitement du temps le système est dit non-autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome. Dans un système autonome, la trajectoire $x(x_0, t)$ ne dépend pas du temps initial t_0, alors que dans un système non-autonome elle dépend de t_0.

Exemple 1.2.1 Considérons les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \\ x(t_0) &= 1, \quad y(t_0) = 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + t, \\ x(t_0) &= 1, \quad y(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

La solution du système autonome (1.8) est :

$$x(t) = \cos(t - t_0), \quad y(t) = -\sin(t - t_0).$$

La trajectoire est un cercle passant par le point $(1, 0)$ et d'équation :

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1.10}$$

quel que soit le temps initial t_0 (voir figure 1.1a).

Par contre, la trajectoire du système non-autonome (1.9) dépend du temps initial t_0. Ainsi :

a) si $t_0 = \pi/2$, la solution est :

$$x(t) = \cos t + (1 - \frac{\pi}{2}) \sin t + t, \quad y(t) = -\sin t + (1 - \frac{\pi}{2}) \cos t + 1,$$

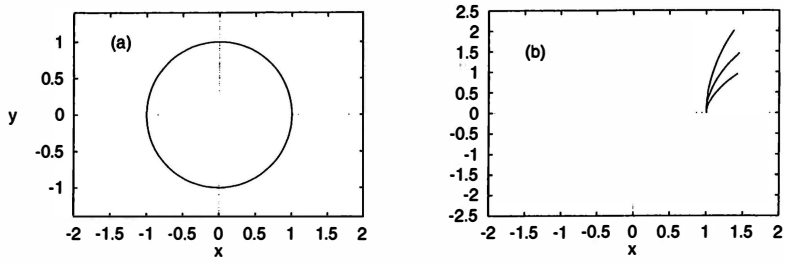


FIG. 1.1 – *a) Système autonome. b) Système non-autonome.*

b) si $t_0 = \pi$, la solution est :

$$x(t) = (\pi - 1)\cos t + \sin t + t, \quad y(t) = -(\pi - 1)\sin t + \cos t + 1,$$

c) si $t_0 = 2\pi$, la solution est :

$$x(t) = (1 - 2\pi)\cos t - \sin t + t, \quad y(t) = -(1 - 2\pi)\sin t - \cos t + 1.$$

Les trajectoires de ces trois solutions au voisinage du point $(1, 0)$ sont représentées sur la figure 1.1b. Toutes les trajectoires passent par le point $(1, 0)$ mais elles sont toutes différentes.

Par un changement de variables approprié, on peut transformer un système non-autonome avec $x \in \mathbb{R}^n$ en un système autonome avec $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi le système (1.7) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = x_2, \\
&\frac{dx_2}{dt} = x_3, \\
&\dots \\
&\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n, \\
&\frac{dx_n}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}), \\
&\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.3 Flot et points fixes

Considérons le système autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r(U), \quad U \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{1.12}$$

Définition 1.3.1 *Soit $x(x_0, t)$, $x_0 \in D$, une solution de (1.12) avec conditions initiales $x(0) = x_0$. On appelle flot de (1.12), ou du champ de vecteurs f, l'application $\phi_t : D \to \mathbb{R}^n$ définie par*

$$\phi_t(x_0) = x(x_0, t).$$

$\phi_t(x_0)$ possède les propriétés suivantes :
(i) $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r.
(ii) $\phi_0(x_0) = x_0$
(iii) $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.

Exemple 1.3.1 Considérons le système linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{1.13}$$

avec condition initiale $x(0) = x_0$. La solution est [84] :

$$x(x_0, t) = e^{At}x_0, \text{ avec } e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

$\phi_t = e^{At}$ est le flot de (1.13).

La famille d'applications ϕ_t est aussi appelée un *semi-groupe.*

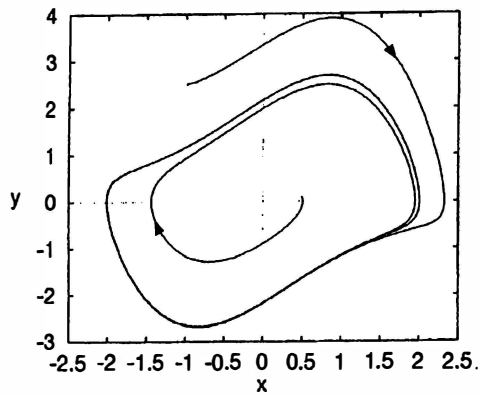


FIG. 1.2 – *Le cycle limite ω de l'équation de van der Pol.*

Un point $a \in U$ est le point limite ω d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une séquence $t_n \to \infty$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n} = a.$$

De même, un point $b \in U$ est le point limite α d'une trajectoire $x(x_0, t)$ s'il existe une séquence $t_n \to -\infty$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n} = b.$$

L'ensemble des points limites α (resp. limites ω) de $x(x_0, t)$ est désigné par $\alpha(x)$ (resp. $\omega(x)$). L'ensemble $\alpha(x) \cup \omega(x)$ est appelé l'ensemble limite de $x(x_0, t)$.

Un cycle limite α (resp. cycle limite ω) est une orbite fermée Γ telle que $\Gamma \subset \alpha(x)$ (resp. $\Gamma \subset \omega(x)$). La figure 1.2 présente un cycle limite ω de l'oscillateur de Van der Pol :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \epsilon(1 - x^2)y, \quad \epsilon = 1.$$

Un ensemble $W \subset \mathbb{R}^n$ est appelé *variété invariante* de (1.12) si $\phi_t(W) \subset W$.

Définition 1.3.2 *On appelle point fixe (ou point stationnaire ou point d'équilibre ou point critique) de (1.12), le point $\bar{x}$ de l'espace des phases obtenu en annulant le second membre de (1.12) :*

$$f(\bar{x}) = 0. \tag{1.14}$$

Par le changement de variables $\xi = x - \bar{x}$, on peut ramener le point $\bar{x}$ à l'origine.

1.3.1 Stabilité des points fixes

Nous illustrons les concepts de points fixes stable, asymptotiquement stable et instable par l'exemple du pendule amorti.

Exemple 1.3.2 Considérons une masse m placée dans un champ de gravitation et suspendue en un point O par un fil *rigide* de longueur l et de masse *nulle*. L'équation du mouvement du pendule est [13] :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k\sin\theta = 0, \tag{1.15}$$

où $\gamma = c/ml$, $k = g/l$, $\theta(t)$ est l'angle que fait à l'instant t, le fil avec la verticale OR (Cf. figure 1.3), g est l'accélération de la pesanteur, $c > 0$ est le coefficient d'amortissement de l'air. La force d'amortissement $cd\theta/dt$ s'oppose toujours à la direction du mouvement.

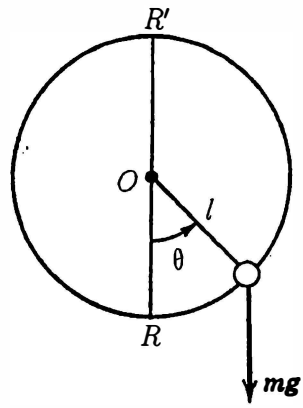


FIG. 1.3 – *Problème du pendule amorti.*

Pour simplifier le problème on suppose que $k = 1$. (1.15) s'écrit alors, en posant $x = \theta$, $y = d\theta/dt$:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x - \gamma y. \tag{1.16}$$

Les points fixes du système (1.16) sont donnés par les équations :

$$y = 0, \quad \sin x + \gamma y = 0.$$

On en déduit les points fixes :

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{x} = \pm n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.17}$$

Ces points fixes correspondent à deux positions d'équilibres physiques : le point $R(\theta = 0)$ et le point $R'(\theta = \pi)$ (Cf. figure 1.3). Intuitivement R est un point d'équilibre stable et R' est un point d'équilibre instable.

Voyons ce qui se passe lorsqu'on écarte légèrement la masse m de la position d'équilibre R.

- En présence du frottement de l'air ($\gamma \neq 0$), la masse m va osciller autour de R avec une amplitude de plus en plus petite et tend vers R lorsque $t \to \infty$. Le point R est un point fixe asymptotiquement stable (figure 1.4a)

- En l'absence du frottement de l'air ($\gamma = 0$), la masse m va osciller indéfiniment autour de R avec une amplitude constante. Le point R est alors un point d'équilibre stable mais pas asymptotiquement stable (figure 1.4c).

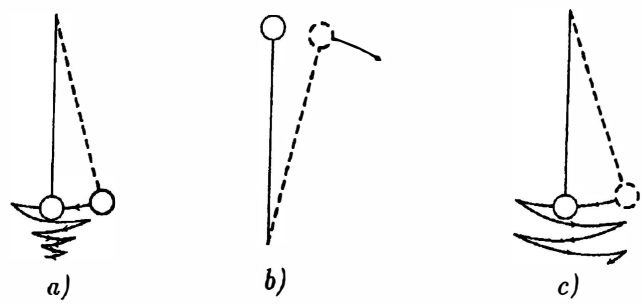


FIG. 1.4 – *a) Point d'équilibre asymptotiquement stable ($\gamma \neq 0$), b) Point d'équilibre instable, c) Point d'équilibre stable ($\gamma = 0$). D'après [17].*

Nous verrons dans l'exemple 1.3.4 comment retrouver ces résultats intuitifs, par le calcul, à partir du système (1.16).

Mathématiquement on a la définition suivante (voir par exemple [17]) :

Définition 1.3.3 *Un point fixe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$$

($\|.\|$ désigne la norme dans $\mathbb{R}^n$). Si de plus, il existe δ_0 avec $0 < \delta_0 < \delta$ tel que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta_0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x},$$

$\bar{x}$ est asymptotiquement stable. Si $\bar{x}$ n'est pas stable, alors il est instable.

(Voir la figure 1.5 où l'on a posé $x_0 = x(0)$).

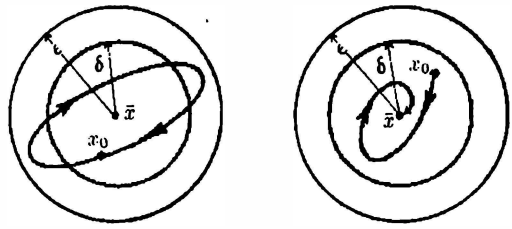


FIG. 1.5 – *Point fixe stable (a), asymptotiquement stable (b).*

1.3.2 Système linéarisé - Valeurs propres

Supposons que, par un changement de coordonnées, le point fixe ait été ramené à l'origine : $f(0) = 0$. Le développement de Taylor en $x = 0$ s'écrit :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x,x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x,x,x) + \cdots \tag{1.18}$$

où l'on a posé $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$,

$$Df(x)x = \sum_j \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right) x_j, \quad D^2f(x)(x,x) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) x_i x_j,$$

$$D^3f(x)(x,x,x) = \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}\right) x_i x_j x_k, \tag{1.19}$$

La matrice

$$Df(x) \equiv \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$$

s'appelle *matrice jacobienne* de $f(x)$ (son déterminant est le *jacobien*). Pour x petit, (1.18) montre que le comportement du système au voisinage de 0 est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = Df(0)x. \tag{1.20}$$

Dans le cas où la matrice $Df(0)$ possède n valeurs propres λ_i, $i = 1, \ldots, n$ distinctes, la solution de (1.20) est :

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i a^{(i)} \exp \lambda_i t,$$

où $a^{(i)}$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i et les $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$ sont des constantes (déterminées par les conditions initiales). On en déduit que :

a) si toutes les valeurs propres λ_i ont leur partie réelle négative le point fixe est *asymptotiquement stable*,

b) si une ou plusieurs valeurs propres sont des imaginaires pures, les autres valeurs propres ayant leur partie réelle négative, le point fixe est un *centre* ou un point *elliptique* (*stable* mais pas asymptotiquement stable),

c) si une des valeurs propres a sa partie réelle positive le point fixe est *instable*,

d) si $Df(0)$ n'a pas de valeur propre nulle ou purement imaginaire le point fixe est un point *hyperbolique*, dans le cas contraire il est *non-hyperbolique*,

e) s'il existe i et j tels que $\Re\lambda_i < 0$ et $\Re\lambda_j > 0$, le point fixe est un point *selle*,

f) si toutes les valeurs propres de $Df(0)$ sont réelles et de même signe, le point fixe est un *nœud*. Un nœud stable est un *puits*. Un nœud instable est une *source*.

Exemple 1.3.3 Dans l'espace des phases $\mathbb{R}^2$, l'équation (1.20) s'écrit :

$$\dot{x} = Ax, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Les valeurs propres de la matrice A sont solutions de l'équation :

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0, \quad \text{avec } p = a + d, \quad q = ad - bc.$$

Supposons que la matrice A soit diagonalisable, les solutions de (1.21) sont alors de la forme (voir par exemple [17]) :

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 a^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 a^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = (p \pm \sqrt{\Delta})/2, \text{ si } \Delta = p^2 - 4q \neq 0, \\ x(t) &= (c_1 a^{(1)} + t c_2 a^{(2)}) e^{pt/2}, \text{ si } \Delta = p^2 - 4q = 0, \end{aligned}$$

où $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ sont des vecteurs propres de A, c_1, c_2 sont des constantes d'intégration. On en déduit la classification des points fixes.

a) Si $\Delta = p^2 - 4q < 0$, $p \neq 0$: le point fixe est asymptotiquement stable si $p < 0$, instable si $p > 0$. Les trajectoires au voisinage de 0 sont des spirales. Le point fixe s'appelle un *foyer*.

b) Si $\Delta = p^2 - 4q < 0$, $p = 0$: le point fixe est un *centre* ou un *point elliptique*. Les trajectoires au voisinage de 0 sont des ellipses. L'origine est un point fixe stable mais pas asymptotiquement stable.

c) Si $\Delta = p^2 - 4q = 0$, $p \neq 0$: le point fixe est *un nœud*, asymptotiquement stable si $p < 0$, instable si $p > 0$.

d) Si $\Delta = p^2 - 4q > 0$ et $q > 0$: les valeurs propres sont réelles et de même signe le point fixe est un *nœud impropre*, asymptotiquement stable si $p < 0$, instable si $p > 0$.

e) Si $p^2 - 4q > 0$ et $q < 0$: les valeurs propres sont réelles et de signe différent le point fixe est un *point selle*.

Les différents points fixes de l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ sont indiqués sur la figure 1.6 où l'on distingue aussi les *nœuds* (valeurs propres réelles, égales) et les *nœuds impropres* (valeurs propres réelles, de même signe mais non-égales).

Exemple 1.3.4 *[9]* Considérons l'équation du pendule amorti (1.15) ou sous forme de système (1.16). Les points fixes du système (1.16) sont donnés par (1.17). Posons $\xi_1 = x - \bar{x}$, $\xi_2 = y - \bar{y}$, (1.16) s'écrit alors :

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\cos n\pi \sin \xi_1 - \gamma \xi_2. \tag{1.22}$$

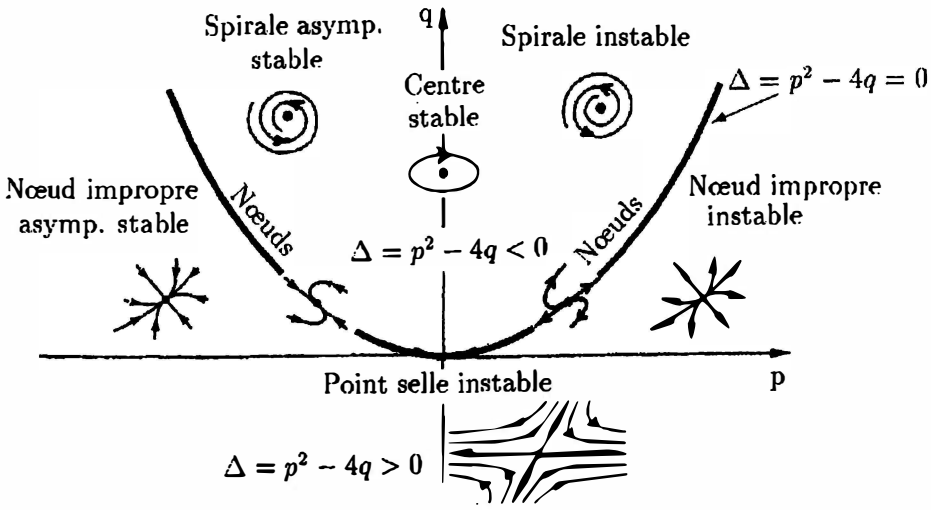


FIG. 1.6 – *Le diagramme de stabilité.*

L'approximation linéaire de (1.22) au voisinage du point fixe $(\xi_1, \xi_2) = (0,0)$ s'écrit :

$$\text{pour } n \text{ pair}: \quad \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\xi_1 - \gamma\xi_2, \tag{1.23}$$

$$\text{pour } n \text{ impair}: \quad \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \xi_1 - \gamma\xi_2. \tag{1.24}$$

Suivant la méthode classique de résolution d'un système d'équations différentielles linéaires, on cherche une solution de la forme $\xi = ae^{\lambda t}$ où $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ avec $a = (a_1, a_2)^T$. Les équations (1.23) et (1.24) deviennent :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n \text{ pair} \tag{1.25}$$

et

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\gamma - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n \text{ impair} \tag{1.26}$$

respectivement. On en déduit les équations aux valeurs propres :

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + 1 = 0, \quad n \text{ pair},$$
$$\lambda^2 + \gamma\lambda - 1 = 0, \quad n \text{ impair}.$$

Premier cas: $\gamma > 0$ et petit ($\gamma < 2$, cas du frottement de l'air).
Si n est pair, les valeurs propres sont complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm i\sqrt{4 - \gamma^2}}{2}$$

avec partie réelle négative. La solution (ξ_1, ξ_2) spirale donc vers le foyer qui est asymptotiquement stable (Cf. figure 1.7a).

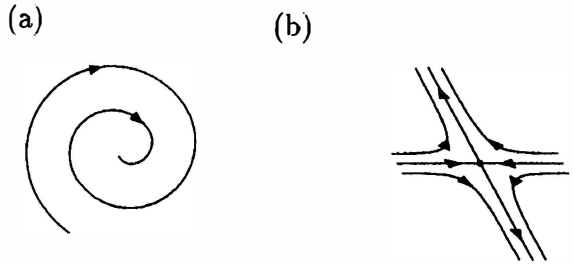


FIG. 1.7 – *(a) Point focal (n pair). (b) Point selle (n impair).*

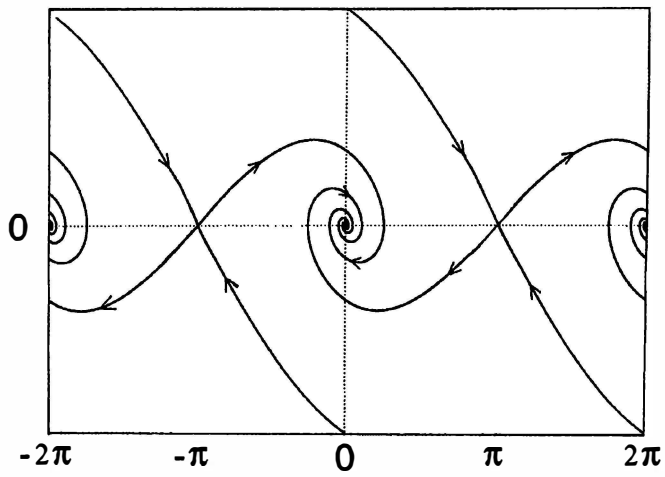


FIG. 1.8 – *Portrait des phases du pendule amorti.*

Si n est impair, les valeurs propres sont réelles et de signes contraires :

$$\lambda_1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2+4}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2+4}}{2} > 0. \tag{1.27}$$

Le point fixe est alors un point selle ou hyperbolique (Cf. figure 1.7b). Il y a donc une trajectoire stable qui tend vers le point fixe quand $t \to +\infty$ et une trajectoire instable qui tend vers le point fixe quand $t \to -\infty$. Les directions des trajectoires stables et instables au point fixe sont données par les vecteurs propres $a^{(1)}$ et $a^{(2)}$ de la matrice (1.26) :

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

avec λ_1, λ_2 définies dans (1.27). Le portrait des phases du système est représenté sur la figure 1.8 : les régions alternativement hachurées et non hachurées sont des bassins d'attraction. Tous les points se trouvant dans un bassin d'attraction sont attirés vers le foyer de ce bassin. Les courbes séparant les bassins d'attraction sont des *séparatrices.*

Second cas: $\gamma = 0$ (sans frottement).
Dans ce cas on a un pendule simple (ou libre) et (1.16) s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x. \tag{1.28}$$

Les points fixes sont $x = n\pi$, $y = 0$. Les valeurs propres du système linéarisé sont $\lambda_{1,2} = \pm i$ si n est pair (le point d'équilibre est un point elliptique) et $\lambda_{1,2} = \pm 1$ si n est impair (le point d'équilibre est un point selle).

Le système (1.28) admet la quantité

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x \tag{1.29}$$

comme constante du mouvement (E représente l'énergie du pendule). Les trajectoires correspondant aux différentes valeurs de $E(x, y)$ (courbes de niveau de $E(x, y)$) sont dessinées sur la figure 1.9. Les points fixes elliptiques (ou centres) ($x = \pm n\pi$, $y = 0$, n pair) correspondent à $E(x, y) = 0$ (pendule au repos). Les trajectoires sont des courbes fermées si $0 < E(x, y) < 2$ et ne sont plus fermées si $E(x, y) > 2$. Les courbes correspondant à $E = 2$ sont des *séparatrices*. La période du pendule est donnée par

$$T = 2\sqrt{2}\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_0}} \tag{1.30}$$

où x_0 est le déplacement initial (nous rappelons que $x \equiv \theta$). L'intégrale de (1.30) peut être calculée en fonction des intégrales elliptiques de première espèce.

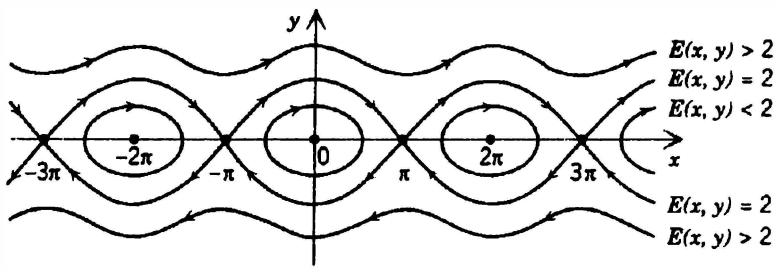


FIG. 1.9 – *Portrait des phases du pendule simple. D'après [17].*

1.4 Théorème de Poincaré-Bendixson

Dans un espace des phases à deux dimensions, il est souvent possible de démontrer que les orbites d'un système non-linéaire spiralent vers une courbe fermée ou *cycle limite* même si l'on ne sait pas résoudre ce système, ceci grâce au théorème suivant.

Théorème 1.4.1 (Poincaré-Bendixson) *Supposons qu'une orbite $x(x_0, t)$ du système de deux équations*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, x_2)^T, \quad f = (f_1, f_2)^T \tag{1.31}$$

reste dans un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^2$ pour tout $t \geq 0$, alors
(i) ou bien $x(x_0, t)$ est une solution périodique de (1.31),
(ii) ou bien $x(x_0, t)$ tend vers une solution périodique de (1.31),
(iii) ou bien $x(x_0, t)$ tend vers un point fixe de (1.31) (Cf. figure 1.10).

Pour la démonstration de ce théorème voir par exemple [71] ou [84].

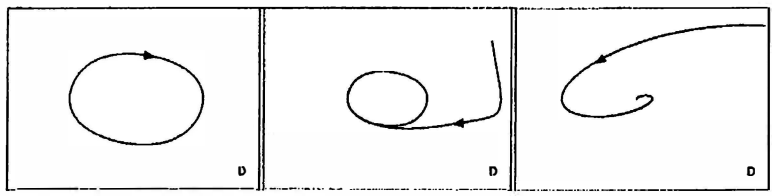


FIG. 1.10 – *Les trois possibilités du théorème de Poincaré-Bendixson.*

Exemple 1.4.1 Considérons l'équation différentielle du second ordre [71]:

$$\ddot{x} + (x^2 + 2\dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \tag{1.32}$$

ou, sous forme de système:

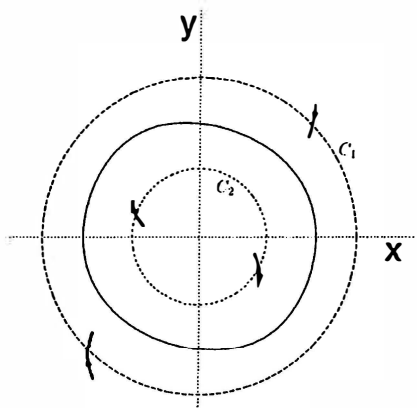


FIG. 1.11 – *L'anneau de Poincaré-Bendixson de l'exemple 1.4.1.*

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2 - 2y^2)y. \tag{1.33}$$

On a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = (1 - x^2 - 2y^2)y^2.$$

On observe que $1 - x^2 - 2y^2$ est positif pour $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ et négatif pour $x^2 + y^2 > 1$. Donc $x^2(t) + y^2(t)$ est croissant quand $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ et décroissant quand $x^2 + y^2 > 1$ (Cf. fig. 1.11). Ceci implique que toute orbite $x(t)$, $y(t)$ de (1.33) dont le point initial (au temps $t = t_0$) est dans l'anneau $\frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 1$ restera dans cet anneau pour $t \geq t_0$. Comme cet anneau ne contient pas de point fixe de (1.33), on en déduit, par le théorème de Poincaré-Bendixson, qu'il existe une solution périodique de (1.33) contenue dans cet anneau.

Remarque 1.4.1 En général il est assez difficile de trouver le domaine de Poincaré-Bendixson. L'exemple suivant montre comment trouver le domaine de Poincaré-Bendixson du Bruxellateur (voir aussi l'exercice 1.3).

Exemple 1.4.2 [49] Considérons le modèle de Prigogine-Lefever (ou le Bruxellateur)

$$\frac{dx}{dt} = a - (b+1)x + x^2 y, \quad \frac{dy}{dt} = bx - x^2 y \tag{1.34}$$

avec $a > 0$, $b > 0$.

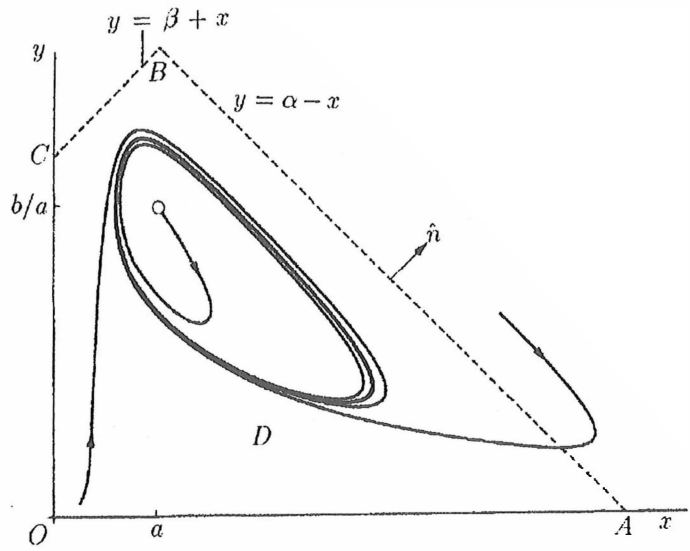


FIG. 1.12 – *Le domaine de Poincaré-Bendixson du Bruxellateur.*

Ce système a été proposé par R. Lefever et I. Prigogine [124], comme un modèle pour une réaction chimique, autocatalytique avec diffusion.

Le point fixe est donné par le système:

$$a - (b+1)x + x^2 y = 0, \quad bx - x^2 y = 0. \tag{1.35}$$

On en déduit le point fixe $x^* = a$, $y^* = b/a$. Nous allons montrer que, lorsque le point fixe est instable, la région D délimitée par $OABCO$ et par un cercle de rayon infiniment petit entourant le point fixe (x^*, y^*) est le domaine d'attraction du système (Cf. figure 1.12).

Cherchons d'abord dans quelle condition le point fixe (x^*, y^*) est répulsif. La matrice jacobienne du système (1.34) au point (x^*, y^*) s'écrit:

$$A = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

L'équation caractéristique de A s'écrit

$$\lambda^2 + (a^2 + 1 - b)\lambda + a^2 = 0.$$

Par conséquent si

$$b > a^2 + 1, \tag{1.37}$$

le point fixe (x^*, y^*) est répulsif.

Soit $\hat{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = (a - bx - x + x^2 y, bx - x^2 y)$. Il suffit maintenant de montrer que sur $OABCO$ le vecteur $\hat{v}$ pointe vers l'intérieur de D. Autrement dit, si $\hat{n}$ est le vecteur unitaire pointé vers l'extérieur de D, il suffit de montrer que $\hat{v}.\hat{n} < 0$ sur $OABCO$ (Cf. figure 1.12).

- Sur OA ($y = 0$, $x > 0$), on a $\hat{n} = (0, -1)$, d'où :

$$\hat{v}.\hat{n}|_{y=0} = -bx < 0.$$

- Sur OC ($x = 0$), on a $\hat{n} = (-1, 0)$, par conséquent :

$$\hat{v}.\hat{n}|_{x=0} = -a < 0.$$

- Sur AB ($y = \alpha - x$, $x > a$) on a $\hat{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, d'où :

$$\hat{v}.\hat{n}|_{y=\alpha-x} = (a - x)/\sqrt{2} < 0, \text{ car } x > a.$$

- Sur CB ($y = \beta + x$, $0 < x < a$),

$$\hat{v}.\hat{n}|_{y=\beta+x} = \frac{-a + 2bx - 2x^2 y + x}{\sqrt{2}} < 0 \tag{1.38}$$

si

$$y > \frac{(2b+1)x - a}{2x^2}. \tag{1.39}$$

La valeur maximale du second membre de (1.39) est obtenue en étudiant le tableau de variations de $y = ((2b+1)x - a)/2x^2$. Elle est $(2b+1)^2/8a$ à $x = 2a/(2b+1)$. Pour $b > a^2 + 1$ (voir (1.37), on a $x = 2a/(2b+1) < a$ et (1.39)) est vérifié. β doit être choisi de façon que la droite $y = \beta + x$ passe par le point $x = 2a/(2b+1)$, $y = (2b+1)^2/8a$. On en déduit :

$$\beta = \frac{(2b+1)^3 - 16a^2}{8a(2b+1)}.$$

Finalement on choisit α de façon que $x = a$, $y = \alpha - x = \beta + x$, d'où $\alpha = 2a + \beta$. Comme D ne contient pas de point fixe de (1.34), on en déduit, par le théorème de Poincaré-Bendixson, qu'il existe un cycle limite contenu dans D.

Remarque 1.4.2 Pour l'équation de van der Pol ,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = Q(x, y) = -x + \epsilon(1 - x^2)y,$$

le domaine de Poincaré-Bendixson est donné par la figure 1.13 (pour le détail des calculs consulter [72]).

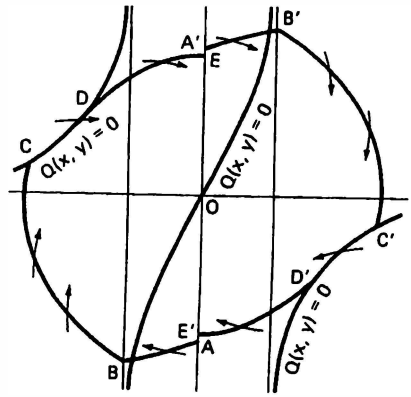


FIG. 1.13 – *Le domaine de Poincaré-Bendixson de l'équation de van der Pol. D'après [72].*

Si D est un domaine simplement connexe (c'est-à-dire, il n'y a pas de trou dans D), alors on a le théorème suivant :

Théorème 1.4.2 (Critère de Bendixson) *Si dans un domaine simplement connexe, $D \subset \mathbb{R}^2$, l'expression*

$$Div\ f \equiv \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe, alors le système (1.31) n'a pas d'orbite périodique contenue dans D.

PREUVE : Soit Γ, $x = x(t)$, $0 \leq t \leq T$, une orbite périodique de période T contenue entièrement dans D. Si S désigne l'intérieur de Γ, on a d'après le théorème de Green :

$$\begin{aligned} \iint_S \text{Div } f\, dx_1 dx_2 &= \oint_\Gamma (f_1 dx_2 - f_2 dx_1) \\ &= \int_0^T (f_1 \dot{x}_2 - f_2 \dot{x}_1) dt \\ &= \int_0^T (f_1 f_2 - f_2 f_1) dt = 0. \end{aligned}$$

Si Div f n'est pas identiquement nul et ne change pas de signe alors l'intégrale double précédente est soit positive soit négative, d'où la contradiction. □

Exemple 1.4.3 Considérons l'oscillateur de Duffing non forcé [163] :

$$\ddot{x} - x + x^3 + (\delta - x^2)\dot{x} = 0, \quad \delta > 0 \tag{1.40}$$

ou, sous forme de système,

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + x^2 y. \tag{1.41}$$

Le système (1.41) admet trois points fixes :

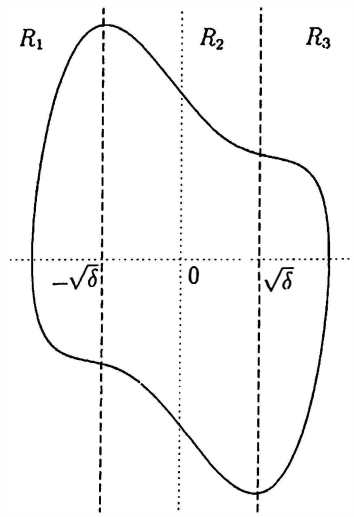


FIG. 1.14 – *Les régions* R_1, R_2, R_3 *avec* $\delta = 1.5$

$$(x, y) = (0, 0), \quad (x, y) = (\pm 1, 0).$$

D'autre part, un calcul simple donne:

$$\text{Div } f = x^2 - \delta. \tag{1.42}$$

Le second membre de (1.42) s'annule sur les droites $x = \pm\sqrt{\delta}$. Ces deux droites divisent le plan en trois régions R_1, R_2, R_3 (Cf. figure 1.14). D'après le critère de Bendixson, le système (1.41) ne peut avoir une orbite périodique contenue entièrement dans une des trois régions R_1, R_2, R_3. Cependant le critère de Bendixson n'empêche pas l'existence d'orbites périodiques qui sont à cheval sur deux ou trois régions (Cf. figure 1.14).

1.5 La fonction de Lyapunov

Soit $\bar{x}$ un point fixe de (1.12). Soit $V : W \to \mathbb{R}$, une fonction différentiable définie sur un voisinage W de $\bar{x}$ telle que $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$. Posons:

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x),$$

alors on a le théorème suivant.

Théorème 1.5.1 (Lyapunov) *(i) Si* $\dot{V}(x) \leq 0$ *dans* $W - \{\bar{x}\}$ *alors* $\bar{x}$ *est stable.*
(ii) Si $\dot{V}(x) < 0$ *dans* $W - \{\bar{x}\}$ *alors* $\bar{x}$ *est asymptotiquement stable.*
(iii) Si $\dot{V}(x) > 0$ *dans* $W - \{\bar{x}\}$ *alors* $\bar{x}$ *est instable.*

On dit aussi que la fonction $\dot{V}$ est *semi-définie négative* dans le premier cas, *définie négative* dans le deuxième cas et *définie positive* dans le troisième cas. Pour la démonstration de ce théorème voir par exemple [84]. Il n'y a pas de règle générale

pour trouver une fonction de Lyapunov, cependant, dans des problèmes de mécanique, l'énergie est souvent un bon candidat.

Exemple 1.5.1 Le système [94] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= -x + ay(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

a un point fixe unique $(0,0)$. Soit $V = x^2 + y^2$, alors :

$$\dot{V} = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2a(x^2 + y^2)^2.$$

D'où, d'après le théorème de Lyapunov, si $a < 0$ le point fixe à l'origine est asymptotiquement stable ; si $a = 0$, le point est stable (ici les trajectoires sont des cercles) ; si $a > 0$, le point est instable.

Exemple 1.5.2 [68] Considérons le mouvement d'une particule de masse m attachée à un ressort de raideur $k(x + x^3)$, $k > 0$, où x est le déplacement. L'équation différentielle gouvernant le système est :

$$m\ddot{x} + k(x + x^3) = 0,$$

ou, en posant $\dot{x} = y$,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\frac{k}{m}(x + x^3). \tag{1.43}$$

Etudions la stabilité du système (1.43) au point $(x, y) = (0,0)$. L'énergie totale du système est :

$$E(x,y) = \frac{my^2}{2} + k\Big(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\Big).$$

$E(x,y)$ est aussi une fonction de Lyapunov pour (1.43), car $E(0,0) = 0$ et $E(x,y) > 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et

$$\dot{E} = my\dot{y} + k(x + x^3)\dot{x} = -ky(x + x^3) + k(x + x^3)y \equiv 0.$$

Donc le point fixe $(x,y) = (0,0)$ est stable, d'après le théorème de Lyapunov.

1.6 Attracteurs et attracteurs étranges

1.6.1 Attracteurs

Définition 1.6.1 *[116], [142] Soit A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On suppose que A est un ensemble invariant (i. e. $\phi_t(A) = A$ pour tout t). On dit que A est stable si pour tout voisinage U de A, il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) \equiv \phi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$. Si de plus :*

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$$

et s'il existe une orbite dense dans A, alors A est un attracteur.

Lorsque A est un attracteur, l'ensemble

$$W = \bigcup_{t<0} \phi_t(V)$$

est appelé le bassin d'attraction de A. C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers A.

L'attracteur le plus simple est un point fixe. Un deuxième type d'attracteur pour un champ de vecteurs est le cycle limite ω : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les orbites proches (Cf. Section 1.3).

Exemple 1.6.1 Soit le système d'équations [20] :

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(1 - x^2 - y^2). \tag{1.44}$$

En coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, le système (1.44) s'écrit :

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \tag{1.45}$$

La solution générale de (1.45) est :

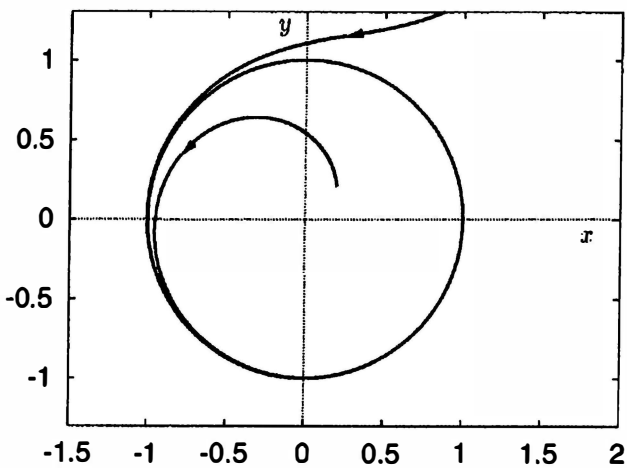


FIG. 1.15 – *Le cycle limite de l'exemple 1.6.1*

$$r(t) = \frac{r_0}{\left[r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}\right]^{1/2}}, \quad \theta = t + \theta_0, \tag{1.46}$$

où $r_0 = r(0)$, et $\theta_0 = \theta(0)$. D'où :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{r_0}{\left[r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}\right]^{1/2}} \cos(t + \theta_0), \\ y(t) &= \frac{r_0}{\left[r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}\right]^{1/2}} \sin(t + \theta_0). \end{aligned}$$

On remarquera que :

(i) $x = 0$, $y = 0$ est le seul point fixe de (1.44),

(ii) la solution correspondant à $r_0 = 1$:

$$x(t) = \cos(t + \theta_0), \quad y(t) = \sin(t + \theta_0)$$

est périodique de période 2π ; son orbite est le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$,

(iii) d'après (1.46), toutes les orbites de (1.44), à l'exception de l'origine, spiralent vers le cercle unité qui est le cycle limite et le bassin d'attraction du cycle limite est $\mathbb{R}^2 - (0,0)$.

La situation est décrite sur la figure 1.15.

1.6.2 La fonction sphérique de Lorenz

Il n'est pas toujours possible de montrer que le système (1.12) possède une région d'attraction. Cependant, suivant un argument d'E. N. Lorenz [110], [138], on peut le montrer pour un système de la forme :

$$\dot{x}_i = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j + \sum_{j,k=1}^{n} a_{ijk} x_j x_k + c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

où $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j > 0$ (forme quadratique définie positive) et $\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ijk} x_i x_j x_k \equiv 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, a_{ijk}, b_{ij} et c_i étant des constantes. En effet, soit

$$Q(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i x_i$$

et soient $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les racines du système linéaire :

$$\sum_{j=1}^{n} (b_{ij} + b_{ji}) x_j = c_i, \quad i = 1, \ldots n,$$

on a alors :

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i \dot{x}_i = \sum_{i,j=1}^{n} [b_{ij} e_i e_j - b_{ij}(x_i - e_i)(x_j - e_j)]. \tag{1.47}$$

Le second membre de (1.47) s'annule seulement sur la surface d'un ellipsoïde E d'équation :

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x_i - e_i)(x_j - e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} e_i e_j,$$

il est positif à l'intérieur de E et négatif à l'extérieur. Soit S une hypersphère dont l'intérieur R_0 contient l'ellipsoïde E, il est évident que toute trajectoire située à proximité de R_0 sera attirée vers R_0.

Exemple 1.6.2 Considérons le système de Lorenz [110] :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{1.48}$$

avec $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$.

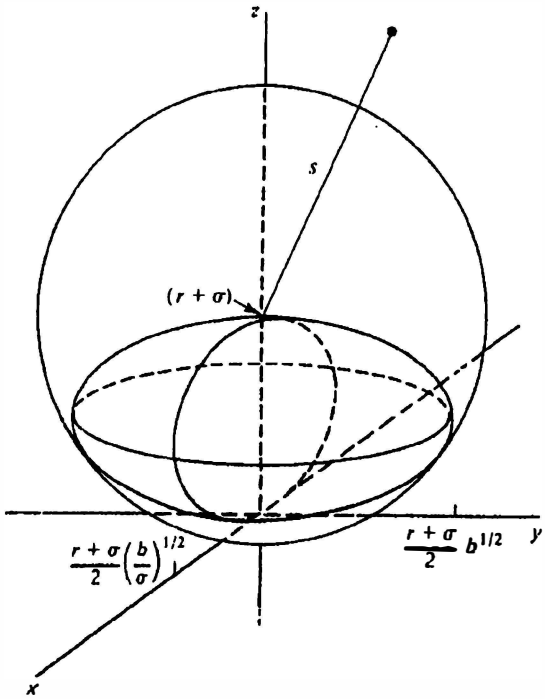


FIG. 1.16 – *Région d'attraction du système de Lorenz. D'après [96].*

Les solutions de ce système restent bornées dans l'espace des phases pour tout t. En effet, posons $u = z - r - \sigma$, (1.48) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= -y - x(u + \sigma), \\ \frac{du}{dt} &= -b(u + r + \sigma) + xy. \end{aligned}$$

On en déduit : $c_3 = -b(r + \sigma)$, $b_{11} = \sigma$, $b_{12} = -\sigma$, $b_{21} = \sigma$, $b_{22} = 1$, $b_{33} = b$, $a_{213} = -1$, $a_{312} = 1$. Les autres coefficients c_i, b_{ij}, a_{ijk} sont nuls. D'où $e_1 = e_2 = 0$, $e_3 = -(r + \sigma)/2$ et (1.47) s'écrit :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + u^2) = -\sigma x^2 - y^2 - b(u + \frac{1}{2}(r + \sigma))^2 + \frac{1}{4}b(r + \sigma)^2. \tag{1.49}$$

A l'extérieur de l'ellipsoïde E d'équation :

$$\sigma x^2 + y^2 + b(u + \frac{1}{2}(r + \sigma))^2 = \frac{1}{4}b(r + \sigma)^2,$$

(Cf. figure 1.16), le second membre de (1.49) est partout négatif. La distance $s \equiv [x^2 + y^2 + u^2]^{1/2}$ décroît donc en dehors d'une sphère S contenant l'ellipsoïde E (voir figure 1.16). Les trajectoires convergent donc vers cette région sphérique [96].

1.6.3 L'attracteur étrange

Un autre type d'attracteur intéressant est l'attracteur étrange. Cet attracteur a été introduit par Ruelle et Takens [141]. Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

1) dans l'espace des phases, l'attracteur est de *volume nul*,

2) la dimension d de l'attracteur est *fractale* (non-entière) avec $2 < d < n$, où n est la dimension de l'espace des phases,

3) *Sensibilité aux conditions initiales*: deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre. La figure 1.17a montre deux trajectoires de l'attracteur de Duffing :

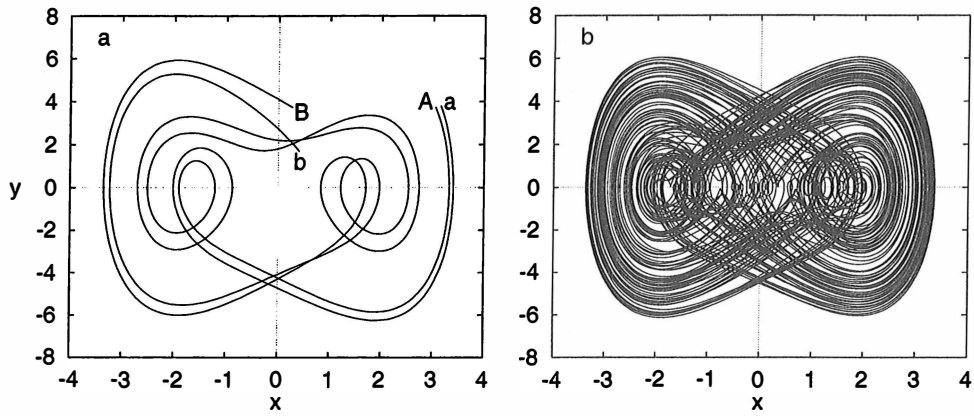


FIG. 1.17 – *Attracteur de Duffing à $k = 0.05$ et $C = 7.5$: sensibilité aux conditions initiales (a) et trajectoire chaotique (b).*

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = C\cos t$$

ou :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ky - x^3 + C\cos t$$

avec $k = 0.05$ et $C = 7.5$, issues de deux points voisins $A(3,4)$ et $a(3.1,4.1)$, qui se trouvent en B et b respectivement après un temps $t = 10.26$ et qui s'écartent petit à petit au bout d'un certain temps [157]. Ces deux trajectoires ont été calculées par le programme 1.2. Si l'on continue à intégrer le système on obtient une trajectoire chaotique (Cf. figure 1.17b).

La propriété 2) implique que la dimension de l'espace des phases doit être supérieure ou égale à 3.

Remarque 1.6.1 Le système de Duffing ci-dessus est non-autonome. Le rendre autonome conduit à augmenter d'une unité la dimension de l'espace des phases (Cf. formule (1.11)).

Il est souvent possible de montrer que le volume de l'espace des phases tend vers zéro, sans avoir à résoudre le système (1.12), grâce au théorème suivant.

Théorème 1.6.1 (Théorème de la Divergence) *Soient ϕ_t le flot de (1.12), V un volume de l'espace des phases au temps $t = 0$, $V(t) = \phi_t(V)$ l'image de V par ϕ_t, on a :*

$$\left.\frac{dV(t)}{dt}\right|_{t=0} = \int_V Div\, f dx_1 \dots dx_n, \qquad Div\, f \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \tag{1.50}$$

PREUVE [92] : Par définition :

$$\phi_t(x) = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ \vdots \\ u_n(x,t) \end{bmatrix}$$

où

$$u_i(x,t) = x_i + t f_i(x) + O(t^2) \quad i = 1, \dots, n$$

car $\phi_t(x)$ est une solution de (1.12). On a, d'après la formule de changement de variables dans une intégrale multiple :

$$V(t) = \int_V \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| dx. \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| \equiv \det\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right].$$

On en déduit :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_V \frac{d}{dt}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| dx.$$

Comme

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{cases} t\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + O(t^2) & \text{si } i \neq j, \\ 1 + t\frac{\partial f_i}{\partial x_i} + O(t^2) & \text{si } i = j, \end{cases}$$

on en déduit :

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| = 1 + t\text{Div } f + O(t^2). \tag{1.51}$$

D'où en dérivant (1.51) par rapport à t et en faisant $t \to 0$, on obtient (1.50). □

En particulier si

$$\text{Div } f = \mu = \text{ Cte},$$

on a alors :

$$\frac{dV}{dt} = \mu \int_V dx = \mu V,$$

d'où

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \mu.$$

En intégrant, nous obtenons :

$$V(t) = V_0 e^{\mu t}, \quad V_0 = V(0)$$

qui tend vers zéro quand $t \to +\infty$ et $\mu < 0$.

Remarque 1.6.2 Le système est dissipatif (resp. conservatif) si $dV/dt < 0$ (resp. $dV/dt = 0$). Dans le cas $\mu = 0$ (système conservatif), le théorème 1.6.1 s'appelle théorème de Liouville.

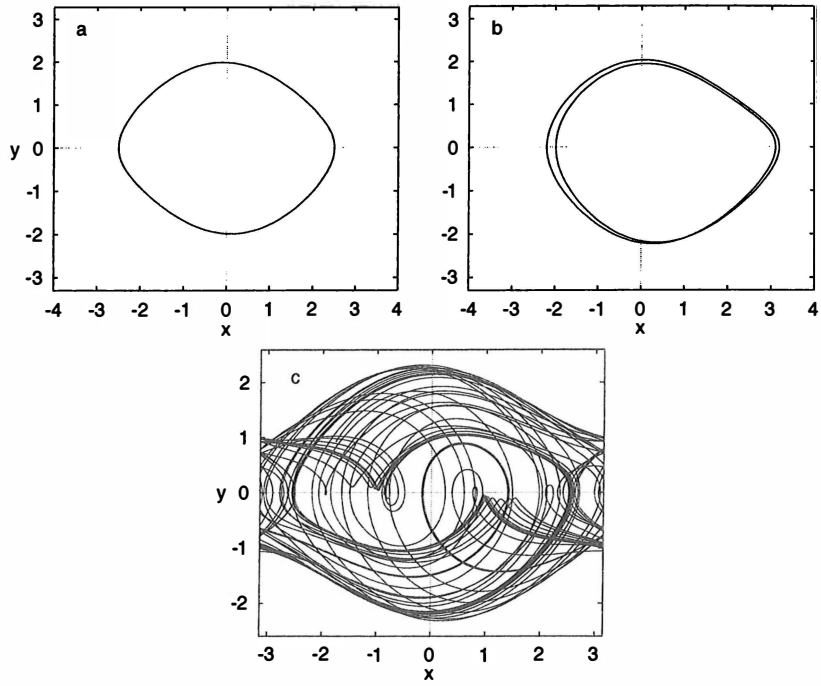


FIG. 1.18 – *Portraits des phases du pendule amorti et entretenu à* $\gamma = 0.5$, $\omega = 2/3$: *(a)* $A = 0.9$ *(b)* $A = 1.07$ *(c)* $A = 1.15$.

Exemple 1.6.3 Considérons l'équation du problème du pendule amorti et entretenu :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = A\cos\omega t, \tag{1.52}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y - \sin x + A\cos z, \\ \frac{dz}{dt} &= \omega, \end{aligned} \tag{1.53}$$

en posant $x = \theta$, $y = d\theta/dt$, $z = \omega t$. On a :

$$\text{Div } f = -\gamma.$$

Si $\gamma > 0$, Div $f < 0$, le système est dissipatif. Si $\gamma = 0$, Div $f = 0$, le système est conservatif. La figure 1.18 présente les portraits des phases pour $\gamma = 0.5$, $\omega = 2/3$, A étant le paramètre de bifurcation [9]. Pour $A = 0.9$, la trajectoire est périodique. Lorsque A croît, on observe un doublement de période à $A = 1.07$; ensuite à $A = 1.15$, la trajectoire devient chaotique[1]. Les trajectoires ont été calculées par le programme 1.3.

1. Cependant à $A = 1.35$ le système est de nouveau périodique. On a un autre doublement de période à $A = 1.45$ et un autre chaos à $A = 1.50$ [9]

Exemple 1.6.4 Nous présentons dans cet exemple le prototype de l'attracteur étrange : l'attracteur de Lorenz.

Considérons le système de Lorenz (1.48) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{1.54}$$

avec $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$. Ce système est un modèle simplifié du phénomène de convection naturelle entre deux plaques planes horizontales, infinies. La plaque supérieure étant à la température T et la plaque inférieure à la température $T + \Delta T$. Le lecteur intéressé par l'établissement de ce système pourra se reporter à [13] ou [96]. Le paramètre r est lié à ΔT et donc au nombre de Rayleigh ; x est proportionnel à la vitesse du fluide, y caractérise la différence de température entre le fluide montant et le fluide descendant, z est proportionnel à la déviation du profil vertical de température par rapport à sa valeur d'équilibre. Ce modèle n'est valable que dans le voisinage immédiat de la transition conduction/convection car les coefficients de Fourier retenus par Lorenz décrivent de simples rouleaux. Le chaos de Lorenz est donc différent du chaos expérimental pour lequel il faut beaucoup de modes Fourier.

L'origine est un point fixe. La matrice jacobienne à l'origine est :

$$D(0,0,0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}. \tag{1.55}$$

Son équation caractéristique,

$$(\lambda + b)[(\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0, \tag{1.56}$$

a pour racines :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(1+\sigma) \pm \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-r)}}{2}, \quad \lambda_3 = -b. \tag{1.57}$$

Tant que $0 < r < 1$, toutes les valeurs propres sont négatives : le point fixe est stable.

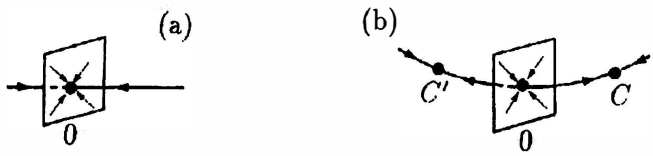


FIG. 1.19 – *Système de Lorenz : vue schématique du flot près de $r = 1$: (a) $r < 1$ (un point fixe). (b) $r > 1$ (trois points fixes).*

Quand $r = 1$, les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -(\sigma + 1), \quad \lambda_3 = -b. \tag{1.58}$$

Nous verrons dans l'exemple 1.8.5 que ce cas correspond à une bifurcation fourche.

Pour $r > 1$, on a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. L'origine est devenue instable. Mais lorsque $r > 1$, deux nouveaux points fixes apparaissent que nous désignons par C, C' et dont les coordonnées sont :

$$x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z^* = r - 1,. \tag{1.59}$$

(voir figure 1.19) La matrice jacobienne correspondant à ces points fixes s'écrit :

$$D(x^*, y^*, z^*) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{bmatrix}. \tag{1.60}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0. \tag{1.61}$$

Les relations entre les racines et les coefficients de $P(\lambda)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -(\sigma + b + 1), \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 &= b(\sigma + r), \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -2\sigma b(r-1). \end{aligned} \tag{1.62}$$

Pour $r > 1$, les coefficients de (1.61) sont tous positifs. On en déduit qu'une racine de (1.61) est réelle négative ; notons λ_3 cette racine. Les deux autres racines sont réelles si

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} \leq 0$$

où p et q sont les coefficients de l'équation réduite :

$$u^3 + pu + q = 0$$

avec

$$\begin{aligned} u &= \lambda + \frac{1}{3}(\sigma + b + 1), \\ p &= b(r + \sigma) - \frac{1}{3}(\sigma + b + 1)^2, \\ q &= \frac{2}{27}(\sigma + b + 1)^3 - \frac{1}{3}b(r + \sigma)(\sigma + b + 1) + 2\sigma b(r-1). \end{aligned}$$

Pour les valeurs des paramètres $\sigma = 10$ et $b = 8/3$, la relation $q^2 + 4p^3/27 = 0$ est obtenue pour $r = r_1 = 1.34561....$ Les trois racines de (1.61) sont donc réelles si $r < r_1$ et elles sont toutes négatives.

Si r est légèrement plus grand que r_1, il y a une racine réelle négative λ_3 et deux racines complexes conjuguées. Écrivons le polynôme caractéristique (1.61) sous la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_r - i\lambda_i)(\lambda - \lambda_r + i\lambda_i) \text{ avec } \lambda_{1,2} = \lambda_r \pm i\lambda_i$$

(1.62) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \lambda_3 + 2\lambda_r &= -(\sigma + b + 1), \\ \lambda_r^2 + \lambda_i^2 + 2\lambda_3\lambda_r &= b(\sigma + r), \\ \lambda_3(\lambda_r^2 + \lambda_i^2) &= -2\sigma b(r-1). \end{aligned} \tag{1.63}$$

Pour $r > r_1$ et proche de r_1, λ_r reste négatif et les points fixes C, C' sont restés stables. Si r continue à croître, on obtient $\lambda_r = 0$ lorsque :

$$r = r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \tag{1.64}$$

(c'est-à-dire $r_c \approx 24.7368$ pour $\sigma = 10$ et $b = 8/3$). Cette valeur du paramètre r correspond à une bifurcation de Hopf (voir chapitre 2). Les valeurs propres sont alors, d'après (1.63) :

$$\lambda_{1,2} = \pm i w_0, \quad \lambda_3 = -(\sigma + b + 1) \tag{1.65}$$

avec $w_0^2 = b(r_c + \sigma) = 2\sigma b(\sigma + 1)/(\sigma - b - 1)$.

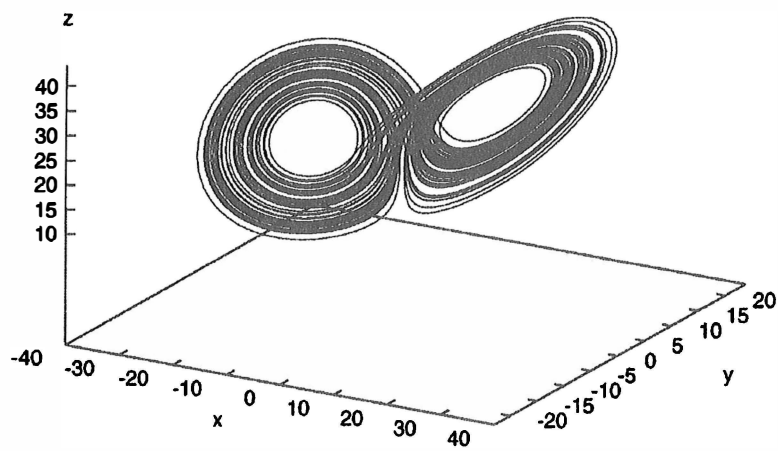


FIG. 1.20 – *Une vue de l'attracteur de Lorenz par le programme 1.1.*

Si r croît encore, pour $r > r_c$ les points fixes C, C' deviennent instables à leur tour car λ_r est devenue positive et on obtient un attracteur chaotique (trouvé par Lorenz [110] à $r = 28$).

La divergence du champ de vecteurs f est partout négative :

$$\mathrm{Div} f = -\sigma - 1 - b = -\frac{41}{3}.$$

Donc les éléments de volume se contractent. Au bout d'une unité de temps cette contraction réduit un volume donné V_0 d'un facteur

$$e^{-(\sigma+b+1)} = e^{-41/3},$$

c'est donc un système très dissipatif. Désignons par $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, le flot de (1.54), avec (voir la définition 1.3.1) :

$$\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}.$$

Soit R_0 l'intérieur de la sphère S de l'exemple 1.6.2. Nous avons vu dans cet exemple que $\phi_t(R_0) \subset R_0$. Pour $t = 1, 2, 3, \ldots$, définissons les régions $R_1 = \phi_1(R_0) \subset R_0$, $R_2 = \phi_2(R_0) = \phi_1(R_1) \subset R_1$, etc. Nous avons donc :

$$R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \cdots$$

Soit V_0 le volume de R_0. Le volume V_k de R_k sera :

$$V_k = V_0 e^{-k(\sigma+b+1)}$$

Toute orbite issue de R_0 sera donc piégée, *in fine*, dans la région

$$R_\infty = R_0 \cap R_1 \cap R_2 \cap \cdots$$

de volume nul. Nous montrerons au chapitre 4 que la dimension de l'attracteur de Lorenz est fractale (plus exactement $d = 2.06$ à $r = 28$). La figure 1.20 montre une vue de l'attracteur de Lorenz à $r = 28$ par le programme 1.1. L'attracteur de Lorenz est presqu'une surface car sa dimension est proche de 2.

Nous aurons l'occasion de parler de l'attracteur de Lorenz dans les chapitres suivants.

1.7 Système hamiltonien

1.7.1 Définition

Un système hamiltonien à n *degrés de liberté* est un système d'équations du mouvement de la forme :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.66}$$

où $H = H(q, p, t)$ est le hamiltonien. L'espace des phases du système (1.66) est $\mathbb{R}^{2n}$. On déduit de (1.66) :

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

En conséquence, si le hamiltonien H ne dépend pas explicitement du temps, il sera conservé au cours du temps : $H(q, p) = E =$ Constante.

Exemple 1.7.1 Considérons l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (\dot{}) \equiv d/dt. \tag{1.68}$$

(1.68) est équivalent à :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega_0^2 q, \tag{1.69}$$

avec

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2). \tag{1.70}$$

L'oscillateur harmonique est donc un système hamiltonien à un degré de liberté.

Exemple 1.7.2 Considérons le système d'équations différentielles du mouvement d'une masse m dans le champ de gravitation d'une masse centrale M (Problème keplerien) :

$$\ddot{x} = -M\frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -M\frac{y}{r^3}, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}. \tag{1.71}$$

Posons $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$. Nous pouvons alors écrire le système (1.71) sous la forme hamiltonienne :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \tag{1.72}$$

avec

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{mM}{r}.$$

Le système (1.72) est un système hamiltonien à deux degrés de liberté.

Tout hamiltonien $H(p, q, t)$, à n degrés de liberté, qui dépend explicitement du temps peut être transformé en un hamiltonien indépendant du temps à $n+1$ degrés de liberté, en posant :

$$\begin{aligned} &\bar{p}_i = p_i, \quad \bar{q}_i = q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\bar{p}_{n+1} = -H, \quad \bar{q}_{n+1} = t. \end{aligned}$$

Le nouveau hamiltonien sera alors :

$$\bar{H}(\bar{p}, \bar{q}) = H(p, q, q_{n+1}) + p_{n+1}.$$

Les nouvelles équations hamiltoniennes s'écrivent alors :

$$\frac{d\bar{q}_i}{d\tau} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_i}, \quad \frac{d\bar{p}_i}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{1.73}$$

et le nouveau hamiltonien ne dépend pas explicitement du "temps" τ. Pour $i = n+1$, (1.73) donne $t(\tau) = \tau$ et $\bar{H} = \text{Const.}$ Par conséquent, nous ne considérons désormais que des hamiltoniens indépendants du temps. Dans ce cas, les trajectoires de (1.66) évolueront sur une hyper-surface $H = \text{Const.}$ de dimension $2n - 1$. Noter aussi que

si l'on assimile le système (1.66) à un système d'équations différentielles du type (1.12), en posant :

$$x_i = q_i, \quad x_{n+i} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

alors :

$$\text{Div } f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) = 0.$$

Par conséquent, le système hamiltonien est conservatif. Dans ce cas le système ne possède pas d'attracteurs comme dans le cas dissipatif et il n'y a pas d'étape transitoire puisque la trajectoire ne tend pas vers un attracteur.

1.7.2 Transformation canonique

Définition 1.7.1 *Un changement de variables :*

$$q_i = q_i(Q_j, P_j), \quad p_i = p_i(Q_j, P_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, n \tag{1.74}$$

est dit canonique s'il préserve la forme hamiltonienne des équations d'évolution :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H(Q,P)}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H(Q,P)}{\partial Q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.75}$$

où $H(Q,P)$ est le hamiltonien transformé.

Cherchons maintenant les conditions pour que (1.74) soit une transformation canonique.

Théorème 1.7.1 *Pour que (1.74) soit une transformation canonique, il faut et il suffit que :*

$$\{Q_k, Q_l\} = \{P_k, P_l\} = 0, \quad \{Q_k, P_l\} = -\{P_k, Q_l\} = \delta_{kl}, \tag{1.76}$$

où $\{\alpha, \beta\}$ désigne le crochet de Lagrange :

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{\partial p_i}{\partial \beta} - \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \frac{\partial q_i}{\partial \beta} \right).$$

PREUVE : Nous déduisons de (1.74) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial P_k} \dot{P}_k = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}, \tag{1.77}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial P_k} \dot{P}_k = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}. \tag{1.78}$$

Multiplions (1.77) et (1.78) par $\partial p_i / \partial P_l$ et $-\partial q_i / \partial P_l$ respectivement, additionnons les équations obtenues et sommons sur i, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} \{Q_k, P_l\} \dot{Q}_k + \sum_{k=1}^{n} \{P_k, P_l\} \dot{P}_k = \frac{\partial H}{\partial P_l}. \tag{1.79}$$

On obtient une relation analogue pour $\partial H/\partial Q_l$:

$$\sum_{k=1}^{n}\{Q_k, Q_l\}\dot{Q}_k + \sum_{k=1}^{n}\{P_k, Q_l\}\dot{P}_k = \frac{\partial H}{\partial Q_l}. \tag{1.80}$$

On en déduit les conditions (1.76). □

Posons :

$$\mathcal{A} = \left\|\frac{\partial q}{\partial Q}\right\|, \quad \mathcal{B} = \left\|\frac{\partial q}{\partial P}\right\|, \quad \mathcal{C} = \left\|\frac{\partial p}{\partial Q}\right\|, \quad \mathcal{D} = \left\|\frac{\partial p}{\partial P}\right\|. \tag{1.81}$$

La matrice jacobienne de (1.74) s'écrit :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}, \tag{1.82}$$

(1.76) est équivalent à :

$$\mathcal{M}^T \mathcal{J} \mathcal{M} = \mathcal{J} \tag{1.83}$$

où $\mathcal{M}^T$ est la transposée de $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}^T = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^T & \mathcal{C}^T \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T \end{pmatrix} \tag{1.84}$$

et

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad I_n : \text{matrice unitaire d'ordre } n.$$

La matrice $\mathcal{M}$ qui satisfait à (1.83) est appelée matrice *symplectique.* On déduit de (1.83) que $|\mathcal{M}|^2 = 1$ (en fait, on a $|\mathcal{M}| = 1$). Par conséquent $\mathcal{M}^{-1}$ existe et

$$\mathcal{M}^{-1} = -\mathcal{J}\mathcal{M}^T\mathcal{J}. \tag{1.85}$$

Mathématiquement, l'espace des phases est l'espace tangent TM d'une variété symplectique M munie de la 2-forme canonique :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i. \tag{1.86}$$

Considérons le champ de vecteurs suivant (appelé *champ de vecteurs hamiltoniens*) :

$$v = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_p \\ -H_q \end{pmatrix} \tag{1.87}$$

avec :

$$\dot{q} = \left(\frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}\right)^T, \quad \dot{p} = \left(\frac{dp_1}{dt}, \ldots, \frac{dp_n}{dt}\right)^T,$$

$$H_p = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^T, \quad H_q = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial q_n}\right)^T.$$

$v \in TM$ est un vecteur tangent à une trajectoire de (1.66). La transformation canonique (1.74) laisse invariante la 2-forme ω :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i = \sum_{i=1}^{n} dP_i \wedge dQ_i \tag{1.88}$$

car on peut montrer que (1.88) est équivalent à (1.83).

Exemple 1.7.3 Considérons l'oscillateur harmonique de l'exemple 1.7.1. Les équations hamiltoniennes sont (1.69). La transformation suivante :

$$q(P,Q) = \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}} \sin Q, \quad p(P,Q) = \sqrt{2\omega_0 P} \cos Q \tag{1.89}$$

est canonique car

$$\begin{aligned} dq \wedge dp &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\omega_0 P}} \sin Q dP + \sqrt{\frac{2P}{\omega_0}} \cos Q dQ \right) \wedge \\ &\quad \left(\sqrt{\frac{\omega_0}{2P}} \cos Q dP - \sqrt{2\omega_0 P} \sin Q dQ \right) \\ &= dQ \wedge dP. \end{aligned}$$

Les nouvelles équations du mouvement sont :

$$\dot{Q} = \omega_0, \quad \dot{P} = 0 \tag{1.90}$$

et le nouveau hamiltonien est

$$H = H(P) = \omega_0 P. \tag{1.91}$$

Nous verrons plus loin que Q, P sont des variables d'action et angulaires de l'oscillateur harmonique.

Exemple 1.7.4 Considérons les équations hamiltoniennes (1.72) du problème keplerien. La transformation suivante

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \quad p_x = p_r \cos\theta - \frac{\sin\theta}{r} p_\theta, \\ y &= r\sin\theta, \quad p_y = p_r \sin\theta + \frac{\cos\theta}{r} p_\theta \end{aligned}$$

est canonique car on vérifie facilement que les conditions (1.76) sont satisfaites. Les nouvelles équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \end{aligned} \tag{1.92}$$

avec

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2) - \frac{mM}{r}. \tag{1.93}$$

1.7.3 Système intégrable - Variables d'action et angulaires

Dans le cas où le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, nous avons vu (Cf. formule (1.67)) que l'énergie $E = H(p,q)$ est une constante. Plus généralement, une fonction $f(p,q)$ est une *constante du mouvement* si $f(p,q) =$ constante quand $p(t)$ et $q(t)$ évoluent selon (1.66). On a donc, si $H = H(p,q)$:

$$\dot{f} = \dot{p}\frac{\partial f}{\partial p} + \dot{q}\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial p}.\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}.\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Cette dernière expression est appelée un *crochet de Poisson* de f et H, et est notée $[f,H]$ où

$$[f_1,f_2] \equiv \frac{\partial f_1}{\partial q}.\frac{\partial f_2}{\partial p} - \frac{\partial f_1}{\partial p}.\frac{\partial f_2}{\partial q}.$$

Ainsi la condition pour que f soit une constante du mouvement (pour un hamiltonien indépendant du temps) est :

$$[f,H] = 0.$$

En particulier, le hamiltonien H est une constante du mouvement car $[H,H] = 0$.

Définition 1.7.2 *Un hamiltonien $H(p,q)$, à n degrés de liberté, est dit intégrable s'il existe n constantes du mouvement, linéairement indépendantes,*

$$f_1(q,p) = H(q,p) = h_1, f_2(q,p) = h_2, \ldots, f_n(q,p) = h_n,$$

avec

$$[f_i,f_j] = 0 \quad \forall i,j. \tag{1.94}$$

Les constantes h_i, $i = 1,2,\ldots,n$, sont appelées *intégrales premières.*

Exemple 1.7.5 Considérons le hamiltonien du problème de Toda [138] :

$$H_T = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{24}(e^{2x-2y\sqrt{3}} + e^{2x+2y\sqrt{3}} + e^{-4x}) - \frac{1}{8}. \tag{1.95}$$

Les équations hamiltoniennes s'écrivent :

$$\dot{x} = \frac{\partial H_T}{\partial p_x} = p_x, \quad \dot{y} = \frac{\partial H_T}{\partial p_y} = p_y,$$
$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H_T}{\partial x} = \frac{1}{6}[e^{-4x} - e^{2x}\cosh(2y\sqrt{3})],$$
$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H_T}{\partial y} = -\frac{e^{2x}}{2\sqrt{3}}\sinh(2y\sqrt{3}).$$

H_T est une constante du mouvement. Une deuxième intégrale du mouvement est trouvée par Hénon :

$$I = 8\dot{y}(\dot{y}^2 - 3\dot{x}^2) + (\dot{y} + \dot{x}\sqrt{3})e^{2x-2y\sqrt{3}} + (\dot{y} - \dot{x}\sqrt{3})e^{2x+2y\sqrt{3}} - 2\dot{y}e^{-4x}.$$

Le hamiltonien (1.95) est donc intégrable.

Exemple 1.7.6 Considérons le hamiltonien de Hénon-Heiles:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + Ax^2 + By^2 + Dx^2y - \frac{C}{3}y^3. \tag{1.96}$$

Pour $D = 1$, $C = -6$, A et B arbitraires, ce hamiltonien possède une seconde intégrale:

$$G = x^4 + 4x^2y^2 - 4\dot{x}(\dot{x}y - \dot{y}x) + 4Ax^2y + (4A - B)(\dot{x}^2 + Ax^2).$$

Il est donc intégrable dans ce cas.

(On montre dans [58] que dans les deux autres cas: $A = B$, $C = -D = 1$ et $16A = B$, $D = -1, C = 16$, le hamiltonien (1.96) est aussi intégrable et que dans tous les autres cas il n'est pas intégrable).

Dans le cas d'un hamiltonien intégrable, il existe (Théorème de Liouville) une transformation canonique:

$$q_i = q_i(\theta_j, J_j), \quad p_i = p_i(\theta_j, J_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.97}$$

telle que le nouveau hamitonien ne dépend plus des θ. Les équations hamiltoniennes s'écrivent alors:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H(J)}{\partial J_i} \equiv \omega_i(J), \quad \dot{J}_i = -\frac{\partial H(J)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.98}$$

Le système (1.98) est intégrable et a pour solution:

$$\theta_i = \omega_i t + \theta_i(0), \quad J_i = J_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.99}$$

Les J_i, $i = 1, 2, \dots, n$ sont donc n constantes. Les variables J_i sont appelées des *variables d'action* et les variables θ_i des *variables angulaires*. Les trajectoires sont sur un tore T^n.

La trajectoire sur le tore T^n est dite *quasi-périodique* à n fréquences $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, s'*il n'existe pas* de n-tuple

$$m = (m_1, m_2, \dots, m_n), \quad m_i \in \mathbb{Z} \tag{1.100}$$

tel que

$$(m, \omega) \equiv m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \cdots + m_n\omega_n = 0. \tag{1.101}$$

Dans ce cas, la trajectoire ne se referme jamais sur elle même et couvre de façon dense le tore T^n. Par contre, s'il existe $n - 1$ relations de type (1.101), alors la trajectoire se referme sur elle même et le mouvement est *périodique*. Dans ce cas, on peut trouver un scalaire ω_0 et un n-tuple m de type (1.100) tels que $\omega = m\omega_0$.

Exemple 1.7.7 Considérons le hamiltonien de deux oscillateurs harmoniques:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \omega_1^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + \omega_2^2 q_2^2). \tag{1.102}$$

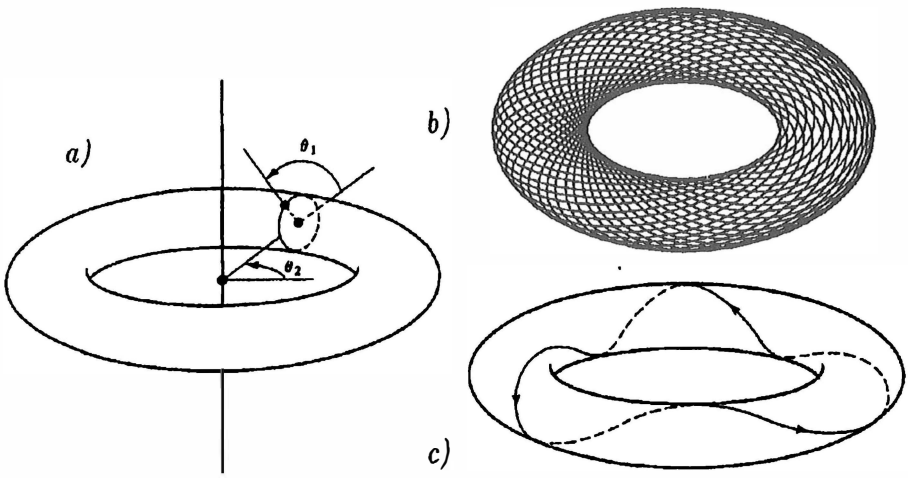


FIG. 1.21 – *a) Les variables angulaires θ_1 et θ_2.*
b) Une orbite quasipériodique sur un tore T^2, avec $\omega_1 - \sqrt{2}\omega_2 = 0$.
c) Une orbite périodique avec $\omega_1 - 3\omega_2 = 0$. D'après [125].

En variables d'action et angulaires $J_1, \theta_1, J_2, \theta_2$ avec :

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\frac{2J_1}{\omega_1}} \sin\theta_1, \quad p_1 = \sqrt{2\omega_1 J_1}\cos\theta_1, \\ q_2 &= \sqrt{\frac{2J_2}{\omega_2}} \sin\theta_2, \quad p_2 = \sqrt{2\omega_2 J_2}\cos\theta_2, \end{aligned}$$

le nouveau hamiltonien est :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(J_1, J_2) = \omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 \tag{1.103}$$

et les équations hamiltoniennes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1, \quad \dot{J}_1 = 0, \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2, \quad \dot{J}_2 = 0. \end{aligned}$$

D'où la solution

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \omega_1 t + \theta_1(0), \quad J_1 = J_1(0) = \text{Cte}, \\ \theta_2 &= \omega_2 t + \theta_2(0), \quad J_2 = J_2(0) = \text{Cte}. \end{aligned}$$

Les trajectoires sont sur un tore T^2. Elles sont périodiques si ω_1/ω_2 est rationnel et dense sur T^2 si ω_1/ω_2 est irrationnel (Cf. fig. 1.21).

1.8 Variétés centrales

1.8.1 Théorème de la variété centrale

Soit $\bar{x}$ un point fixe de

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r(D), \quad D \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{1.104}$$

La linéarisation de (1.104) autour de $\bar{x}$ s'écrit :

$$\frac{d\xi}{dt} = J\xi \tag{1.105}$$

où $\xi = x - \bar{x}$ et J est la matrice jacobienne.

$$J \equiv Df(\bar{x}) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{x=\bar{x}}.$$

On substitue $\xi = ue^{\lambda t}$, $u \in \mathbb{R}^n$, dans (1.105) et on obtient les équations aux vecteurs propres et aux valeurs propres :

$$(J - \lambda I)u = 0, \tag{1.106}$$

$$|J - \lambda I| = 0. \tag{1.107}$$

Soient $u_1, \ldots, u_s$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est négative, $v_1, \ldots, v_u$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est positive, $w_1, \ldots, w_c$ les vecteurs propres de J correspondant aux valeurs propres λ dont la partie réelle est nulle, avec $s + u + c = n$ et soient E^s le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_1, \ldots, u_s\}$, E^u le sous-espace vectoriel engendré par $\{v_1, \ldots, v_u\}$, E^c le sous-espace vectoriel engendré par $\{w_1, \ldots, w_c\}$, avec $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$. On a le théorème suivant [116], [26].

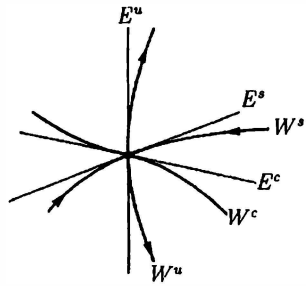


FIG. 1.22 – *Variétés stable, instable et centrale.*

Théorème 1.8.1 (Théorème de la variété centrale) *Il existe des variétés de classe C^r, stable W^s, instable W^u et centrale W^c, tangentes respectivement à E^s, E^u et E^c en $\bar{x}$. Ces variétés sont invariantes par rapport au flot ϕ_t de (1.104). W^s et W^u sont uniques mais W^c ne l'est pas nécessairement.*

La situation, au voisinage de $\bar{x}$, est illustrée sur la figure 1.22. On a $\phi_t(W^s) \subset W^s$, $\phi_t(W^u) \subset W^u$, $\phi_t(W^c) \subset W^c$ et

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ pour tout } x \in W^s, \tag{1.108}$$

$$\lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = \bar{x} \text{ pour tout } x \in W^u. \tag{1.109}$$

Noter que $\bar{x}$ est la limite ω (resp. la limite α) de toute trajectoire $\phi_t(x)$ appartenant à W^s (resp. appartenant à W^u).

De plus, on ne peut attribuer de directions au flot de W^c sans connaître les premiers termes du développement limité de f au voisinage de $\bar{x}$. Si $E^c = \emptyset$, le point $\bar{x}$ est un point fixe hyperbolique (ou non-dégénéré).

Exemple 1.8.1 Soit le système non-linéaire suivant [133] :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x^2, \\ \frac{dz}{dt} &= z + x^2. \end{aligned}$$

Le seul point fixe du système est l'origine et la matrice

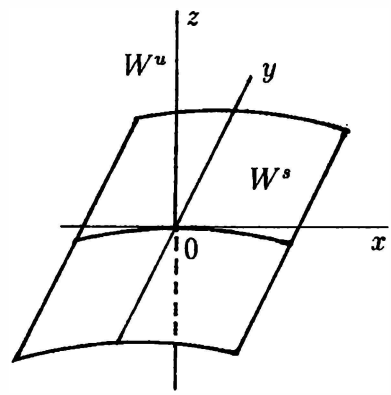


FIG. 1.23 – *Variétés stable et instable de l'exemple 1.8.1.*

$$J = Df(0) = \left\| \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} \right\| = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est déjà diagonale ; par conséquent les sous-espaces E^s et E^u sont respectivement le plan x, y et l'axe z. Après avoir résolu la première équation $dx/dt = -x$, le système non-linéaire se réduit à deux équations différentielles linéaires qui peuvent être résolues facilement et on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-t}, \\ y(t) &= y_0 e^{-t} + x_0^2(e^{-t} - e^{-2t}), \\ z(t) &= z_0 e^{t} + \frac{x_0^2}{3}(e^{t} - e^{-2t}), \end{aligned}$$

où $(x_0, y_0, z_0) = (x(0), y(0), z(0))$. Par conséquent, $\lim_{t \to +\infty} \phi_t(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ si et seulement si $z_0 + x_0^2/3 = 0$; d'où :

$$W^s = \{(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 | z_0 = -x_0^2/3\}.$$

De même, $\lim_{t\to-\infty}\phi_t(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ si et seulement si $x_0=y_0=0$, d'où :

$$W^u=\{(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3|x_0=y_0=0\},$$

W^s est tangente à E^s et $W^u=E^u=$ l'axe des z (Cf. figure 1.23).

Exemple 1.8.2 Soit le système [68] :

$$\dot{x}=x^2,\quad \dot{y}=-y.\quad (\cdot)\equiv d/dt \tag{1.110}$$

Le seul point fixe de ce système est $(x,y)=(0,0)$. Les valeurs propres de la matrice jacobienne

$$J=Df(0)=\left\|\frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j}\right\|=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

sont -1 et 0 et les vecteurs propres correspondants sont $(0,1)$ et $(1,0)$ respectivement. On a donc $E^s=$ l'axe des y et $E^c=$ l'axe des x. La solution du système (1.110) est :

$$x(t)=\frac{x_0}{1-tx_0},\quad y(t)=y_0e^{-t}. \tag{1.111}$$

Éliminant t, nous obtenons :

$$y(x)=y_0e^{-\frac{1}{x_0}}e^{\frac{1}{x}}.$$

Pour $x\geq 0$, la seule courbe solution qui passe par l'origine est l'axe Ox. Pour $x<0$, il existe une infinité de courbes solutions qui approchent l'origine avec $dy/dx=0$. Les variétés W^s et W^c sont représentées sur la figure 1.24. Ainsi la variété centrale W^c n'est pas unique. Noter également que la direction du flot sur W^c ne peut être déterminée par la linéarisation de (1.110). Elle est ici trouvée facilement grâce à la formule (1.111).

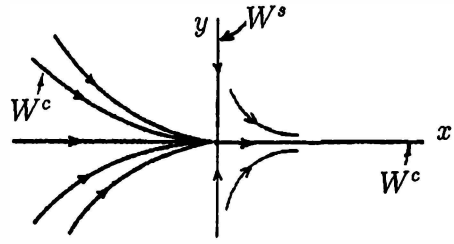


FIG. 1.24 – *Non-unicité de la variété centrale.*

Remarque 1.8.1 Il est à noter que rares sont les systèmes dynamiques pour lesquels on puisse, ainsi, déterminer analytiquement les variétés invariantes. On a recours en général au développement limité au voisinage du point fixe.

1.8.2 Etude locale de la variété centrale

Supposons que, par un changement de coordonnées, le point fixe $\bar{x}$ ait été ramené à l'origine et les équations du système dynamique mises sous la forme :

$$(a) \quad \dot{x} = Ax + f(x,y), \quad (b) \quad \dot{y} = By + g(x,y) \tag{1.112}$$

où x et f sont des n-vecteurs et A est une matrice $n \times n$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle nulle. De même, y et g sont des m-vecteurs et B est une matrice $m \times m$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle négative (pour simplifier, nous avons supposé que le système linéarisé n'a pas de valeurs propres avec partie réelle positive c-à-d $W^u = \emptyset$). Dans la pratique, lorsque la matrice jacobienne est diagonalisable, on peut ramener le système dynamique à la forme (1.112) en utilisant la base des vecteurs propres. Localement la variété centrale W^c peut être représentée au voisinage de $\bar{x} = 0$ par :

$$W^c(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\} \tag{1.113}$$

pour δ suffisamment petit. Les conditions $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 0$ impliquent que $W^c(0)$ est tangente à $E^c \equiv (y = 0)$ au point $(x,y) = (0,0)$.

Portant $y = h(x)$ avec $h(0) = Dh(0) = 0$ dans (1.112a), on obtient :

$$\dot{x} = Ax + f(x,h(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m. \tag{1.114}$$

Le théorème suivant permet de lier la dynamique de (1.112) à celle de (1.114).

Théorème 1.8.2 *Si l'origine $x = 0$ de (1.114) est localement asymptotiquement stable (resp. instable), alors l'origine de (1.112) est aussi localement asymptotiquement stable (resp. instable).*

Pour la preuve de ce théorème voir [26].

Pour calculer la fonction $y = h(x)$, on remplace dans (1.112) $\dot{y}$ par :

$$\dot{y} = Dh(x)\dot{x} = Dh(x)[Ax + f(x,h(x))] = Bh(x) + g(x,h(x)).$$

D'où le système donnant la fonction $h(x)$:

$$Dh(x)[Ax + f(x,h(x))] - Bh(x) - g(x,h(x)) = 0. \tag{1.115}$$

Dans la pratique, on résout approximativement (1.115) en développant $h(x)$ en série de Taylor autour de $x = 0$:

$$h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{2ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{3ijk} x_i x_j x_k + \cdots \quad a_{2ij}, a_{3ijk} \in \mathbb{R}^m. \tag{1.116}$$

Dans le développement (1.116), on a tenu compte du fait que $h(0) = Dh(0) = 0$.

Exemple 1.8.3 Soit le système [163] :

$$(a) \quad \dot{x} = x^2 y - x^5, \quad (b) \quad \dot{y} = -y + x^2. \quad (\cdot) \equiv d/dt \tag{1.117}$$

L'origine est, bien entendu, le point fixe et la matrice jacobienne à l'origine est :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.118}$$

Les valeurs propres de (1.118) sont 0 et -1. Il existe donc une variété centrale pour (1.117) représentée localement par (Cf. Formule (1.113)) :

$$W^c(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, h'(0) = 0\}.$$

Portant $y = h(x)$ et $\dot{y} = h'(x)\dot{x}$ dans (1.117b), on obtient :

$$(x^2 h - x^5)h' = -h + x^2. \tag{1.119}$$

Écrivons $h(x)$ sous la forme d'un développement limité

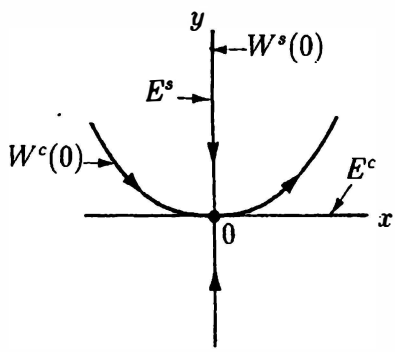


FIG. 1.25 – *Un point fixe instable et sa variété centrale.*

$$h(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4) \tag{1.120}$$

où l'on a tenu compte des conditions $h(0) = h'(0) = 0$. Portons (1.120) dans (1.119) et égalisons les coefficients des puissances de x, nous obtenons $a = 1$ et $b = 0$; d'où :

$$y = h(x) = x^2 + O(x^4). \tag{1.121}$$

La variété centrale est donc une parabole, au voisinage de l'origine. Portant (1.121) dans (1.117), on obtient :

$$\dot{x} = x^4 + O(x^5), \tag{1.122}$$

d'où $\dot{x} > 0$. $x = 0$ est donc un point instable de (1.122). D'où par le théorème 1.8.2, $(x,y) = (0,0)$ est un point d'équilibre instable de (1.117). La géométrie du flot près de $(x,y) = (0,0)$ est illustrée par la figure 1.25.

Exemple 1.8.4 Soit le système [138] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + xz, \\ \dot{y} &= x + yz, \\ \dot{z} &= -z - (x^2 + y^2) + z^2. \end{aligned} \tag{1.123}$$

Ce système a un point fixe à $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. La matrice jacobienne à l'origine

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.124}$$

a pour valeurs propres $\lambda = \pm i$, $\lambda = -1$. On en déduit que W^s est l'axe des z et que W^c est tangente au plan (x, y). Dans ce cas la variété centrale est définie par une équation de la forme $z = h(x, y)$ et la troisième équation de (1.123) s'écrit :

$$\dot{x}h_x + \dot{y}h_y = -h - (x^2 + y^2) + h^2.$$

D'où en tenant compte des deux autres équations de (1.123) :

$$xh_y - yh_x + h(xh_x + yh_y) + h - h^2 + x^2 + y^2 = 0. \tag{1.125}$$

Les conditions $h(0,0) = h_x(0,0) = h_y(0,0) = 0$ impliquent que le développement limité de $h(x, y)$ au voisinage de l'origine soit :

$$h(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + Ax^3 + By^3 + Cx^2y + Dxy^2 + \cdots \tag{1.126}$$

Portant (1.126) dans (1.125) et identifiant les coefficients des puissances de x et y, on obtient $a = b = -1$, $c = A = B = C = D = 0$; d 'où :

$$z = h(x, y) = -x^2 - y^2 + \text{ termes d'ordre 4.} \tag{1.127}$$

La variété centrale près de l'origine est un paraboloïde inversé illustré par la figure 1.26. Pour étudier le comportement du flot sur la variété centrale, portons (1.127)

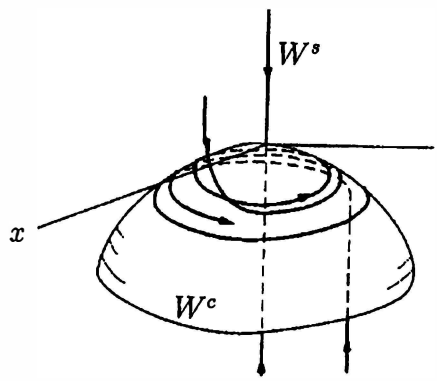


FIG. 1.26 – *La variété centrale de l'exemple 1.8.4. D'après [138].*

dans les deux premières équations de (1.123). Nous obtenons, jusqu'à l'ordre trois, le système suivant :

$$\dot{x} = -y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x - y(x^2 + y^2),$$

ou en coordonnées polaires :

$$\dot{r} = -r^3, \quad \dot{\theta} = 1.$$

D'où :

$$r = \frac{1}{\sqrt{2t + r_0^{-2}}}, \quad \theta = t + \theta_0. \tag{1.128}$$

Le comportement du flot au voisinage de l'origine est donc le suivant : les trajectoires approchent exponentiellement la variété centrale suivant la direction z puis spiralent vers l'origine d'après (1.128). L'origine est donc asymptotiquement stable.

1.8.3 Variété centrale dépendant d'un paramètre

Dans le cas où (1.104) dépend d'un paramètre vectoriel $\epsilon \in \mathbb{R}^p$, on considère ϵ comme une nouvelle variable (vectorielle) dépendante et on remplace (1.112) par le système suivant :

$$(a) \quad \dot{x} = Ax + f(x, y, \epsilon), \quad (b) \quad \dot{y} = By + g(x, y, \epsilon), \quad (c) \quad \dot{\epsilon} = 0, \tag{1.129}$$

avec $(x, y, \epsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. L'équation de la variété centrale s'écrit alors :

$$y = h(x, \epsilon)$$

(la dimension de la variété centrale est $n + p$). Le système d'équations aux dérivées partielles satisfait par $h(x, \epsilon)$ est encore (1.115) :

$$Dh(x, \epsilon)[Ax + f(x, h(x, \epsilon), \epsilon)] - Bh(x, \epsilon) - g(x, h(x, \epsilon), \epsilon) = 0. \tag{1.130}$$

Cependant, le développement de Taylor de $h(x, \epsilon)$ au voisinage de $(x, \epsilon) = (0, 0)$ est maintenant :

$$h(x, \epsilon) = \sum_{k,l=1}^{p} b_{1kl}\epsilon_k\epsilon_l + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} b_{2ik}x_i\epsilon_k + \sum_{i,j=1}^{n} a_{2ij}x_ix_j + \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{3ijk}x_ix_jx_k + \cdots \tag{1.131}$$

au lieu de (1.116).

Exemple 1.8.5 Considérons le système de Lorenz (1.48) avec $\sigma = 10$, $b = 8/3$. Nous étudierons la nature de la bifurcation à $(x, y, z) = 0$, $r = 1$. La matrice jacobienne au point fixe $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ et pour $r = 1$ est d'après (1.48) :

$$D(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}. \tag{1.132}$$

Ses valeurs propres et ses vecteurs propres sont 0, $-(\sigma + 1)$, $-b$ et

$$(1, 1, 0)^T, \quad (\sigma, -1, 0)^T, \quad (0, 0, 1)^T \tag{1.133}$$

respectivement. Nous écrirons d'abord (1.48) sous la forme standard (1.129). Pour cela nous posons $r = 1 + \epsilon$, (1.48) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + x + \epsilon x - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{1.134}$$

Nous passons ensuite à la base des vecteurs propres (1.133) par la transformation de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{1.135}$$

avec la transformation inverse :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\sigma} \begin{pmatrix} 1 & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.136}$$

(1.134) s'écrira alors, dans la base des vecteurs propres :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \frac{u+\sigma v}{1+\sigma} \begin{pmatrix} \sigma\epsilon - \sigma w \\ w - \epsilon \\ (1+\sigma)(u-v) \end{pmatrix}, \\ \dot{\epsilon} &= 0. \end{aligned} \tag{1.137}$$

La variété centrale au voisinage $(u, v, w, \epsilon) = (0, 0, 0, 0)$ est donc donnée par :

$$v = h_1(u, \epsilon), \quad w = h_2(u, \epsilon), \tag{1.138}$$

avec, d'après (1.131) :

$$\begin{aligned} h_1(u, \epsilon) &= b_{11}\epsilon^2 + b_{12}u\epsilon + a_{12}u^2 + \cdots, \\ h_2(u, \epsilon) &= b_{21}\epsilon^2 + b_{22}u\epsilon + a_{22}u^2 + \cdots. \end{aligned} \tag{1.139}$$

Portant (1.137), (1.138) dans (1.130) avec :

$$\begin{aligned} x &\equiv u, \quad y \equiv \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad h(x) \equiv \begin{pmatrix} h_1(u, \epsilon) \\ h_2(u, \epsilon) \end{pmatrix}, \\ A &= 0, \\ B &= \begin{pmatrix} -1-\sigma & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \\ f(x, y, \epsilon) &= \frac{u+\sigma v}{1+\sigma}\sigma(\epsilon - w), \\ g(x, y, \epsilon) &= \frac{u+\sigma v}{1+\sigma} \begin{pmatrix} w - \epsilon \\ (1+\sigma)(u-v) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on obtient le système :

$$\begin{pmatrix} b_{12}\epsilon + 2a_{12}u + \cdots \\ b_{22}\epsilon + 2a_{22}u + \cdots \end{pmatrix} \frac{u + \sigma h_1}{1+\sigma}\sigma(\epsilon - h_2) + \begin{pmatrix} (1+\sigma)h_1 \\ bh_2 \end{pmatrix} - \frac{u+\sigma h_1}{1+\sigma}\begin{pmatrix} (h_2 - \epsilon) \\ (1+\sigma)(u - h_1) \end{pmatrix} = 0.$$

Portant (1.139) dans cette équation et annulant les coefficients des puissances de u et ϵ, on obtient :

$$\begin{aligned} &\text{termes en } \epsilon^2 : && (1+\sigma)b_{11} = 0, \text{ d'où } b_{11} = 0, \\ & && bb_{21} = 0, \text{ d'où } b_{21} = 0, \\ &\text{termes en } u^2 : && a_{12}(1+\sigma) = 0, \text{ d'où } a_{12} = 0, \\ & && ba_{22} - 1 = 0, \text{ d'où } a_{22} = \frac{1}{b}, \\ &\text{termes en } \epsilon u : && b_{12}(1+\sigma) + \frac{1}{1+\sigma} = 0, \text{ d'où } b_{12} = -\frac{1}{(1+\sigma)^2}, \\ & && bb_{22} = 0, \text{ d'où } b_{22} = 0. \end{aligned} \tag{1.140}$$

Portant (1.140) dans (1.139) on obtient

$$v = h_1(u,\epsilon) = -\frac{1}{(1+\sigma)^2}u\epsilon + \cdots, \quad w = h_2(u,\epsilon) = \frac{1}{b}u^2 + \cdots. \tag{1.141}$$

Enfin, portant (1.141) dans (1.137), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= p(u), \quad p(u) = \frac{\sigma u}{1+\sigma}\left(\epsilon - \frac{1}{b}u^2 + \cdots\right). \\ \dot{\epsilon} &= 0. \end{aligned} \tag{1.142}$$

Pour $\epsilon < 0$, le seul point fixe de (1.142) est $u = 0$ qui est stable car $p_u(0) = \sigma\epsilon/(1+\sigma) < 0$. Pour $\epsilon > 0$, l'équation (1.142) possède trois points fixes :

$$u = 0, \quad u = \pm\sqrt{b\epsilon}.$$

L'étude du signe de p_u aux points fixes montre que $u = 0$ est instable, les deux autres points fixes sont stables. Le diagramme de bifurcation est représenté sur la figure 1.27 (voir aussi la figure 1.19). Nous verrons au chapitre suivant que c'est une *bifurcation fourche.*

Exemple 1.8.6 Considérons l'équation de Duffing quadratique [68] :

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = \beta u - u^2 - \delta v, \quad \delta > 0, \tag{1.143}$$

où β est le paramètre de bifurcation. La matrice jacobienne au point fixe $(u,v) = (0,0)$ et à $\beta = 0$ est :

$$D(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\delta \end{bmatrix}. \tag{1.144}$$

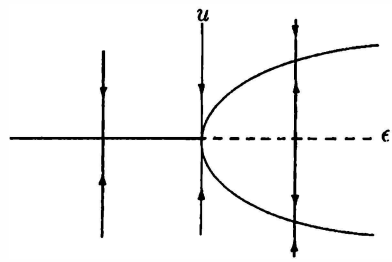


FIG. 1.27 – *Système de Lorenz: bifurcation fourche à* $r = 1$.

Ses valeurs propres et ses vecteurs propres sont $0, -\delta$ et

$$(1,0)^T, \quad (1,-\delta)^T$$

respectivement. Nous passons ensuite à la base des vecteurs propres en utilisant les transformations:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/\delta \\ 0 & -1/\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

(1.143) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} + \frac{\beta}{\delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} -(x+y)^2 \\ (x+y)^2 \end{pmatrix}, \\ \dot{\beta} &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\beta}{\delta}(x+y) - \frac{1}{\delta}(x+y)^2, \\ \dot{y} &= -\delta y - \frac{\beta}{\delta}(x+y) + \frac{1}{\delta}(x+y)^2, \\ \dot{\beta} &= 0. \end{aligned} \tag{1.145}$$

Nous cherchons une variété centrale de la forme:

$$y = h(x,\beta) = ax^2 + bx\beta + c\beta^2 + O(3), \tag{1.146}$$

où $O(3)$ désigne les termes d'ordre $x^3, x^2\beta, x\beta^2$, et β^3. L'équation (1.130) s'écrit ici:

$$\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\delta}(x+h) - \frac{1}{\delta}(x+h)^2\right) + \delta h + \frac{\beta}{\delta}(x+h) - \frac{1}{\delta}(x+h)^2 = 0.$$

Portant (1.146) dans cette dernière équation, nous obtenons:

$$\begin{aligned} (2ax^2 + b\beta \ + \ \cdots)\left(\frac{\beta}{\delta}(x+\cdots) - \cdots\right) + \delta(ax^2 + bx\beta + c\beta^2) \\ + \ \frac{\beta}{\delta}(x + ax^2 + bx\beta + c\beta^2) - \frac{1}{\delta}(x+\cdots)^2 = 0. \end{aligned}$$

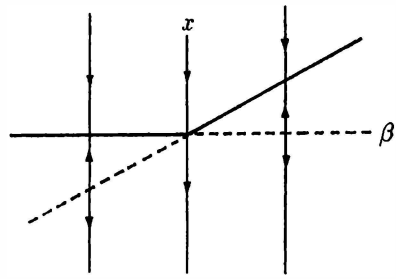


FIG. 1.28 – *Equation de Duffing : bifurcation transcritique à* $\beta = 0$.

Egalisant les coefficients de $x^2, x\beta$ et β^2 à zéro, on obtient :

$$a = 1/\delta^2, \quad b = -1/\delta^2, \quad c = 0.$$

On en déduit :

$$y = \frac{1}{\delta^2}(x^2 - \beta x) + O(3). \tag{1.147}$$

Portant (1.147) dans (1.145), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= q(x), \quad q(x) = \frac{1}{\delta}(\beta x - x^2) + O(3), \\ \dot{\beta} &= 0. \end{aligned} \tag{1.148}$$

Les points fixes de (1.148) sont $x = 0$, $x = \beta$, avec :
- pour $\beta < 0$: $q_x(0) < 0$, $q_x(\beta) > 0$,
- pour $\beta > 0$: $q_x(0) > 0$, $q_x(\beta) < 0$.

Il y a donc échange de stabilité. Nous verrons au chapitre suivant que c'est une bifurcation transcritique. La figure 1.28 donne le diagramme de bifurcation au voisinage de l'origine.

1.9 Formes normales

Pour compléter la théorie de la variété centrale nous exposons, dans ce paragraphe, la théorie de la forme normale permettant, par des transformations de coordonnées sur la variété centrale, de réduire le système (1.114) à une forme plus simple, ne contenant que des termes résonants, appelée forme normale. Pour simplifier la notation, nous ne mentionnons pas explicitement les paramètres qui se trouvent au second membre de (1.114).

1.9.1 Théorème de la forme normale

Ecrivons (1.114) sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad \text{avec } F(x) = f(x, h(x)) \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.149}$$

Soit H_k l'espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$x^k e_i \equiv (x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}) e_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \tag{1.150}$$

où $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est la base du système de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ecrivons maintenant (1.149) sous la forme d'un développement de Taylor à n variables autour de l'origine :

$$\dot{x} = Ax + F^{(2)}(x) + F^{(3)}(x) + \dots + F^{(k)}(x) + O(|x|^{k+1}). \tag{1.151}$$

Explicitement $F^{(k)}(x)$ est de la forme :

$$F^{(k)}(x) = (F_1^{(k)}, F_2^{(k)}, \dots, F_n^{(k)})^T \tag{1.152}$$

où $F_1^{(k)} \dots, F_n^{(k)}$ sont des polynômes homogènes de degré k en x. Posons $L = Ax$, alors L induit un endomorphisme, ad L: $H_k \to H_k$, défini par :

$$\text{ad } L(Y) = [Y, L] = (DL)Y - (DY)L, \text{ pour tout } Y(x) \in H_k \tag{1.153}$$

où, par définition, $DL = A$, $[A, B] = AB - BA$ est le crochet de Lie [134]. Dans le système de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, (1.153) s'écrira :

$$[Y, L]_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L_i}{\partial x_j} Y_j - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} L_j \right) \tag{1.154}$$

avec $L_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$. Soit G_k le sous-espace vectoriel supplémentaire de ad $L(H_k)$ dans H_k (c'est-à-dire : $H_k = \text{ad } L(H_k) \oplus G_k$), alors on a le théorème suivant.

Théorème 1.9.1 (Théorème de la forme normale) *[68] Il existe une suite de changements de coordonnées de la forme :*

$$x = y + P(y), \quad P(y) \in H_r, \quad r = 2, 3, \dots k \tag{1.155}$$

qui transforme le système (1.151) en la forme normale :

$$\dot{y} = Ay + g^{(2)}(y) + g^{(3)}(y) + \dots + g^{(k)}(y) + O(|y|^{k+1}) \tag{1.156}$$

où $g^{(i)} \in G_i$, $2 \leq i \leq k$.

Ce théorème s'appelle aussi théorème de Poincaré-Dulac. Explicitement $P(y)$ est de la forme :

$$P(y) = (P_1, P_2, \dots, P_n)^T \tag{1.157}$$

où $P_1 \dots, P_n$ sont des polynômes homogènes de degré r en y.

PREUVE : La démonstration consiste en la construction du n-vecteur $P(y)$ par récurrence. Supposons que l'on ait effectué $k-1$ changement de variables et qu'en conséquence, le système (1.151) s'écrit, à l'étape $k-1$:

$$\dot{x} = Ax + g^{(2)}(x) + g^{(3)}(x) + \dots + g^{(k-1)}(x) + F^{(k)}(x) + O(|x|^{k+1}) \tag{1.158}$$

avec $g^{(i)} \in G_i$ pour $2 \leq i \leq k-1$ et $F^{(k)}(x) \in H_k$. Introduisons le changement de coordonnées :

$$x = y + P(y), \quad P(y) \in H_k, \tag{1.159}$$

dans (1.158), il vient :

$$\begin{aligned}(I + DP(y))\dot{y} = A(y + P(y)) \;&+\; g^{(2)}(y) + g^{(3)}(y) + \cdots \\ &+\; g^{(k-1)}(y) + F^{(k)}(y) + O(|y|^{k+1}).\end{aligned}$$

D'où, en multipliant les deux membres par $I - DP(y)$:

$$\begin{aligned}\dot{y} = Ay \;&+\; g^{(2)}(y) + g^{(3)}(y) + \cdots + g^{(k-1)}(y) \\ &+\; F^{(k)}(y) + AP(y) - DP(y)Ay + O(|y|^{k+1}).\end{aligned}$$

Les termes de degré inférieur à k ne sont pas modifiés par cette transformation, alors que le terme de degré k s'écrit :

$$F^{(k)}(y) + DL(y)P(y) - DP(y)L(y) \equiv F^{(k)}(y) + \text{ad } L(P(y)) \tag{1.160}$$

où $L(y) = Ay$, $DL = A$ et $DP = \|\partial P_i/\partial y_j\|$.

Cherchons dans quelle condition (1.160) est nul, c'est-à-dire :

$$\text{ad } L(P(y)) = -F^{(k)}(y). \tag{1.161}$$

Nous rappelons que les deux membres de (1.161) sont des polynômes homogènes de degré k. Désignons par $M^{(k)}$ la matrice (ou la *représentation*) de ad L dans l'espace vectoriel H_k. Deux cas peuvent se présenter (Alternative de Fredholm) :

- ou bien la matrice $M^{(k)}$ est inversible ; dans ce cas (1.161)) détermine complètement $P(y)$ et $F^{(k)}$ est éliminé.
- ou bien $M^{(k)}$ n'est pas inversible ; dans ce cas soit G_k le noyau de $M^{(k)}$, on peut écrire $F^{(k)} = g^{(k)} + l^{(k)}$ avec $g^{(k)} \in G_k$, $l^{(k)} \in M^{(k)}(H_k)$ et $g^{(k)}$ ne peut être éliminé. En outre, $P(y)$ ne sera pas unique. □

Exemple 1.9.1 Considérons le système différentiel [163] :

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}F_1^{(2)}(x,y)\\ F_2^{(2)}(x,y)\end{pmatrix} + O(3) \tag{1.162}$$

avec

$$\begin{aligned}F_1^{(2)}(x,y) &= c_{120}x^2 + c_{111}xy + c_{102}y^2,\\ F_2^{(2)}(x,y) &= c_{220}x^2 + c_{211}xy + c_{202}y^2\end{aligned}$$

dans la base canonique

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.163}$$

a pour valeurs propres: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On en déduit une base de H_2:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour calculer ad $L(H_2)$, on calcule l'action de ad L sur chaque vecteur de base de H_2. D'où, d'après (1.153), avec

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},$$

on a:

$$\begin{aligned}
\text{ad } L \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\text{ad } L \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\text{ad } L \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\text{ad } L \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \\
\text{ad } L \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix}, \\
\text{ad } L \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On en déduit une base de ad $L(H_2)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ -y^2 \end{pmatrix} \right\},$$

d'où dim ad $L(H_2) = 4$. Comme dim $H_2 = 6$ et $H_2 = \text{ad } L(H_2) \oplus G_2$, on en déduit que dim $G_2 = 2$. Cependant le choix d'une base de G_2 n'est pas unique. En effet, écrivons la transformation (1.155) sous la forme:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1(u,v) \\ P_2(u,v) \end{pmatrix} \tag{1.164}$$

avec

$$\begin{aligned}
P_1(u,v) &= \alpha_{20}u^2 + \alpha_{11}uv + \alpha_{02}v^2, \\
P_2(u,v) &= \beta_{20}u^2 + \beta_{11}uv + \beta_{02}v^2.
\end{aligned}$$

Le premier membre de (1.160) s'écrit alors:

$$\begin{pmatrix} (c_{120} + \beta_{20})u^2 + (c_{111} + \beta_{11} - 2\alpha_{20})uv + (c_{102} + \beta_{02} + \alpha_{11})v^2 \\ c_{220}u^2 + (c_{211} - 2\beta_{20})uv + (c_{202} - \beta_{11})v^2 \end{pmatrix}. \tag{1.165}$$

On voit que (1.165) ne peut être éliminé totalement. On peut seulement le simplifier au maximum.

- Si l'on choisit :

$$2\beta_{20} = c_{211}, \quad \beta_{11} = c_{202}, \quad \beta_{11} - 2\alpha_{20} = -c_{111}, \quad \beta_{02} + \alpha_{11} = -c_{102},$$

(1.156) s'écrira alors (pour $k = 2$) :

$$\dot{u} = v + (\frac{1}{2}c_{211} + c_{120})u^2 + O(3), \quad \dot{v} = c_{220}u^2 + O(3).$$

C'est la forme normale de Takens [155]. Dans ce cas la base de G_2 est :

$$\left\{\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}\right\}.$$

- Si l'on choisit :

$$\beta_{20} = -c_{120}, \quad \beta_{11} = c_{202}, \quad \beta_{11} - 2\alpha_{20} = -c_{111}, \quad \beta_{02} + \alpha_{11} = -c_{102},$$

(1.156) s'écrira alors (pour $k = 2$) :

$$\dot{u} = v + O(3), \quad \dot{v} = c_{220}u^2 + (c_{211} + 2c_{120})uv + O(3).$$

C'est la forme normale de Bogdanov [15]. Dans ce cas la base de G_2 est :

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}\right\}.$$

Dans les deux cas la transformation (1.164) n'est pas unique car β_{02} et α_{02} sont arbitraires.

1.9.2 Utilisation de la base d'opérateurs $\partial/\partial x_i$

La variété centrale W^c est une variété différentiable de classe C^r, $r > 1$ et de dimension n. Son espace tangent en un point $x \in W^c$ aura pour base canonique [134] :

$$e_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dans cette base un vecteur (tangent) x s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et (1.153) devient :

$$\text{ad } L(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L_i}{\partial x_j}Y_j - \frac{\partial Y_i}{\partial x_j}L_j\right)\frac{\partial}{\partial x_i} \text{ pour tout } Y \in H_k. \tag{1.166}$$

Nous illustrons l'utilisation de cette notation par l'exemple suivant.

Exemple 1.9.2 Considérons le système différentiel [68] :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}. \tag{1.167}$$

On a ici :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \tag{1.168}$$

et

$$L = \omega\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1.169}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. L'action de ad L sur un vecteur

$$Y = Y_1\frac{\partial}{\partial x} + Y_2\frac{\partial}{\partial y}$$

de H_k s'écrit ici, d'après (1.166) :

$$\begin{aligned} \text{ad } L(Y) &= \omega\left(-Y_2 + y\frac{\partial Y_1}{\partial x} - x\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} \\ &+ \omega\left(Y_1 + y\frac{\partial Y_2}{\partial x} - x\frac{\partial Y_2}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{1.170}$$

L'espace vectoriel H_2 a pour base :

$$\left\{x^2\frac{\partial}{\partial x}, xy\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial y}\right\}. \tag{1.171}$$

L'action de ad L sur ces vecteurs de base s'écrit donc , d'après (1.170) :

$$\begin{aligned} \text{ad } L\left(x^2\frac{\partial}{\partial x}\right) &= 2\omega xy\frac{\partial}{\partial x} + \omega x^2\frac{\partial}{\partial y}, \\ \text{ad } L\left(xy\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \omega(y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial x} + \omega xy\frac{\partial}{\partial y}, \\ \text{ad } L\left(y^2\frac{\partial}{\partial x}\right) &= -2\omega xy\frac{\partial}{\partial x} + \omega y^2\frac{\partial}{\partial y}, \\ \text{ad } L\left(x^2\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\omega x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2\omega xy\frac{\partial}{\partial y}, \\ \text{ad } L\left(xy\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\omega xy\frac{\partial}{\partial x} + \omega(y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}, \\ \text{ad } L\left(y^2\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\omega y^2\frac{\partial}{\partial x} - 2\omega xy\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Les six vecteurs obtenus sont linéairement indépendants car la matrice de ad L dans la base (1.171) :

$$M^{(2)} = \omega\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est non-singulière (son déterminant est égal à $9\omega^6$). On a donc ad $L(H_2) = H_2$ et $G_2 = \{0\}$. Il n'y a donc pas de terme de degré 2 dans la forme normale de (1.167).

Cherchons maintenant les termes de degré 3. L'espace vectoriel H_3 a pour base :

$$\left\{x^3\frac{\partial}{\partial x}, x^2y\frac{\partial}{\partial x}, xy^2\frac{\partial}{\partial x}, y^3\frac{\partial}{\partial x}, x^3\frac{\partial}{\partial y}, x^2y\frac{\partial}{\partial y}, xy^2\frac{\partial}{\partial y}, y^3\frac{\partial}{\partial y}, \right\}. \tag{1.172}$$

On en déduit, d'après (1.170) :

$$\begin{aligned}
\text{ad } L\left(x^3\frac{\partial}{\partial x}\right) &= 3\omega x^2y\frac{\partial}{\partial x} + \omega x^3\frac{\partial}{\partial y} \equiv s_1,\\
\text{ad } L\left(x^2y\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \omega(2xy^2 - x^3)\frac{\partial}{\partial x} + \omega x^2y\frac{\partial}{\partial y} \equiv s_2,\\
\text{ad } L\left(xy^2\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \omega(y^3 - 2x^2y)\frac{\partial}{\partial x} + \omega xy^2\frac{\partial}{\partial y} \equiv s_3,\\
\text{ad } L\left(y^3\frac{\partial}{\partial x}\right) &= -3\omega xy^2\frac{\partial}{\partial x} + \omega y^3\frac{\partial}{\partial y} \equiv s_4,\\
\text{ad } L\left(x^3\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\omega x^3\frac{\partial}{\partial x} + 3\omega x^2y\frac{\partial}{\partial y} \equiv s_5,\\
\text{ad } L\left(x^2y\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\omega x^2y\frac{\partial}{\partial x} + \omega(2xy^2 - x^3)\frac{\partial}{\partial y} \equiv s_6,\\
\text{ad } L\left(xy^2\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\omega xy^2\frac{\partial}{\partial x} + \omega(y^3 - 2x^2y)\frac{\partial}{\partial y} \equiv s_7,\\
\text{ad } L\left(y^3\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\omega y^3\frac{\partial}{\partial x} - 3\omega xy^2\frac{\partial}{\partial y} \equiv s_8.
\end{aligned}$$

La matrice de ad L dans la base (1.172) est alors :

$$M^{(3)} = \omega\begin{bmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
3 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}.$$

On en déduit, par un calcul élémentaire, que $s_6 = -s_1 - s_3 - s_8$, $s_7 = s_2 + s_4 - s_5$ et que $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_8\}$ sont linéairement indépendants. L'espace supplémentaire G_3 est donc de dimension 2. Comme dans l'exemple précédent, le choix d'une base de G_3 n'est pas unique. Si l'on choisit comme base de G_3 les vecteurs :

$$\left\{(x^2+y^2)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad (x^2+y^2)\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\}, \tag{1.173}$$

le système (1.167) aura la forme normale suivante :

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -\omega v + (a_1u - b_1v)(u^2+v^2) + O(5),\\
\dot{v} &= \omega u + (a_1v + b_1u)(u^2+v^2) + O(5),
\end{aligned} \tag{1.174}$$

ou, en utilisant les coordonnées polaires $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a_1 r^3 + O(5), \\ \dot{\theta} &= \omega + b_1 r^2 + O(4). \end{aligned}$$

C'est la forme normale de la bifurcation de Hopf. Le choix de la base (1.173) est justifié par le fait que l'opérateur L de (1.169) est invariant par rapport au groupe des rotations et que les vecteurs de base (1.173) possèdent la même propriété.

1.9.3 Utilisation des coordonnées complexes

Le calcul précédent sera plus simple si l'on utilise les coordonnées complexes. En effet posons :

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy. \tag{1.175}$$

La transformation inverse de (1.175) est :

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

(1.167) peut alors s'écrire sous la forme

$$\dot{z} = i\omega z + F(z, \bar{z}). \tag{1.176}$$

Par rapport aux variables $z, \bar{z}$, la base canonique de l'espace tangent E^c sera :

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\}, \text{ avec } \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right); \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

On a ici :

$$A = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \text{ et } L = i\omega\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \tag{1.177}$$

L'action de ad L sur un vecteur

$$Y = Y_1\frac{\partial}{\partial z} + Y_2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

de H_k s'écrit ici, d'après (1.166) :

$$\begin{aligned} \text{ad } L(Y) &= i\omega\left(Y_1 - z\frac{\partial Y_1}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial Y_1}{\partial \bar{z}}\right)\frac{\partial}{\partial z} \\ &- i\omega\left(Y_2 + z\frac{\partial Y_2}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial Y_2}{\partial \bar{z}}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \tag{1.178}$$

L'espace vectoriel H_2 aura pour base :

$$\left\{z^2\frac{\partial}{\partial z}, z\bar{z}\frac{\partial}{\partial z}, \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}, z^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, z\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\}. \tag{1.179}$$

Par rapport à la base (1.179), la matrice de ad L sera diagonale. En effet, on a d'après (1.178),

$$\begin{aligned}
\text{ad } L\left(z^2\frac{\partial}{\partial z}\right) &= -i\omega z^2\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{ad } L\left(z\bar{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\omega z\bar{z}\frac{\partial}{\partial z},\\
\text{ad } L\left(\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}\right) &= 3i\omega\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{ad } L\left(z^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = -3i\omega z^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\\
\text{ad } L\left(z\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) &= -i\omega z\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \text{ad } L\left(\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = i\omega\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}},
\end{aligned}$$

d'où la matrice de ad L dans H_2 :

$$M^{(2)} = i\omega\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

et det $M^{(2)} = 9\omega^6$, comme dans le cas des variables réelles. Par conséquent, les termes de degré 2 de (1.176) peuvent être éliminés.

L'espace vectoriel H_3 a pour base :

$$\left\{z^3\frac{\partial}{\partial z}, z^2\bar{z}\frac{\partial}{\partial z}, z\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}, \bar{z}^3\frac{\partial}{\partial z}, z^3\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, z^2\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, z\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \bar{z}^3\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\}.$$

L'action de ad L sur ces vecteurs est, d'après (1.178),

$$\begin{aligned}
\text{ad } L\left(z^3\frac{\partial}{\partial z}\right) &= -2i\omega z^3\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{ad } L\left(z^2\bar{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0,\\
\text{ad } L\left(z\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}\right) &= 2i\omega\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{ad } L\left(\bar{z}^3\frac{\partial}{\partial z}\right) = 4i\omega\bar{z}^3\frac{\partial}{\partial z},\\
\text{ad } L\left(z^3\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) &= -4i\omega z^3\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \text{ad } L\left(z^2\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = -2i\omega z^2\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}},\\
\text{ad } L\left(z\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial z}\right) &= 0, \quad \text{ad } L\left(\bar{z}^3\frac{\partial}{\partial z}\right) = 2i\omega\bar{z}^3\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

On voit immédiatement que la matrice $M^{(3)}$:

$$M^{(3)} = i\omega\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

n'est pas inversible et que $G_3 \equiv \text{Ker } M^{(3)}$ est de dimension 2 et est engendré par les vecteurs

$$\left\{ z^2\bar{z}\frac{\partial}{\partial z}, z\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}.$$

Plus généralement, on a d'après (1.178) :

$$\begin{aligned} \text{ad } L\left(z^k\bar{z}^l\frac{\partial}{\partial z}\right) &= i\omega(1-k+l)z^k\bar{z}^l\frac{\partial}{\partial z}, \\ \text{ad } L\left(z^k\bar{z}^l\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) &= -i\omega(1+k-l)z^k\bar{z}^l\frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\text{ad } L\left(z^{l+1}\bar{z}^l\frac{\partial}{\partial z}\right) = \text{ad } L\left(z^l\bar{z}^{l+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = 0$$

et la matrice $M^{(2l+1)}$ sera non-inversible. G_{2l+1}=Ker $M^{(2l+1)}$ sera engendré par les vecteurs

$$\left\{ z^{l+1}\bar{z}^l\frac{\partial}{\partial z}, z^l\bar{z}^{l+1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}.$$

On en déduit qu'il existe une transformation :

$$z = \xi + \chi(\xi,\bar{\xi}), \quad \text{degré } \chi(\xi,\bar{\xi}) > 1$$

qui transforme (1.176) en :

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + c_1\xi^2\bar{\xi} + c_2\xi^3\bar{\xi}^2 + \cdots + c_l\xi^{l+1}\bar{\xi}^l + \cdots \tag{1.180}$$

avec $\lambda = i\omega$. A l'ordre 3, la formule (1.180) est identique à (1.174) avec $\xi = u + iv$, $c_1 = a_1 + ib_1$. La forme normale (1.180) est appelée forme normale de Poincaré [74] et joue un rôle fondamental dans l'étude de la bifurcation de Hopf (voir paragraphe 2.3.4).

Exemple 1.9.3 Considérons le système :

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x^2y - x, \tag{1.181}$$

(équation de van der Pol avec $\epsilon = 0$) [114]. Ce système a la forme (1.167) avec $\omega = -1$. (1.181) s'écrit, en posant $z = x + iy$,

$$\frac{dz}{dt} = -iz - (z^3 + z^2\bar{z} - z\bar{z}^2 - \bar{z}^3)/8. \tag{1.182}$$

Pour amener (1.182) à la forme normale (1.180), on effectue un changement de variables de la forme :

$$z = \xi + \alpha\xi^3 + \beta\xi^2\bar{\xi} + \gamma\xi\bar{\xi}^2 + \delta\bar{\xi}^3. \tag{1.183}$$

Portant (1.183) dans (1.182) et négligeant les termes d'ordre, ≥ 4 on obtient :

$$\begin{aligned}(1 \;+\; & 3\alpha\xi^2 + 2\beta\xi\bar{\xi} + \gamma\bar{\xi}^2)\frac{d\xi}{dt} + (\beta\xi^2 + 2\gamma\xi\bar{\xi} + 3\delta\bar{\xi}^2)\frac{d\bar{\xi}}{dt} \\ = \;& -i(\xi + \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \bar{\xi} + \gamma\xi\bar{\xi}^2 + \delta\bar{\xi}^3) \\ & -(\xi^3 + \xi^2\bar{\xi} - \xi\bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^3)/8.\end{aligned}$$

A l'ordre considéré, on peut simplement remplacer $d\bar{\xi}/dt$ par $i\bar{\xi}$ et isoler $d\xi/dt$ en multipliant les deux membres de cette équation par $1 - (3\alpha\xi^2 + 2\beta\xi\bar{\xi} + \gamma\bar{\xi}^2)$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} \;=\; & -i\xi + \left(2\alpha - \frac{1}{8}\right)\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^2\bar{\xi} \\ & -\left(2\gamma - \frac{1}{8}\right)\xi\bar{\xi}^2 - \left(4\delta - \frac{1}{8}\right)\bar{\xi}^3.\end{aligned}$$

Comme on s'y attendait, le terme en $\xi^2\bar{\xi}$ ne peut être éliminé. Au contraire, on peut choisir $\alpha = \gamma = 2\delta = 1/16$ de manière à éliminer les autres termes et on obtient :

$$\frac{d\xi}{dt} = -i\xi - \frac{1}{8}|\xi|^2\xi.$$

Comme prévu, le changement de variables (1.183) n'est pas unique car β reste arbitraire.

1.9.4 Résonance

Nous montrons ici comment trouver la forme normale d'un système d'équations différentielles par les valeurs propres de la matrice jacobienne. Pour commencer, cherchons la condition pour que $G_2 = G_3 = \cdots = \{0\}$ c'est-à-dire pour que la forme normale (1.156) soit un système linéaire : $\dot{y} = Ay$. Nous supposons que la matrice A possède n valeurs propres distinctes et soit e_i le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Supposons qu'une transformation (linéaire) de coordonnées sur la variété centrale ait été faite de façon que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soient les coordonnées par rapport à la base de vecteurs propres $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. La matrice A est donc diagonale dans cette base. La matrice de ad L dans H_k sera aussi diagonale et ses vecteurs propres sont $x^k e_i$ où l'on a posé (voir (1.150)) :

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \text{ avec } k_1 + k_2 + \cdots k_n = k \geq 2. \tag{1.184}$$

En effet, on a d'après (1.153) :

$$\text{ad } L(x^k e_i) = (DL)x^k e_i - D(x^k e_i)L \tag{1.185}$$

mais

$$D(x^k e_i)Ax = \sum_j \frac{k_j x^k}{x_j}\lambda_j x_j e_i = \sum_j k_j \lambda_j x^k e_i$$

et $Ax^k e_i = \lambda_i x^k e_i$; d'où d'après (1.185) :

$$\text{ad } L(x^k e_i) = (\lambda_i - \sum_{j=1}^{n} k_j \lambda_j) x^k e_i, \tag{1.186}$$

$x^k e_i$ est donc vecteur propre de ad L dans H_k correspondant à la valeur propre $\lambda_i - \sum_{j=1}^n k_j \lambda_j$. Si toutes les valeurs propres de ad L dans H_k sont non-nulles alors ad L est inversible et $G_k = \text{Ker (ad } L) = \{0\}$.

Définition 1.9.1 *Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont dites résonnantes d'ordre k s'il existe une valeur propre λ_i telle que :*

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n k_j \lambda_j, \quad \sum_{j=1}^n k_j = k \geq 2, \quad k_j \geq 0. \tag{1.187}$$

La relation (1.187) s'écrit aussi $\lambda_i = (k, \lambda)$. Si (1.187) est vérifié, les termes (1.184) sont appelés *termes résonnants*: ils ne peuvent être éliminés.

Exemple 1.9.4 La matrice A de (1.168) a pour valeurs propres $\lambda = i\omega$, $\bar{\lambda} = -i\omega$. Dans la base des vecteurs propres

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

la matrice A a la forme suivante :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} \text{ avec } P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

et les variables, dans la base des vecteurs propres, sont z, $\bar{z}$ (avec $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$). Il y a des résonances d'ordre $2l+1$, $l \geq 1$, car on peut écrire :

$$\lambda = (l+1)\lambda + l\bar{\lambda},$$

ou, en prenant le complexe conjugué,

$$\bar{\lambda} = (l+1)\bar{\lambda} + l\lambda.$$

Par contre, il n'y a pas de résonance d'ordre $2l$. Après un changement de variables :

$$z = \xi + \chi(\xi, \bar{\xi}), \qquad \text{degré } \chi(\xi, \bar{\xi}) > 1,$$

la forme normale s'écrit donc :

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + c_1\xi^2\bar{\xi} + c_2\xi^3\bar{\xi}^2 + \cdots + c_l\xi^{l+1}\bar{\xi}^l + \cdots$$

et on retrouve la forme normale de Poincaré (voir (1.180)).

Exemple 1.9.5 Considérons le système de Lorenz (1.54). Le système a une paire de points fixes (1.59). La bifurcation de Hopf se produit à

$$r = r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Effectuons le changement de variables :

$$u = x - x^*, \quad v = y - y^*, \quad w = z - z^*$$

pour amener le point fixe à l'origine. Nous obtenons le système :

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -uw \\ uv \end{bmatrix}, \quad x^* = \pm\sqrt{b(r_c - 1)}. \tag{1.188}$$

Les valeurs propres de la matrice de (1.188) sont données par (1.65). Les résonances

$$\lambda_i = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 \equiv (k, \lambda)$$

sont donc :

-pour $i = 1$: $k = (n+1, n, 0)$,
-pour $i = 2$: $k = (n, n+1, 0)$,
-pour $i = 3$: $k = (n, n, 1) \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

La forme normale du système de Lorenz au point $r = r_c$ à l'ordre n, est donc :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + c_1 y_2 y_1^2 + \cdots + c_n y_2^n y_1^{n+1}, \quad y_2 = \bar{y}_1, \\ \dot{y}_3 &= \lambda_3 y_3 + d_1(y_1 y_2) y_3 + \cdots + d_n (y_1 y_2)^n y_3, \end{aligned} \tag{1.189}$$

avec $c_n \in \mathbb{C}$, $d_n \in \mathbb{R}$. Nous verrons au chapitre suivant (voir l'exemple 2.4.2) comment on amène le système de Lorenz (1.188) à la forme normale (1.189).

On déduit du théorème de la forme normale le théorème suivant.

Théorème 1.9.2 (Poincaré) *Si les valeurs propres de A sont non-résonnantes alors l'équation,*

$$\dot{x} = Ax + F(x), \qquad \textit{degré } F(x) > 1, \tag{1.190}$$

peut être réduite à une équation linéaire, $\dot{y} = Ay$, par un changement de variables

$$x = y + P(y)$$

1.9.5 Orbites homocline et hétérocline

Soit $\bar{x}$ un point fixe, $W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$ est l'ensemble des trajectoires qui tendent vers $\bar{x}$ à la fois pour $t \to +\infty$ et pour $t \to -\infty$. Une trajectoire qui appartient à $W^s(\bar{x}) \cap W^u(\bar{x})$ est appelée *orbite homocline* (Cf. figure 1.29a). Soient $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, deux points d'équilibres instables, une trajectoire qui appartient à $W^s(\bar{x}_1) \cap W^u(\bar{x}_2)$ ou $W^s(\bar{x}_2) \cap W^u(\bar{x}_1)$ est appelée *orbite hétérocline* (Cf. figure 1.29b).

a) Orbites homoclines et hétéroclines dans un espace des phases à deux dimensions

On déduit du théorème de Poincaré-Bendixson que, dans un espace des phases à deux dimensions, les seuls attracteurs possibles sont :

a) les points fixes,

b) les cycles limites,

c) les orbites *hétéroclines* (trajectoires reliant deux points selles) ou *homoclines* (trajectoires reliant un point selle à lui même).

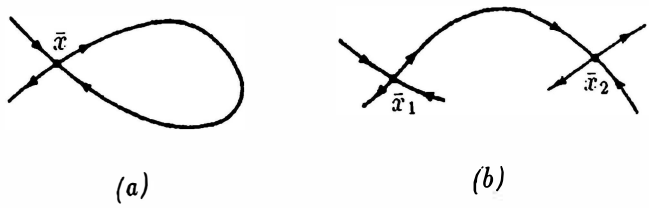


FIG. 1.29 – *(a) Orbite homocline. (b) Orbite hétérocline.*

Nous avons déjà vu les points fixes et les cycles limites, nous donnons ici quelques exemples d'orbites homoclines et hétéroclines.

Exemple 1.9.6 Dans l'exemple du pendule libre (Cf. fig. 1.9), les points selles ($x = \pm n\pi$, $y = 0$, n impair) correspondent à $E(x,y) = 2$. L'orbite correspondante est une orbite hétérocline (ou homocline si l'on suppose que tous les points $x = n\pi$, n impair, sont confondus).

Exemple 1.9.7 Considérons l'équation de Duffing [68] :

$$\ddot{x} - x + x^3 = 0$$

ou sous forme de système :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3. \tag{1.191}$$

C'est un système hamiltonien

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

avec

$$H(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

On a :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0$$

Les *courbes de niveau* $H(x,y) =$ Cte sont donc des courbes solution de (1.191). Un tel système est dit *intégrable* (Cf. Définition 1.7.2). Le système (1.191) a trois points fixes $(\pm 1, 0)$ et $(0,0)$ (obtenus en annulant les seconds membres de (1.191). L'analyse des équations linéarisées montre que les points fixes $(\pm 1, 0)$ sont des centres et $(0,0)$ est un point selle. Comme $H(0,0) = 0$, la courbe homocline Γ_0 est la courbe de niveau $H(x,y) = 0$. Elle passe par les points $(\pm\sqrt{2}, 0)$ et $(0,0)$ (voir figure 1.30).

Exemple 1.9.8 Considérons le hamiltonien [68], [145] :

$$H(x,y) = \frac{1}{6}(2y+1)(\sqrt{3}x - y + 1)(\sqrt{3}x + y - 1).$$

Le système hamiltonien s'écrit :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y + x^2 - y^2, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x(1+2y). \tag{1.192}$$

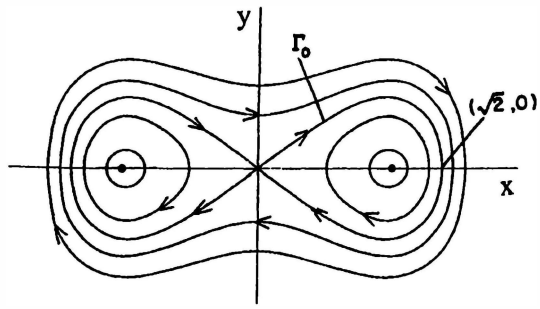


FIG. 1.30 – *Une orbite homocline* Γ_0. *D'après [68].*

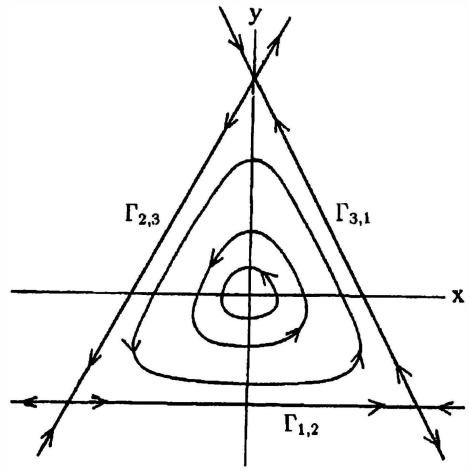


FIG. 1.31 – *Trois orbites hétéroclines* $\Gamma_{1,2}$, $\Gamma_{2,3}$ *et* $\Gamma_{3,1}$. *D'après [68].*

Le système (1.192) a quatre points fixes $(0,0)$, $(\pm\sqrt{3}/2,-1/2)$ et $(0,1)$. L'analyse des équations linéarisées montre que le point $(0,0)$ est un centre et que les points $(p_{1,2} = \pm\sqrt{3}/2,-1/2)$, $p_3 = (0,1)$ sont des points selles. Les courbes de niveau,

$$\frac{1}{6}(2y+1)(\sqrt{3}x - y + 1)(\sqrt{3}x + y - 1) = C,$$

sont des courbes solution de (1.192). Les courbes hétéroclines,

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} &: \quad 2y + 1 = 0, \\ \Gamma_{2,3} &: \quad \sqrt{3}x - y + 1 = 0, \\ \Gamma_{3,1} &: \quad \sqrt{3}x + y - 1 = 0, \end{aligned}$$

sont présentées sur la figure 1.31.

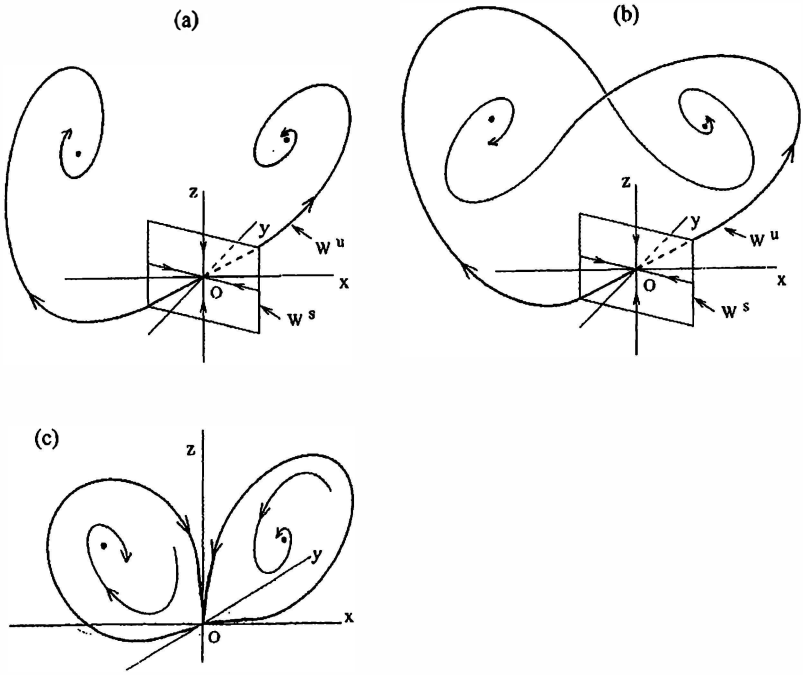


FIG. 1.32 – *Système de Lorenz: variété instable (W^u) à l'origine : a) $r < r' \approx 13.926...$ b) $r > r'$. c) $r = r'$ (courbe homocline). D'après [151].*

b) Orbites homoclines dans un espace des phases à trois dimensions

Exemple 1.9.9 Considérons le système de Lorenz (1.54) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz, \quad \sigma = 10, \quad b = 8/3. \end{aligned} \tag{1.193}$$

Nous avons vu au paragraphe 1.6.4 que pour,

$$r > 1 \text{ et } r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1},$$

l'origine est un point fixe instable car les valeurs propres de la matrice jacobienne à l'origine possède deux valeurs propres négatives et une valeur propre positive (Cf. Formule (1.57)). Par contre, les points fixes C et C' sont stables. La variété stable à l'origine $W^s(O)$ est une surface séparatrice séparant les bassins d'attraction des points fixes C et C'. La variété instable à l'origine $W^u(O)$, qui est une courbe, présente l'aspect de la figure 1.32. Pour $r < r' \approx 13.926...$, sa branche de droite tend vers C, sa branche de gauche tend vers C'. Pour $r > r'$, c'est le contraire qui se produit (figures 1.32a et b). Pour $r = r'$, les deux branches retournent à l'origine. La

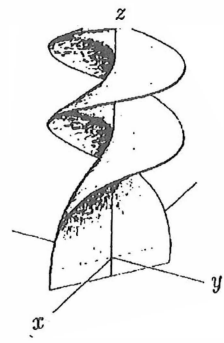


FIG. 1.33 – *Système de Lorenz: variété stable (W^s) à l'origine. D'après [96].*

variété instable $W^u(O)$ est alors une courbe homocline contenue dans $W^s(O)$ (figure 1.32c)[1]. Cette courbe homocline a été découverte en 1979 par Kaplan et Yorke [100]. Quant à la variété stable à l'origine $W^s(O)$, on ne connaît pas sa forme globale. On sait seulement qu'elle contient l'axe Oz et qu'au voisinage de l'origine elle a la forme d'une double hélice du côté z positif et aplatie du côté z négatif! (Cf. figure 1.33).

1.10 Programmes

Programme 1.1 *Programme écrit en Turbo Pascal.*

```
(*************** SYSTEME DE LORENZ   ********
dX/dt = s(-X+Y),
dY/dt = -XZ+rX-Y,
dZ/dt = XY-bZ        *********)

PROGRAM LORENZ;
uses
  Crt, Dos, Graph;
CONST MAX=3;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
var
  MaxX, MaxY   : word;
  ErrorCode    : integer;  { Reports any graphics errors }
var Y : vecteur;
    h,r,s,b,hx,hy : real ;
    k,l : integer ;
    i,Niter : longint ;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
    fs:text;
procedure Initialize;
{ Initialize graphics and report any errors that may occur }
var
```

1. Noter qu'à cause de l'unicité de la solution la courbe $W^u(O)$ ne peut couper $W^s(O)$

```
  GraphDriver : integer;  { The Graphics device driver }
  GraphMode   : integer;  { The Graphics mode value }
  ErrorCode   : integer;  { Reports any graphics errors }
begin
  GraphDriver := Detect;
  InitGraph(GraphDriver, GraphMode, '');
  ErrorCode := GraphResult;
  if ErrorCode <> grOk then
  begin
    Writeln('Graphics error: ', GraphErrorMsg(ErrorCode));
    Halt(1);
  end;
     setcolor(1) ;
  MaxX := GetMaxX;      { Get screen resolution values }
  MaxY := GetMaxY;
end; { Initialize }

PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
BEGIN
   YPRIME[1]:=s*(-Y[1]+Y[2]) ;
   YPRIME[2]:=-Y[1]*Y[3]+r*Y[1]-Y[2] ;
   YPRIME[3]:=Y[1]*Y[2]-b*Y[3] ;
END;

procedure RUNGE_KUTTA (Var Y : vecteur) ;
var k1,k2,k3,k4,Y1,YPRIME : vecteur ;
    j : integer ;
BEGIN
      Y1 := Y ;
      FCN(Y,YPRIME) ;
      k1 := YPRIME ;
      For j:=1 to MAX do
      Y[j] := Y1[j]+h*k1[j]/2 ;
      FCN(Y,YPRIME) ;
      k2 := YPRIME ;
      For j:=1 to MAX do
      Y[j] := Y1[j]+h*k2[j]/2 ;
      FCN(Y,YPRIME) ;
      k3 := YPRIME ;
      For j:=1 to MAX do
      Y[j] := Y1[j]+h*k3[j] ;
      FCN(Y,YPRIME);
      k4 := YPRIME ;
      For j:=1 to MAX do
      Y[j] := Y1[j] + h*(k1[j]+2*k2[j]+2*k3[j]+k4[j])/6 ;
END ;
BEGIN    (* Programme principal  *)
      Assign(fs,'lorenz.dat');
      rewrite(fs);
Initialize;
```

```
 r:=28.0 ; s:=10.0 ; b:=8.0/3.0 ;   h := 1.0e-03 ;
   Xmin:=-50.0;   Xmax:=50.0;   Ymin:=-50.0;   Ymax:=50.0;
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
   Y[1]:=0.0;Y[2]:=1.0;Y[3]:=0.0;
   k:=round((Y[1]-Xmin)/hx); l:=round((Y[2]-Ymin)/hy) ;
   moveto(k,maxY-l);
Niter:=150000 ;
   FOR i:=1 TO Niter DO
     BEGIN
      RUNGE_KUTTA(Y);
      k:=round((Y[1]-Xmin)/hx); l:=round((Y[2]-Ymin)/hy) ;
      lineto(k,maxY-l);
      writeln(fs,Y[1],' ',Y[2],' ',Y[3]);
     END;
     Close(fs);
OutTextXY(50,10, ' Modele de Lorenz : ');
  readln;  CloseGraph;
END.
```

Sur l'écran on obtient la projection de la trajectoire sur le plan (x, y) (pour quitter l'écran tapez une touche). La trajectoire est en suite tracée, en 3D, par GNUPLOT. Le résultat est présenté sur la figure 1.20.

Programme 1.2 *Programme écrit en Turbo Pascal.*

```
(*************** EQUATION DE DUFFING :   ********/
                    dX1/dt = X2
                    dX2/dt = -k0*X2 -X1*X1*X1 + B*cos X3
                    dX3/dt = a   ****************)
PROGRAM Duffing;

USES dos,crt,graph;
CONST MAX=3;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
var Y : vecteur;
    dZ,h,a,k0,B,hx,hy : real ;
    k,l : integer;
    i,N : longint ;
    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
BEGIN
   YPRIME[1]:= Y[2] ;
   YPRIME[2]:= -k0*Y[2]-Y[1]*Y[1]*Y[1]+B*cos(Y[3]) ;
   YPRIME[3]:= a ;
END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
clrScr;
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
```

```
   Initialize;
   Xmin:=-5.0;   Xmax:=5.0; Ymin:=-10.0;   Ymax:=10.0;
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
k0:=0.05; B:=7.5 ; N:=100000 ; a:=1.0 ; h:=0.001 ;
Y[1]:=3.0;Y[2]:=4.0;Y[3]:=0.0;
     k:=round((Y[1]-Xmin)/hx); l:=round((Y[2]-Ymin)/hy) ;
     moveto(k,maxY-l);
FOR i:=1 TO N DO
   BEGIN
{Prendre la procedure RUNGE-KUTTA du  programme 1.1}
     RUNGE_KUTTA(Y);
     k:=round((Y[1]-Xmin)/hx); l:=round((Y[2]-Ymin)/hy) ;
     lineto(k,maxY-l);
   END;
 OutTextXY(50,10, ' Equation de Duffing  ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Pour quitter l'écran appuyez sur ENTER. Les résultats du programme sont présentés sur la figure 1.17 (dessinée par le programme de tracé GNUPLOT).

Programme 1.3 *Programme écrit en Turbo Pascal.*

```
(*************** DYNAMIQUE DES PENDULES   ********/
dX/dt = Y
dY/dt = -gamma*Y -sin(X) + A*cos(Z)
dZ/dt =w           ***************************)
PROGRAM pendule;
USES dos,crt,graph;
CONST MAX=3;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
var
    YO : vecteur;
    j,k,l : integer;
    t,h,w,A,gamma,hx,hy : real ;
    N,i : longint ;
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
BEGIN
   YPRIME[1]:= Y[2] ;
   YPRIME[2]:= -gamma*Y[2]-sin(Y[1]) + A*cos(Y[3]);
   YPRIME[3]:= w ;
END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
clrScr;
gamma:=0.5; w := 2/3;
(* Periodique a A=0.9, Doublement de periode a A=1.07,
Chaos a A=1.15  *)
```

```
 Writeln(' Entrez la valeur de A, valeur de depart 0.9 : ');
 Readln(A);
 (* Valeurs initiales : *)
 (*  A=0.9 :  Y0[1]:=0.0;Y0[2]:=1.5; Y0[3]:=0.0; *)
 (*  A=1.07 et A=1.15 : Y0[1]:=-2.0;Y0[2]:=0.0;Y0[3]:=0.0; *)
 Writeln('Entrez les valeurs initiales x(0), y(0), z(0),
                                valeurs de depart 0 1.5 0 : ');
 Readln(Y0[1],Y0[2],Y0[3]);
 h := 1.0E-3 ; t:=0.0;
 writeln;writeln; writeln('    UN INSTANT..... ');
    FOR i:=1 TO 30500 DO
 {Prendre la procedure RUNGE_KUTTA du  programme 1.1}
     BEGIN
       RUNGE_KUTTA(Y0);
         If Abs(Y0[1]) > Pi then
         Y0[1]:=Y0[1] - 2*Pi*Y0[1]/Abs(Y0[1]);
       t:=t+h;
      END;
 (* Periodique :  *)
 N:=30000;
 (* Chaotique :
 N:=500000;     *)
 {Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
    Initialize;
    Xmin:=-Pi;   Xmax:=Pi;
    Ymin:=-4.0;   Ymax:=4.0;
    hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;
    hy:=(Ymax-Ymin)/maxY;
    FOR i:=1 TO N DO
     BEGIN
       RUNGE_KUTTA(Y0);
         If Abs(Y0[1]) > Pi then
         Y0[1]:=Y0[1] - 2*Pi*Y0[1]/Abs(Y0[1]);
       t:=t+h;
       For j:=1 to MAX do
       Begin
        k:=round((Y0[1]-Xmin)/hx);
        l:=round((Y0[2]-Ymin)/hy) ;
        Putpixel(k,maxY-l,4);
       End;
      END;
 OutTextXY(50,10, ' Dynamique des Pendules : ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Pour quitter l'écran appuyez sur ENTER. Les résultats du programme sont présentés sur la figure 1.18 (dessinée par le programme de tracé GNUPLOT).

1.11 Exercices

(Les réponses sont données à l'Annexe A)

Exercice 1.1 Considérons les équations de Lotka-Volterra, dites aussi équations de Prédateur-Proie, [17], [104]:

$$\dot{x} = x(a - \alpha y), \quad \dot{y} = y(\gamma x - c), \quad a, c, \alpha, \gamma, x, y > 0. \tag{1.194}$$

Dans ces équations, x représente la population des proies, y celle des prédateurs, a et c sont respectivement le taux de croissance des proies et le taux de mortalité des prédateurs. En l'absence des prédateurs, $(y = 0)$, la population des proies croît $(\dot{x} = ax > 0)$. En l'absence des proies, $(x = 0)$, la population des prédateurs se meurt $(\dot{y} = -cy < 0)$. α et γ mesurent les intéractions entre les deux espèces.

a) Etudier la stabilité locale au voisinage des points fixes de (1.194).

b) Montrer qu'en éliminant y de (1.194), on obtient une équation de la forme:

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = 0.$$

Trouver une intégrale première pour cette équation.

c) Dessiner les portraits des phases pour: $a = 2$, $\alpha = 1$, $c = 3$, $\gamma = 1$.

Exercice 1.2 Soit le système [133]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y + yz, \\ \dot{y} &= x - xz, \\ \dot{z} &= xy. \end{aligned} \tag{1.195}$$

a) De quel type est le point fixe $(x, y, z) = (0, 0, 0)$?

b) En utilisant une fonction de Lyapunov du type,

$$V(x, y, z) = a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2, \tag{1.196}$$

montrer qu'il est stable. En déduire que les trajectoires du système (1.195) sont sur des ellipsoïdes.

Exercice 1.3 On considère l'oscillateur glycolytique [152]:

$$\dot{x} = -x + ay + x^2 y, \quad \dot{y} = b - ay - x^2 y \quad a, b > 0. \tag{1.197}$$

(On le rencontre dans un processus biochimique, appelé *glycolyse* dans lequel les cellules vivantes transforment le sucre en énergie).

a) Tracer les courbes $y = x/(a + x^2)$ et $y = b/(a + x^2)$. En déduire que le système (1.197) possède un point fixe unique.

b) Soit $C = b^4 + (2a - 1)b^2 + a + a^2$. Montrer que le point fixe est stable pour $C > 0$ et instable pour $C < 0$. En déduire que si $C < 0$, le système (1.197) possède un cycle limite.

Exercice 1.4 On considère le système suivant [63] :

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = -y - x^2. \tag{1.198}$$

1) De quel type est le point fixe $(0,0)$?

2) Calculer la variété centrale $y = h(x)$ au voisinage de $(0,0)$ jusqu'à l'ordre 5. Est-elle unique ? Indiquer le sens du mouvement sur la variété centrale par des flèches.

Exercice 1.5 Points fixes à l'infini. On considère le système suivant [133] :

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y) \tag{1.199}$$

où $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sont des polynômes en x et y. Pour étudier les trajectoires de (1.199) à l'infini, on utilise la sphère de Poincaré où l'on projette le centre d'une sphère,

$$S^2 = \{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 | X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\},$$

sur le plan (x,y) tangent à S^2 en son pôle nord (Cf. figure 1.34).

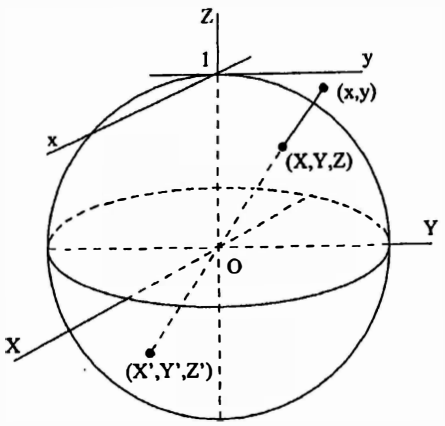


FIG. 1.34 – *La sphère de Poincaré. D'après [133]*

1) Montrer que la transformation $T : S^2 \to \mathbb{R}^2$ ainsi définie s'écrit :

$$T : x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}. \tag{1.200}$$

Calculer $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$.

2) Soit m le degré maximum de $P(x,y)$ et $Q(x,y)$. Montrer que (1.199) s'écrit en coordonnées (X,Y,Z) :

$$\begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ X & Y & Z \\ P^* & Q^* & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.201}$$

avec $P^*(X,Y,Z) = Z^m P(X/Z, Y/Z)$, $Q^*(X,Y,Z) = Z^m Q(X/Z, Y/Z)$.

3) On pose :

$$\begin{aligned} P(x,y) &= P_1(x,y) + \ldots + P_m(x,y), \\ Q(x,y) &= Q_1(x,y) + \ldots + Q_m(x,y) \end{aligned}$$

où P_j et Q_j sont des polynômes homogènes de degré j en x et y. Montrer que les points fixes à l'infini sont définis par $Z = 0$, $X^2 + Y^2 = 1$ et

$$XQ_m(X,Y) - YP_m(X,Y) = 0,$$

ou, en posant $X = \cos\theta$, $Y = \sin\theta$,

$$\sin\theta P_m(\cos\theta, \sin\theta) - \cos\theta Q_m(\cos\theta, \sin\theta) = 0.$$

Application : $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$.

Exercice 1.6 On considère le hamiltonien suivant (Treillis de Toda [158]) :

$$H(P,Q) = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + e^{-(Q_2-Q_1)} + e^{-(Q_3-Q_2)} + e^{-(Q_1-Q_3)} \tag{1.202}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$H(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3} P_n^2 + \sum_{n=1}^{3} e^{-(Q_n-Q_{n-1})} \tag{1.203}$$

en posant $Q_0 \equiv Q_3$.

a) Ecrire le système d'équations hamiltoniennes et montrer qu'il est intégrable.

b) On pose :

$$a_n = \frac{1}{2}e^{-(Q_{n+1}-Q_n)/2}, \quad b_n = \frac{1}{2}P_n.$$

Ecrire les équations du mouvement pour les a_n, b_n.

c) On cherche une solution dite solitaire (ou un soliton) de la forme :

$$Q_n = \log\frac{1 + k_{n-1}e^{2\beta t}}{1 + k_n e^{2\beta t}}, \quad \beta, k_n = \text{Ctes}.$$

Calculer β et k_n.

Exercice 1.7 On considère le système suivant [128] :

$$\dot{x} = \alpha(y - g(x)), \quad \dot{y} = x - y + z, \quad \dot{z} = -\beta y - \gamma z, \tag{1.204}$$

α, β et γ sont des paramètres réels. On prend ici $g(x) = ax^3 + cx$ [91]. Le système (1.204) possède trois points fixes : l'origine O et deux autres points fixes qu'on désigne par P^+ et P^-.

1) Calculer les coordonnées de $P^\pm$ ainsi que les matrices jacobiennes M_O et $M_{P^\pm}$.

2) a) Trouver les conditions pour que l'une des valeurs propres soit nulle.

b) On considère le cas où les matrices M_O et $M_{P^\pm}$ possèdent une valeur propre réelle ρ et deux valeurs propres complexes conjuguées $\sigma \pm i\omega$. Ecrire les systèmes donnant ρ, σ et ω.

3) Applications. On donne :
a) $\alpha = 25/3$, $\beta = 16$, $\gamma = 0$, $a = 1$, $c = -0.143$;
b) $\alpha = 3.7593985$, $\beta = 24.0963855$, $\gamma = -0.860241$, $a = 1$, $c = -2$.

Calculer, dans ces deux cas, les valeurs propres des matrices M_O et $M_{P^\pm}$. En déduire la stabilité des points d'équilibre O, $P^\pm$. Ecrire un programme Turbo-Pascal pour résoudre (1.204) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Exercice 1.8 On considère le système suivant (circuit de Chua) [118] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - f(x)), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \tag{1.205}$$

avec $f(x) = bx + 0.5(a-b)(|x+1| - |x-1|)$. On suppose que $a = -8/7$, $b = -5/7$, $\beta = 100/7$ et $\alpha > 0$ (paramètre de bifurcation). Trouver les points fixes du système (1.205) et étudier leur stabilité.

Exercice 1.9 [115] 1) Trouver la forme normale du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 \\ a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{pmatrix} + O(3) \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R} \tag{1.206}$$

Examiner les cas résonnants a) $s_1 = s_2 = 0$, b) $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$, c) $s_1 = 2s_2 \neq 0$.

2) Trouver la forme normale du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 \\ a_{20}x_1^2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \end{pmatrix} + O(3) \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R} \tag{1.207}$$

3) Trouver la forme normale du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{10}x_1^3 + a_{11}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{13}x_2^3 \\ a_{20}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{22}x_1x_2^2 + a_{23}x_2^3 \end{pmatrix} + O(4) \tag{1.208}$$

$s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Examiner les cas résonnants $s_2 = 3s_1$ et $s_1 = -s_2 = s$

Exercice 1.10 Trouver la forme normale de

$$\dot{x} = -\omega y + f(x,y,z), \quad \dot{y} = \omega x + g(x,y,z), \quad \dot{z} = h(x,y,z), \tag{1.209}$$

où f, g et h sont $O(2)$ [165].

Chapitre 2

Bifurcations locales et catastrophes

La première partie de ce chapitre est consacrée aux bifurcations locales d'un système d'équations différentielles. Après avoir défini la notion de bifurcation d'un système dynamique et sa codimension ainsi que l'ensemble catastrophe de ses paramètres, nous définissons, à partir de l'équation de la variété centrale, les quatre bifurcations de codimension 1 : noeud-col, transcritique, fourche et de Hopf. Nous étudions la stabilité des points fixes au voisinage des points de bifurcation. Les notions de sur- et sous-criticité sont introduites pour les bifurcations fourche et de Hopf. L'algorithme de Hassard, Kazarinoff et Wan calcule le premier coefficient de la forme normale de Poincaré de la bifurcation de Hopf : sa partie réelle permet d'évaluer le rayon de l'orbite périodique naissant au point de bifurcation, le signe de la partie réelle détermine le caractère sur- ou sous-critique de la bifurcation. Le calcul est illustré sur deux systèmes de dimension 3 : le système de Belousov-Zhabotinski et le système de Lorenz, ainsi que sur le système de dimension 2 du Bruxellateur. L'étude du système de Rössler constitue une introduction aux bifurcations de codimension 2, certes plus riches, mais beaucoup plus complexes.

Ce chapitre traite également des systèmes gradients. Le théorème de Thom classe les catastrophes de tous les systèmes gradients de codimension inférieure ou égale à 4. Nous exposons ces 7 catastrophes élémentaires aux noms poétiques : pli, fronce, queue d'aronde, papillon, ombilics elliptique, parabolique et hyperbolique.

Le chapitre se termine par les programmes et exercices s'y rapportant.

2.1 Stabilité structurelle et codimension

Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement du type topologique de la trajectoire d'un système dynamique lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont elle dépend varient. C'est une notion très importante en mécanique où l'étude de systèmes d'équations non-linéaires en fonction de paramètres caractéristiques est classique. Le simple pendule entretenu présente des comportements différents suivant les valeurs des paramètres d'entretien et d'amortissement. Mathématiquement, il y a bifurcation lorsque les portraits des phases ne sont plus homéomorphes. Illustrons quelque peu cette notion. Considérons un phénomène physique

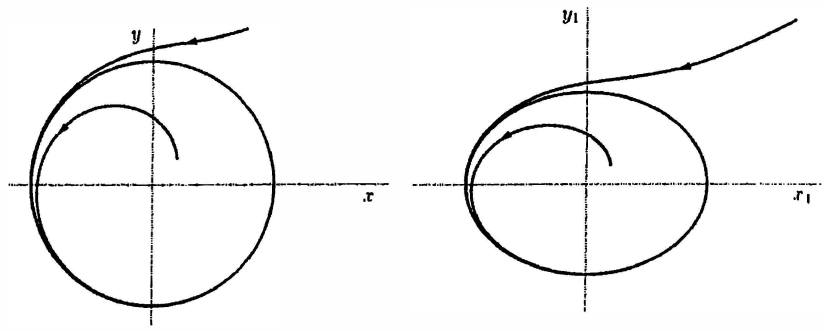


FIG. 2.1 – *L'équivalence topologique.*

régi par le système paramétré :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\nu), \tag{2.1}$$

avec $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $\nu \in D \subset \mathbb{R}^p$, $f \in C^r$. Dans le cas de l'oscillateur amorti et forcé (équation (1.15)) $p = 2$, dans le cas du système de Lorenz (équations (1.48)) $p = 3$. Un point $\nu \in D$ est dit *structurellement stable* s'il existe un voisinage W de ν tel que, pour tout $\nu' \in W$, il existe un homéomorphisme[1] qui applique les trajectoires du système

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\nu'), \tag{2.2}$$

sur celles du système (2.1) et qui préserve la direction du temps (on dit aussi que les deux systèmes sont *topologiquement équivalents*, Cf. fig. 2.1)). Dans le cas contraire, on dit que ν est un *point de bifurcation.* Si l'ensemble des points de bifurcation est défini par k conditions :

$$b_1(\nu) = b_2(\nu) = \cdots = b_k(\nu) = 0, \quad 1 \leq k \leq p, \tag{2.3}$$

la bifurcation est de *codimension* k. L'ensemble des points de bifurcation est alors une variété V_{p-k} de dimension $p - k$ dans $\mathbb{R}^p$, appelée *ensemble de bifurcations* (voir l'exemple 2.2.1). Dans le cas d'une bifurcation de codimension k, on appelle *déploiement universel* ou simplement *déploiement* (unfolding en anglais) ou équation générique, une forme normale de (2.1) :

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\mu,a), \quad \mu \in \mathbb{R}^k, \quad a \in \mathbb{R}^{p-k} \tag{2.4}$$

où les conditions (2.3) sont simplement

$$\mu = 0, \tag{2.5}$$

le paramètre a n'ayant aucune influence sur la bifurcation (voir par exemple le paragraphe 2.5). La codimension d'une bifurcation est donc la plus petite dimension

1. Un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application continue ayant une application inverse continue.

de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation de façon persistante [68]. Dans ce chapitre, nous ne nous intéressons qu'aux bifurcations dites locales, c'est-à-dire au comportement de la trajectoire dans le voisinage d'un point fixe, là où les développements en série de Taylor sont applicables.

2.2 L'ensemble catastrophe

Soit $x_0(\nu_0)$, un point fixe de (2.1) pour une certaine valeur ν_0, c'est-à-dire, (x_0, ν_0) est solution de l'équation :

$$f(x, \nu) = 0. \tag{2.6}$$

Si :

$$\det \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| (x_0, \nu_0) \neq 0, \tag{2.7}$$

le théorème des fonctions implicites garantit, dans le voisinage de x_0, une solution unique $x = x(\nu)$ de classe C^r avec $x(\nu_0) = x_0$. Dans ce cas, le point $\nu = \nu_0$ est structurellement stable.

Si :

$$\det \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| (x_0, \nu_0) = 0, \tag{2.8}$$

le point ν_0 est appelé *point catastrophe*. L'ensemble $K \subset \mathbb{R}^p$ des points catastrophes ν_0 s'appelle *l'ensemble catastrophe*. L'ensemble catastrophe est donc un ensemble de bifurcations.

Exemple 2.2.1 Considérons le système suivant [92] :

$$\dot{x} = y - x^2, \quad \dot{y} = ax + b - y. \tag{2.9}$$

Les points fixes (x_0, y_0) du système sont les intersections de la parabole

$$y = x^2, \tag{2.10}$$

avec la droite

$$y = ax + b. \tag{2.11}$$

Si $a^2 + 4b > 0$, on aura deux points fixes :

$$x_0 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}, \quad y_0 = x_0^2 \tag{2.12}$$

L'équation (2.8) s'écrit ici :

$$\begin{vmatrix} -2x_0 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.13}$$

Eliminant x_0 entre (2.12) et (2.13), on obtient :

$$a^2 + 4b = 0. \tag{2.14}$$

On en déduit que l'ensemble K des points catastrophes est la parabole $b = -a^2/4$. La signification de cet ensemble K est la suivante. Pour $a^2 + 4b < 0$ (région I de la figure 2.2), l'intersection de la parabole (2.10) et de la droite (2.11) est vide : il n'y a pas de point fixe. Pour $a^2 + 4b > 0$ (région II de la figure 2.2), il y a deux points fixes (un point selle et un nœud). Donc, quand on passe de la région I à la région II, les trajectoires ne sont plus du même type. Les points catastrophes correspondent à une relation entre les paramètres a et b : il s'agit donc de bifurcations de codimension 1 (les conditions (2.3) se réduisent ici à une seule équation (2.14)). Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette bifurcation est une bifurcation nœud-col.

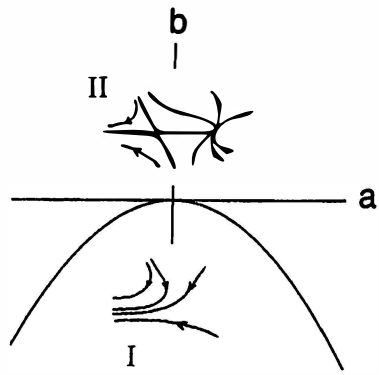


FIG. 2.2 – *L'ensemble catastrophe de l'exemple 2.2.1.*

2.3 Bifurcations de codimension un

Dans ce paragraphe, nous étudierons les quatre bifurcations de codimension un : bifurcation nœud-col, bifurcation transcritique, bifurcation fourche et bifurcation de Hopf.

Considérons un système dynamique dépendant d'un paramètre réel μ, à une dimension :

$$\frac{du}{dt} = f(u, \mu), \quad u \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in I \subset \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Nous supposons que $u = 0$ est un point stationnaire et qu'à $\mu = 0$, la matrice jacobienne,

$$J = \left\| \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial u_j} \right\|,$$

possède quelques valeurs propres avec partie réelle nulle. Le théorème de la variété centrale implique que l'on peut choisir les coordonnées $(x, y, z) \in W^c \times W^s \times W^u$

dans les espaces propres de J telles que:

$$\begin{aligned} E^c(0) &= \{(x,y,z)|y=z=0\}, \\ E^s(0) &= \{(x,y,z)|x=z=0\}, \\ E^u(0) &= \{(x,y,z)|x=y=0\}. \end{aligned}$$

Dans ce système de coordonnées, l'équation (2.15) devient:

$$\frac{dx}{dt} = A(\mu)x + f_1(x,y,z,\mu), \tag{2.16}$$

$$\frac{dy}{dt} = B(\mu)y + f_2(x,y,z,\mu), \tag{2.17}$$

$$\frac{dz}{dt} = C(\mu)z + f_3(x,y,z,\mu), \tag{2.18}$$

où f_1, f_2, f_3 sont des termes non-linéaires, Pour décrire la dynamique du système au voisinage de $(x,y,z,\mu) = (0,0,0,0)$, on ajoute à (2.16) l'équation triviale

$$\dot{\mu} = 0. \tag{2.19}$$

Pour trouver la variété centrale du système généralisé (2.16)-(2.19), on procède comme dans (1.129)-(1.131); on pose:

$$y = h_s(x,\mu), \quad z = h_u(x,\mu), \tag{2.20}$$

où $h_s(x,\mu)$ et $h_u(x,\mu)$ sont solutions du système:

$$\begin{aligned} &Dh_s(x,\mu)[A(\mu)x + f_1(x,h_s(x,\mu),h_u(x,\mu),\mu)] = \\ &B(\mu)h_s(x,\mu) + f_2(x,h_s(x,\mu),h_u(x,\mu),\mu), \\ &Dh_u(x,\mu)[A(\mu)x + f_1(x,h_s(x,\mu),h_u(x,\mu),\mu)] = \\ &C(\mu)h_u(x,\mu) + f_3(x,h_s(x,\mu),h_u(x,\mu),\mu). \end{aligned}$$

Portant (2.20), avec $h_s(x,\mu)$ et $h_u(x,\mu)$ calculés par des développements limités, dans (2.16), on obtient le système suivant:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\mu)x + f_1(x,h_s(x,\mu),h_u(x,\mu),\mu) = G(x,\mu), \\ \dot{\mu} &= 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Si la matrice J a une valeur propre nulle, les autres valeurs propres ayant leur partie réelle $\neq 0$, on a dim $E^c(0) = 1$ et $x, A(\mu) \in \mathbb{R}$. Au système (2.21), il convient d'ajouter les conditions:

$$G(0,0) = G_x(0,0) = 0, \tag{2.22}$$

qui expriment que la variété centrale (ici une courbe) est tangente à l'axe des x à l'origine. Ecrivons la première équation de (2.21) sous la forme d'un développement de Taylor autour de $(x,\mu) = (0,0)$. En tenant compte de (2.22), nous obtenons:

$$\dot{x} = G(x,\mu) = G_\mu\mu + \frac{1}{2}(G_{xx}x^2 + 2G_{x\mu}\mu x + G_{\mu\mu}\mu^2) + O(3) \tag{2.23}$$

où les dérivées partielles sont évaluées au point $(x, \mu) = (0, 0)$. Suivant les conditions sur les dérivées partielles de $G(x, \mu)$, on aura une bifurcation nœud-col, une bifurcation transcritique ou une bifurcation fourche.

Remarque 2.3.1 Comme la matrice jacobienne J de (2.15) possède une valeur propre nulle, on a :

$$\det J = 0. \tag{2.24}$$

Ici l'ensemble de bifurcation se réduit à un point, $\mu = 0$, dans l'espace des paramètres à une dimension. Il s'agit donc d'une bifurcation de codimension un.

2.3.1 Bifurcation nœud-col

Sous les hypothèses (2.22), on a une bifurcation *nœud-col* (*saddle-node* en anglais) si les conditions suivantes sont satisfaites [63] :

$$G_\mu \neq 0, \quad G_{xx} \neq 0. \tag{2.25}$$

Les points fixes de (2.23) sont alors approximativement :

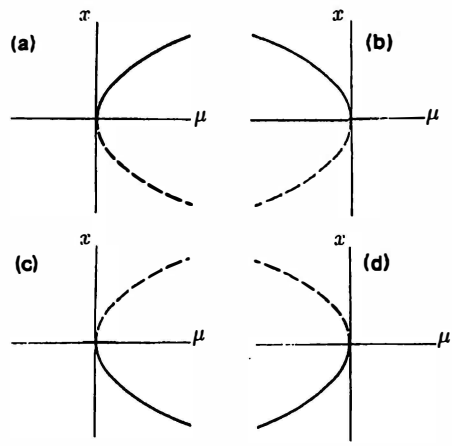


FIG. 2.3 – *Bifurcation nœud-col : diagrammes de bifurcation.*

$$x_\pm \sim \frac{-G_{\mu x}\mu \pm \sqrt{G_{\mu x}^2\mu^2 - (2G_\mu\mu + G_{\mu\mu}\mu^2)G_{xx}}}{G_{xx}} \sim \pm\sqrt{\frac{-2G_\mu\mu}{G_{xx}}}. \tag{2.26}$$

On en déduit que :

- si $G_\mu G_{xx} < 0$, on a 2 points fixes si $\mu > 0$ et 0 point fixe si $\mu < 0$,
- si $G_\mu G_{xx} > 0$, on a 2 points fixes si $\mu < 0$ et 0 point fixe si $\mu > 0$.

Etudions maintenant la stabilité de ces points fixes. Pour l'équation (2.23), la matrice jacobienne est simplement la dérivée du second membre :

$$DG(x, \mu) = G_{xx}x + G_{\mu x}\mu + O(2). \tag{2.27}$$

Pour $\mu \to 0$, le terme dominant du second membre de (2.27) est $G_{xx}x$. Par conséquent, si $G_{xx} < 0$, le point x_+ est stable, le point x_- est instable; si $G_{xx} > 0$, c'est l'inverse.

Les diagrammes de bifurcation au voisinage de $(\mu, x) = (0,0)$ sont présentés sur la figure 2.3 avec: a) $G_\mu > 0$, $G_{xx} < 0$; b) $G_\mu < 0$, $G_{xx} < 0$; c) $G_\mu < 0$, $G_{xx} > 0$; d) $G_\mu > 0$, $G_{xx} > 0$.

Exemple 2.3.1 L'équation générique d'une bifurcation nœud-col est:

$$\dot{x} = f(x) \equiv \mu - x^2 \tag{2.28}$$

dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre nulle. Dans les autres directions, le comportement sera hyperbolique.

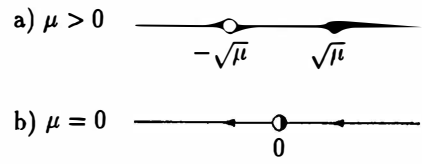


FIG. 2.4 – *Bifurcation nœud-col: $\dot{x} = \mu - x^2$.*

Si $\mu \geq 0$, il y a deux points fixes $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$. Les conditions (2.22) s'écrivent ici:

$$\mu_0 - x^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0) = -2x_0 = 0, \quad \text{donc } x_0 = 0, \quad \mu_0 = 0.$$

Le point $(0,0)$ est un point de bifurcation de (2.28). La relation $f_\mu(0,0) \neq 0$ permet l'application du théorème des fonctions implicites: dans le voisinage de μ_0, il existe une fonction unique $\mu = \mu(x)$ telle que $\mu(0) = 0$.

Différencions $f(x, \mu(x)) = 0$ par rapport à x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu(x)) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x, \mu(x))\frac{d\mu}{dx}(x) = 0. \tag{2.29}$$

Au point fixe $(0,0)$:

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)}. \tag{2.30}$$

Comme $f_\mu(0,0) \neq 0$, ceci implique que:

$$\frac{d\mu}{dx}(0) = 0, \tag{2.31}$$

la courbe de points fixes est tangente à la droite $\mu = 0$ en $x = 0$ (Cf. figure 2.3).

Différencions une nouvelle fois en tenant compte de (2.31) et évaluons les termes en $(0,0)$:

$$\frac{d^2\mu}{dx^2}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0)}. \tag{2.32}$$

La relation $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} \neq 0$ implique que :

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} \neq 0, \tag{2.33}$$

son signe déterminera de quel côté de $\mu = 0$ se situe la courbe de points fixes.

Etudions maintenant la dynamique de (2.28).

- Pour $\mu > 0$, il y a deux points fixes $x = \pm\sqrt{\mu}$. Comme $f_x(x,\mu) = -2x$, on a $f_x(\pm\sqrt{\mu},\mu) = \mp 2\sqrt{\mu}$. Le point fixe $+\sqrt{\mu}$ est donc stable et le point fixe $-\sqrt{\mu}$ est instable.

  La dynamique globale pour $\mu > 0$ est facile à déterminer. Si $x(0) > \sqrt{\mu}$, on a $\dot{x}(t) < 0$, d'où $x(t) \to \sqrt{\mu}$; si $-\sqrt{\mu} < x(0) < \sqrt{\mu}$, $\dot{x}(t) > 0$, d'où $x(t) \to \sqrt{\mu}$; si $x(0) < -\sqrt{\mu}$, $\dot{x}(t) < 0$, donc $x(t) \to -\infty$. On en déduit $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, +\infty)$ et $W^u(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, +\sqrt{\mu})$ (voir figure 2.4a).

- Pour $\mu < 0$ il n'y a pas de point fixe.

- Pour $\mu = 0$, on a $f_x(0,0) = 0$. L'intégration de (2.28) (nécessaire, dans ce cas) donne

$$x(t) = \frac{1}{t + c_0}, \text{ avec } c_0 = 1/x(0). \tag{2.34}$$

  On a donc $W^c(0) = (-\infty, +\infty)$ et l'origine est un point semi-stable, c'est-à-dire : si $x(0) > 0$, $x(t) \to 0$; si $x(0) < 0$, $x(t) \to -\infty$ (voir figure 2.4b).

Exemple 2.3.2 Considérons maintenant le système à deux dimensions [133] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} &= -y, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

On vérifie aisément que les conditions (2.22) et (2.25) de la bifurcation nœud-col sont satisfaites au point fixe $x_0 = y_0 = \mu_0 = 0$. La matrice jacobienne possède, en ce point, une valeur propre nulle (l'autre étant égale à -1). Etudions les trajectoires de (2.35). Dans le plan $(Ox, O\mu)$, la courbe de points fixes est la parabole $\mu = x^2$ (figure 2.3), leur stabilité a été étudiée ci-dessus.
Le point $(x, y) = (0, 0)$ est un point non-hyperbolique. Pour calculer la variété centrale correspondante, on intègre (2.35) pour $\mu = 0$. Les trajectoires s'écrivent :

$$x = \frac{1}{t + x_0^{-1}}, \quad y = y_0 \exp(-t). \tag{2.36}$$

Ces trajectoires sont dessinées sur la figure 2.5b.

Les variétés stables et instable des points hyperboliques $(\sqrt{\pm\mu}, 0)$ sont obtenues en intégrant le système (2.35) pour $\mu > 0$. Les trajectoires sont données par :

$$x = -\sqrt{\mu}\frac{x_0 - \sqrt{\mu} + (x_0 + \sqrt{\mu})\exp 2\sqrt{\mu}t}{x_0 - \sqrt{\mu} - (x_0 + \sqrt{\mu})\exp 2\sqrt{\mu}t}, \tag{2.37}$$

$$y = y_0 \exp(-t). \tag{2.38}$$

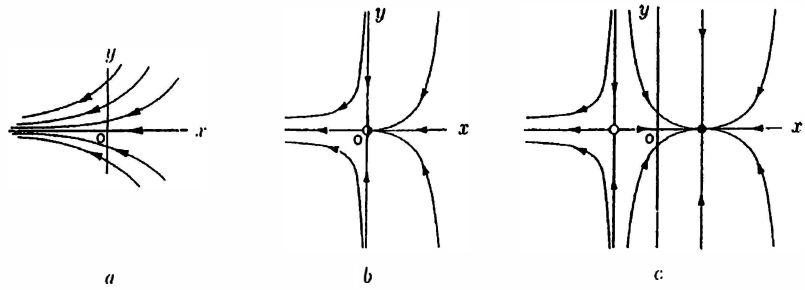


FIG. 2.5 – *Bifurcation nœud-col :* $\dot{x} = \mu - x^2$, $\dot{y} = -y$, *a)* $\mu < 0$. *b)* $\mu = 0$. *c)* $\mu > 0$.

Elles sont dessinées sur la figure (2.5c). Le point $(x, y) = (+\sqrt{\mu}, 0)$ est un nœud, le point $(x, y) = (-\sqrt{\mu}, 0)$ est un col.

Enfin, lorsque $\mu < 0$, les trajectoires sont données par :

$$x = -\sqrt{-\mu}\tan(\sqrt{-\mu}t - c), \quad c = \tan^{-1}(x_0/\sqrt{-\mu}) \tag{2.39}$$

$$y = y_0 \exp(-t) \tag{2.40}$$

(Cf. figure (2.5a)).

Remarque 2.3.2 Une bifurcation nœud-col ne peut pas avoir lieu si le système dynamique possède des symétries. Le point de bifurcation nœud-col $\mu = 0$ représente la collision et l'annihilation de deux points fixes respectivement stable et instable. On le voit bien dans l'exemple 2.2.1 où le col et le nœud s'annihilent sur la parabole $b = -a^2/4$ et forment un seul point fixe nœud-col.

2.3.2 Echange de stabilité - Bifurcation transcritique

Si en plus de (2.22), on a :

$$G_\mu = 0, \quad G_{xx} \neq 0, \tag{2.41}$$

on dit que le système possède une bifurcation *transcritique*. L'équation (2.23) s'écrit alors :

$$\dot{x} = G(x, \mu) = \frac{1}{2}(G_{xx}x^2 + 2G_{\mu x}\mu x + G_{\mu\mu}\mu^2) + O(3). \tag{2.42}$$

(2.42) possède 2 points fixes :

$$x_\pm \sim \frac{-G_{\mu x}\mu \pm \mu\sqrt{G_{\mu x}^2 - G_{xx}G_{\mu\mu}}}{G_{xx}} \quad \text{si } G_{\mu x}^2 - G_{xx}G_{\mu\mu} > 0.$$

Les deux branches de solutions $x_+(\mu)$ et $x_-(\mu)$, au voisinage de $(\mu, x) = (0, 0)$, sont présentées sur la figure 2.6. La stabilité de ces deux points fixes se détermine de façon analogue à celle de la bifurcation nœud-col : si $G_{xx} < 0$ (fig. 2.6a), la branche supérieure des solutions est stable et la branche inférieure est instable ; si $G_{xx} > 0$ (fig. 2.6b), c'est l'inverse.

Exemple 2.3.3 L'équation générique d'une bifurcation transcritique est :

$$\dot{x} = f(x) \equiv \mu x - x^2. \tag{2.43}$$

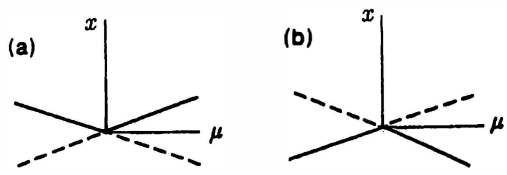


FIG. 2.6 – *Bifurcation transcritique : diagrammes de bifurcation.*

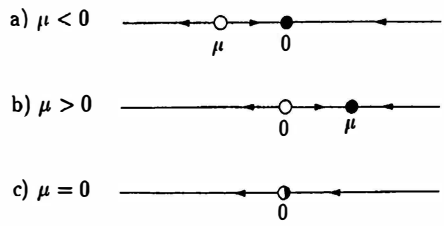


FIG. 2.7 – *Bifurcation transcritique : $\dot{x} = \mu x - x^2$.*

Il y a deux points fixes $x = 0$ et $x = \mu$.

- Pour $\mu < 0$, comme $f_x(x,\mu) = \mu - 2x$, $f_x(0,\mu) = \mu < 0$ et $f_x(\mu,\mu) = -\mu > 0$. Le point fixe $x = 0$ est donc stable tandis que le point fixe $x = \mu$ est instable.
- Pour $\mu > 0$, $f_x(\mu,0) = \mu > 0$ et $f_x(\mu,\mu) = -\mu < 0$. Le point fixe $x = 0$ est donc instable tandis que le point fixe $x = \mu$ est stable.

Il y a donc échange de stabilité en $\mu = 0$ où il n'y a qu'un point fixe $x = 0$.

La dynamique globale du système est schématisée sur la figure 2.7 :
pour $\mu < 0$, on a $W^s(0) = (\mu, +\infty)$, $W^u(\mu) = (-\infty, 0)$,
pour $\mu > 0$, on a $W^u(0) = (-\infty, \mu)$, $W^s(\mu) = (0, \infty)$,
pour $\mu = 0$, on a $W^c(0) = (-\infty, +\infty)$ (Pour $\mu = 0$, le raisonnement est le même que celui de la bifurcation nœud-col).

Exemple 2.3.4 Considérons le système à deux dimensions [133] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} &= -y, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Dans le plan $(Ox, O\mu)$, les points fixes sont $x = 0$ et $x = \mu$, dont la stabilité a été étudiée ci-dessus.

En $\mu = 0$, il existe un seul point fixe, $(x,y) = (0,0)$ qui est non-hyperbolique, Les trajectoires sont données par (2.36) et dessinées sur la figure 2.8b. Elles sont les mêmes que dans la bifurcation nœud-col (figure 2.5b).

Lorsque $\mu > 0$, les solutions sont :

$$x = \frac{\mu x_0 \exp(\mu t)}{x_0 \exp(\mu t) + \mu - x_0}, \quad y = y_0 \exp(-t). \tag{2.45}$$

Elles sont dessinées sur la figure (2.8c).

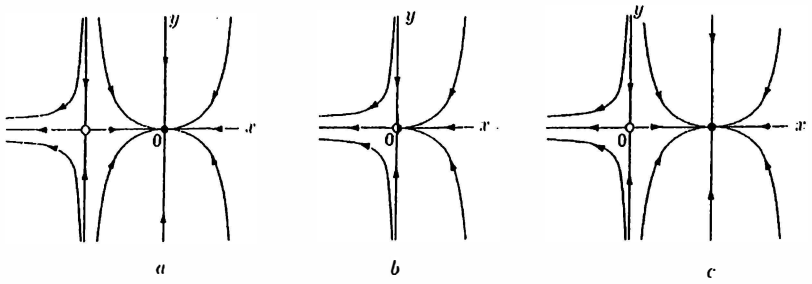


FIG. 2.8 – *Bifurcation transcritique :* $\dot{x} = \mu x - x^2$, $\dot{y} = -y$.
a) $\mu < 0$. *b)* $\mu = 0$. *c)* $\mu > 0$.

Lorsque $\mu < 0$, les solutions sont aussi (2.45). Elles sont dessinées sur la figure (2.8a).

Une bifurcation transcritique est une bifurcation de la solution triviale. Elle a lieu quand une raison physique impose $x = 0$ à être solution pour tout μ.

La bifurcation transcritique a été rencontrée lors de l'étude de la variété centrale de l'équation de Duffing (Exemple 1.8.6).

2.3.3 Bifurcation fourche

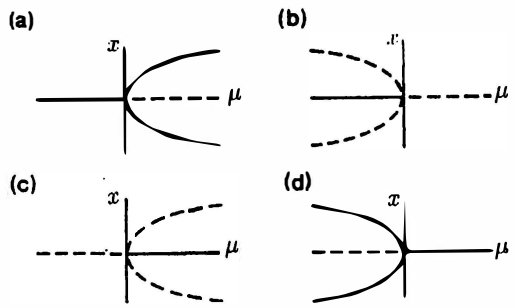


FIG. 2.9 – *Bifurcation fourche : diagrammes de bifurcation.*

Supposons maintenant qu'en plus de (2.22), nous ayons également :

$$G_\mu(0,0) = G_{xx}(0,0) = 0. \tag{2.46}$$

La bifurcation est alors une bifurcation *fourche* (*pitchfork* en anglais). Le développement de Taylor de (2.23) jusqu'à l'ordre 3 s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= G(x,\mu) = \frac{1}{2}(2G_{\mu x}\mu x + G_{\mu\mu}\mu^2) \\ &\quad + \frac{1}{6}(G_{xxx}x^3 + 3G_{xx\mu}x^2\mu + 3G_{x\mu\mu}x\mu^2 + G_{\mu\mu\mu}\mu^3) + O(4) \\ &= x(G_{\mu x}\mu + \frac{1}{6}G_{xxx}x^2) + O(\mu^2) \text{ avec } x \sim \mu^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour $\mu \to 0$, (2.47) possède approximativement trois points fixes :

$$x_0 = 0 \text{ et } x_\pm \sim \pm\sqrt{\frac{-6G_{\mu x}\mu}{G_{xxx}}}, \text{ si } G_{\mu x}G_{xxx}\mu < 0. \tag{2.48}$$

Leur stabilité est déterminée par le signe de la dérivée du second membre de (2.47) :

$$DG(0,\mu) \sim G_{\mu x}\mu, \quad DG(x_\pm,\mu) \sim -2G_{\mu x}\mu.$$

Les différentes courbes de points fixes et leur stabilité sont présentées sur la figure 2.9 où l'on distingue les cas suivants :

- bifurcations sur-critiques (la fourche est stable) :

$$\text{a) } G_{\mu x} > 0, G_{xxx} < 0, \quad \text{d) } G_{\mu x} < 0, G_{xxx} < 0,$$

- bifurcations sous-critiques (la fourche est instable) :

$$\text{b) } G_{\mu x} > 0, G_{xxx} > 0, \quad \text{c) } G_{\mu x} < 0, G_{xxx} > 0.$$

Exemple 2.3.5 L'équation générique d'une bifurcation fourche est :

$$\dot{x} = f(x) \equiv \mu x - x^3 \tag{2.49}$$

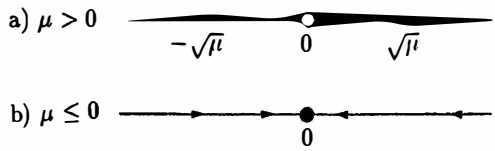


FIG. 2.10 – *Bifurcation fourche : $\dot{x} = \mu x - x^3$.*

- Si $\mu > 0$ il y a trois points fixes : $x = \pm\sqrt{\mu}$ et $x = 0$. Comme $f_x(x,\mu) = \mu - 3x^2$, on a $f_x(\pm\sqrt{\mu},\mu) = -2\mu < 0$, $f_x(0,\mu) = \mu > 0$. On en déduit que les points fixes $x = \pm\sqrt{\mu}$ sont stables tandis que le point fixe $x = 0$ est instable.

- Si $\mu < 0$, il n'y a qu'un seul point fixe stable $x = 0$.

La dynamique globale est schématisée sur la figure 2.10 :
pour $\mu < 0$, on a $W^s(0) = (-\infty, +\infty)$,
pour $\mu > 0$, on a $W^u(0) = (-\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu})$, $W^s(\sqrt{\mu}) = (0, +\infty)$, $W^s(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, 0)$,
pour $\mu = 0$, on a $W^s(0) = \emptyset$ et $W^c(0) = (-\infty, +\infty)$.
Le raisonnement est le même que celui de la bifurcation nœud-col.

Remarque 2.3.3 Dans l'exemple précédent la bifurcation fourche est sur-critique et on peut vérifier que l'équation

$$\dot{x} = f(x,\mu) \text{ avec } f(x,\mu) = \mu x + x^3 \tag{2.50}$$

présente une bifurcation fourche sous-critique à $\mu = 0$.

Exemple 2.3.6 Considérons le système à deux dimensions [133] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} &= -y \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Les points fixes sont $(x, y) = (0, 0)$ et $(x, y) = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$.

Pour $\mu < 0$, il y a un seul point fixe $(0, 0)$ qui est stable. $W^s(0) = (-\infty, \infty)$.

Pour $\mu > 0$, $(0, 0)$ est instable mais il existe deux autres points fixes , $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$, qui sont stables.

$W^s(0) = (0)$ et $W^u(0) = (-\infty, \infty)$.

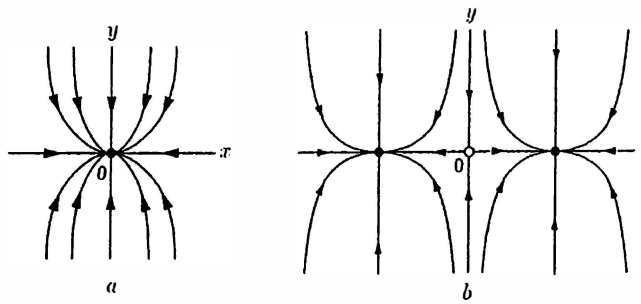


FIG. 2.11 – *Bifurcation fourche : $\dot{x} = \mu x - x^3$, $\dot{y} = -y$. a) $\mu < 0$ et $\mu = 0$. b) $\mu > 0$.*

Les solutions de (2.51) sont :

$$y = y_0 \exp(-t)$$

et

a) pour $\mu < 0$:

$$x = \frac{\pm\sqrt{-\mu} x_0 \exp(\mu t)}{\sqrt{x_0^2 - \mu - x_0^2 \exp(2\mu t)}}.$$

b) pour $\mu = 0$:

$$x = \pm \frac{x_0}{\sqrt{1 + x_0^2 t}}$$

c) pour $\mu > 0$:

$$x = \frac{\pm\sqrt{\mu} x_0 \exp(\mu t)}{\sqrt{\mu - x_0^2 + x_0^2 \exp(2\mu t)}}.$$

Les trajectoires sont présentées sur la figure 2.11. Notons que, dans cet exemple, $f(-x) = -f(x)$: $f(x)$ est une fonction impaire ; en conséquence $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = 0$: un tel système ne peut donc présenter de bifurcation nœud-col.

La bifurcation fourche a été rencontrée lors de l'étude de la variété centrale du système de Lorenz 1.8.5.

2.3.4 Bifurcation de Hopf

Supposons que le système dynamique

$$\dot{u} = f(u, \nu), \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad \nu : \text{paramètre réel}, \tag{2.52}$$

ait un point stationnaire $u = u^*(\nu)$ et que

(**H**) : *la matrice jacobienne*

$$A(\nu) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right\|_{u=u^*}$$

possède une paire de valeurs propres complexes conjuguées λ_1 *et* λ_2,

$$\lambda_{1,2}(\nu) = \alpha(\nu) \pm i\omega(\nu)$$

telles que :

1) pour une certaine valeur $\nu = \nu_c$,

$$\alpha(\nu_c) = 0 \text{ et } \frac{d}{d\nu}\alpha(\nu)\bigg|_{\nu=\nu_c} \neq 0,$$

2) les $n-2$ *autres valeurs propres de* $A(\nu_c)$ *aient leur partie réelle strictement négative.*

Au point $u = u^*(\nu_c)$, on a donc une variété centrale de dimension deux et une variété stable de dimension $n-2$. Cherchons, par des transformations de coordonnées, à ramener (2.52) à la forme (1.112). Nous commençons par effectuer dans (2.52) le remplacement

$$u \to u^* + u, \quad \nu = \nu_c + \mu \tag{2.53}$$

pour ramener le point fixe à l'origine et la valeur ν_c à 0. (2.52) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\dot{u} = A(\mu)u + \hat{F}(u, \mu) \tag{2.54}$$

où $\hat{F}(u, \mu)$ est le terme non-linéaire.

Soit $v_1(\mu)$ (resp. $v_2(\mu) = \bar{v}_1$) le vecteur propre de $A(\mu)$ correspondant à la valeur propre $\lambda_1(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ (resp. $\lambda_2(\mu) = \alpha(\mu) - i\omega(\mu)$), considérons la base suivante $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ où $e_1 = \Re v_1$, $e_2 = -\Im v_1$ et $\{e_3, \ldots, e_n\}$ est une base *réelle* de l'union des espaces propres de $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Soit T la matrice de passage de la base ancienne à la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$:

$$T = [e_1 \quad e_2 \qquad e_n]. \tag{2.55}$$

Portons le changement de variables,

$$u = Tx, \quad x = T^{-1}u, \tag{2.56}$$

dans (2.54), nous obtenons :

$$\dot{x} = A'(\mu)x + F(x, \mu) \tag{2.57}$$

avec

$$A'(\mu) = T^{-1}A(\mu)T = \begin{bmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) & 0 \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & B(\mu) \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

où $B(\mu)$ est une matrice $(n-2)\times(n-2)$ et

$$F(x,\mu) = T^{-1}\hat{F}(Tx,\mu). \tag{2.59}$$

Posons :

$$\begin{aligned} z &= x_1 + ix_2, \\ y &= (x_3, x_4, \dots, x_n)^T, \end{aligned} \tag{2.60}$$

(2.57) s'écrit alors :

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + G(z,\bar{z},y,\mu), \quad \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu), \tag{2.61}$$

$$\dot{y} = B(\mu)y + H(z,\bar{z},y) \tag{2.62}$$

où l'on a posé

$$G(z,\bar{z},y,\mu) = F^1(x_1,x_2,y,\mu) + iF^2(x_1,x_2,y,\mu). \tag{2.63}$$

Soit

$$y = w(z,\bar{z}), \tag{2.64}$$

l'équation de la variété centrale, l'étape suivante consiste à transformer (2.61) en sa forme normale de Poincaré :

$$\dot{\xi} = \lambda(\mu)\xi + c_1(\mu)\bar{\xi}\xi^2 + \cdots + c_k(\mu)\bar{\xi}^k\xi^{k+1} + \cdots, \quad c_k(\mu) \in \mathbb{C}, \tag{2.65}$$

par une transformation du type :

$$z = \xi + \chi(\xi,\bar{\xi}).$$

Cette transformation sera étudiée au paragraphe suivant. L'équation (2.65) s'écrit, en coordonnées polaires $\xi = re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r[\alpha(\mu) + a_1r^2 + \cdots], \\ \dot{\theta} &= \omega(\mu) + b_1r^2 + \cdots, \end{aligned} \tag{2.66}$$

où l'on a posé : $a_i = \Re c_i$, $b_i = \Im c_i$. En première approximation, on a $\omega(\mu) = \omega(0) + \cdots$ et $\alpha(\mu) = \alpha'(0)\mu + \cdots$. On en déduit que $r = \text{Cte}$ si $\alpha'(0)\mu + a_1r^2 = 0$, d'où le théorème suivant [116], [74].

Théorème 2.3.1 (Poincaré-Andronov-Hopf) *Si les hypothèses (**H**) sont satisfaites et si $a_1 \neq 0$, $\alpha'(0)\mu/a_1 < 0$, alors $(u^*(\nu_c),\nu_c)$ est un point de bifurcation de l'état d'équilibre $u^*(\nu_c)$ vers un cycle limite de rayon*

$$r \approx \sqrt{-\frac{\alpha'(0)\mu}{a_1}}, \quad (') = d/d\nu \tag{2.67}$$

et de période $T \approx 2\pi/\omega_0$ avec $\omega_0 = \omega(0)$.

Posons :

$$\delta = -\frac{a_1}{\alpha'(0)}. \tag{2.68}$$

Comme r doit être un réel positif, (2.67) montre que les orbites périodiques sont apparues (ou la direction de bifurcation est) du côté $\mu < 0$ si $\delta < 0$ et que les orbites périodiques sont apparues (ou la direction de bifurcation est) du côté $\mu > 0$ si $\delta > 0$. Si $a_1 = 0$, il faut faire un développement d'ordre > 1.

On déduit de (2.66) qu'en première approximation on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\omega_0}[\alpha'(0)\mu + a_1 r^2] + \cdots . \tag{2.69}$$

Quatre cas sont alors possibles [163] :

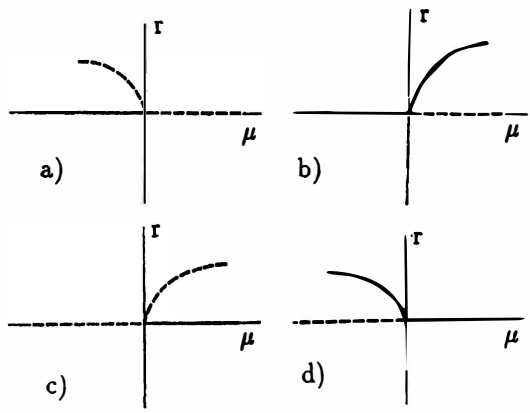


FIG. 2.12 – *Diagrammes de bifurcation de Hopf : a)* $\alpha'(\nu_c) > 0$ *et* $a_1 > 0$. *b)* $\alpha'(\nu_c) > 0$ *et* $a_1 < 0$. *c)* $\alpha'(\nu_c) < 0$ *et* $a_1 > 0$. *d)* $\alpha'(\nu_c) < 0$ *et* $a_1 < 0$.

- *Cas 1* : $\alpha'(\nu_c) > 0$ et $a_1 > 0$. Dans ce cas l'origine est un point fixe instable si $\mu > 0$ et est un point fixe asymptotiquement stable si $\mu < 0$, avec une orbite périodique instable si $\mu < 0$ (pas d'orbite périodique si $\mu > 0$) ; voir figure 2.12a.

- *Cas 2* : $\alpha'(\nu_c) > 0$ et $a_1 < 0$. Dans ce cas l'origine est un point fixe asymptotiquement stable si $\mu < 0$ et est un point fixe instable si $\mu > 0$, avec une orbite périodique asymptotiquement stable si $\mu > 0$ (pas d'orbite périodique si $\mu < 0$) ; voir figure 2.12b.

- *Cas 3* : $\alpha'(\nu_c) < 0$ et $a_1 > 0$. Dans ce cas l'origine est un point fixe instable si $\mu < 0$ et est un point fixe asymptotiquement stable si $\mu > 0$, avec une orbite périodique instable si $\mu > 0$ (pas d'orbite périodique si $\mu < 0$) ; voir figure 2.12c.

- *Cas 4* : $\alpha'(\nu_c) < 0$ et $a_1 < 0$. Dans ce cas l'origine est un point fixe asymptotiquement stable si $\mu > 0$ et est un point fixe instable si $\mu < 0$, avec une orbite périodique asymptotiquement stable si $\mu < 0$ (pas d'orbite périodique si $\mu > 0$) ; voir figure 2.12d.

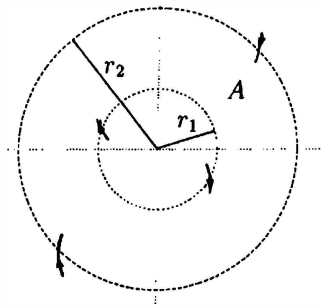


FIG. 2.13 – *L'anneau de Poincaré-Bendixson.*

En effet, prenons par exemple le cas 4 avec $\mu < 0$. Pour μ assez petit, considérons l'anneau A défini par (Cf. figure 2.13) :

$$A = \{(r, \theta) | r_1 \leq r \leq r_2\}$$

où r_1 et r_2 sont choisis de telle façon que

$$0 < r_1 < \sqrt{\frac{-\alpha'(0)\mu}{a_1}} < r_2.$$

On vérifie facilement que le second membre de (2.69) est positif pour $r = r_1$ et négatif pour $r = r_2$. On en déduit que, sur la frontière de A, le champ vectoriel pointe vers l'intérieur de A ; d'où, par le théorème de Poincaré-Bendixson, A contient une orbite périodique stable. Les autres cas sont démontrés de façon analogue (on peut aussi utiliser l'application de Poincaré, voir les exemples 4.3.1 et 4.3.2).

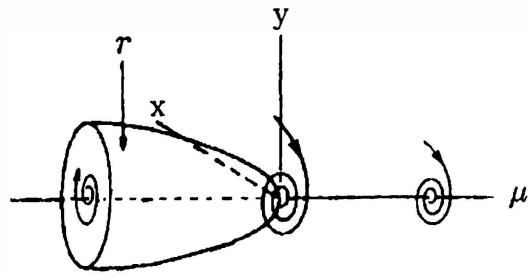


FIG. 2.14 – $\alpha'(\nu_c) < 0$ *et* $a_1 < 0$.

On en déduit que, si $a_1 < 0$ (resp. $a_1 > 0$), l'orbite périodique sera asymptotiquement stable (resp. instable) et la bifurcation de Hopf est dite *sur-critique ou super-critique* (resp. *sous-critique*). Le coefficient a_1 est appelé *nombre de Lyapunov* [133], [163].

2.4 L'algorithme de Hassard, Kazarinoff et Wan

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de calculer le coefficient c_1 de (2.65) et sa partie réelle a_1, au point $\nu = \nu_c$, par la méthode de Hassard, Kazarinoff et

Wan [73], [74] (Dans l'article de B. D. Hassard et Y. H. Wan [73] le coefficient c_2 est également calculé).

2.4.1 Systèmes à n dimensions

Cherchons une transformation

$$z = \xi + \sum_{2\le i+j} \chi_{ij} \frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i!j!} \tag{2.70}$$

qui transforme (2.61) en (2.65). Dérivons (2.64), nous obtenons:

$$\dot{y} = \dot{w}(z,\bar{z}) = w_z \dot{z} + w_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$$

ou, en tenant compte de (2.61) et (2.62):

$$\lambda z w_z + \bar{\lambda} \bar{z} w_{\bar{z}} - Bw = H(z,\bar{z},w) - w_z G - w_{\bar{z}} \bar{G}, \tag{2.71}$$

où $\bar{G}$ est le complexe conjugué de G. Posons:

$$w(z,\bar{z}) = \sum_{2\le i+j} w_{ij} \frac{z^i \bar{z}^j}{i!j!} \tag{2.72}$$

avec

$$w = (w_3, \dots, w_n)^T, \quad w_{ij} = (w_{ij}^3, \dots, w_{ij}^n)^T = \bar{w}_{ji}$$

et

$$G(z,\bar{z},w(z,\bar{z})) = \sum_{p=3}^{n} \sum_{2\le i+j+k} \frac{\partial^{i+j+k} G}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial x_p^k} \frac{z^i \bar{z}^j w_p^k}{i!j!k!} \tag{2.73}$$

$$H(z,\bar{z},w(z,\bar{z})) = \sum_{p=3}^{n} \sum_{2\le i+j+k} \frac{\partial^{i+j+k} H}{\partial z^i \partial \bar{z}^j \partial x_p^k} \frac{z^i \bar{z}^j w_p^k}{i!j!k!}. \tag{2.74}$$

Le premier membre de (2.71) s'écrit:

$$\sum_{2\le i+j} [i\lambda + j\bar{\lambda} - B] \frac{w_{ij} z^i \bar{z}^j}{i!j!}.$$

Portons (2.72)-(2.74) dans le second membre de (2.71) et égalisons les termes du même ordre.

Pour l'ordre $|z|^2$, nous obtenons:

$$(2\lambda - B) w_{20} \frac{z^2}{2} + (\lambda + \bar{\lambda} - B) w_{11} z\bar{z} + (2\bar{\lambda} - B) w_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} = \frac{\partial^2 H}{\partial^2 z} \frac{z^2}{2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial \bar{z}} z\bar{z} + \frac{\partial^2 H}{\partial^2 \bar{z}} \frac{\bar{z}^2}{2}$$

D'où, en tenant compte de $\lambda = i\omega_0$:

$$\begin{aligned} w_{20} &= (2\lambda - B)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \\ w_{11} &= -B^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial \bar{z}}, \\ w_{02} &= (2\bar{\lambda} - B)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial \bar{z}^2} = \bar{w}_{20} \end{aligned} \tag{2.75}$$

(on a $w_{02} = \bar{w}_{20}$ car $y = w(z,\bar{z})$ doit être réel). Si dans l'équation (2.61), on remplace $G(z,\bar{z},y)$ et $y = w(z,\bar{z})$ par les expressions (2.73), (2.72), on obtient une équation de la forme :

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2\leq i+j} \frac{g_{ij}}{i!j!} z^i \bar{z}^j. \tag{2.76}$$

Les premiers coefficients g_{ij} (qui sont nécessaires pour le calcul de c_1) sont donnés par :

$$\begin{aligned} g_{20} &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}, \quad g_{11} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad g_{02} = \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z}^2}, \\ g_{21} &= \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial \bar{z}} + \sum_{p=3}^{n} (2w_{11}^p \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x_p}. + w_{20}^p \frac{\partial^2 G}{\partial \bar{z} \partial x_p}). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Portons maintenant (2.70) dans (2.76), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &+ \sum_{2\leq i+j} \frac{\chi_{ij}}{i!j!} (i\xi^{i-1}\bar{\xi}^j \dot{\xi} + j\xi^i \xi^{j-1} \dot{\bar{\xi}}) = \lambda \left(\xi + \sum_{2\leq i+j} \chi_{ij} \frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i!j!} \right) \\ &+ \sum_{2\leq i+j} \frac{g_{ij}}{i!j!} \left(\xi + \sum_{2\leq k+l} \chi_{kl} \frac{\xi^k \bar{\xi}^l}{k!l!} \right)^i \left(\bar{\xi} + \sum_{2\leq k+l} \bar{\chi}_{kl} \frac{\bar{\xi}^k \xi^l}{k!l!} \right)^j. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Ensuite, il reste à porter (2.65) dans (2.78) et à identifier les termes de même puissance. On obtient alors :

- pour les termes d'ordre $|\xi|^2$:

$$\lambda \chi_{20} \frac{\xi^2}{2} + \bar{\lambda} \chi_{11} \xi \bar{\xi} + (2\bar{\lambda} - \lambda) \chi_{02} \frac{\bar{\xi}^2}{2} = g_{20} \frac{\xi^2}{2} + g_{11} \xi \bar{\xi} + g_{02} \frac{\bar{\xi}^2}{2},$$

d'où :

$$\chi_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad \chi_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad \chi_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}; \tag{2.79}$$

- pour les termes en $\xi^2 \bar{\xi}$:

$$g_{20}\chi_{11} + g_{11}(\frac{\chi_{20}}{2} + \bar{\chi}_{11}) + g_{02}\frac{\bar{\chi}_{02}}{2} + \frac{g_{21}}{2} - c_1 = 0,$$

ou en tenant compte de (2.79) :

$$c_1 = \frac{i}{2\omega_0}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2}. \tag{2.80}$$

On en déduit :

$$a_1 = \Re c_1 = \frac{\Re g_{21}}{2} - \frac{1}{2\omega_0}(\Re g_{20} \Im g_{11} + \Re g_{11} \Im g_{20}). \tag{2.81}$$

Comme, dans la pratique, on a le système (2.57), il est utile de donner l'expression de a_1 en fonction des dérivées partielles de $F^1(x)$, $F^2(x)$ et $H(x)$. Les g_{ij} sont donnés par (2.77). D'après (2.60) :

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2}), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2}). \tag{2.82}$$

On en déduit, étant donné (2.63) :

$$\begin{aligned}
g_{11} &= G_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}[F^1_{x_1x_1} + F^1_{x_2x_2} + i(F^2_{x_1x_1} + F^2_{x_2x_2})], \\
g_{02} &= G_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}[F^1_{x_1x_1} - F^1_{x_2x_2} - 2F^2_{x_1x_2} + i(F^2_{x_1x_1} - F^2_{x_2x_2} + 2F^1_{x_1x_2})], \\
g_{20} &= G_{zz} = \frac{1}{4}[F^1_{x_1x_1} - F^1_{x_2x_2} + 2F^2_{x_1x_2} + i(F^2_{x_1x_1} - F^2_{x_2x_2} - 2F^1_{x_1x_2})]
\end{aligned}$$

où les indices x_i désignent les dérivations partielles :

$$F^k_{x_ix_j} \equiv \frac{\partial^2 F^k}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i,j,k = 1,2,3. \tag{2.83}$$

A la fin de ce chapitre, nous avons écrit un programme Mathematica permettant de calculer les dérivées partielles de G par rapport à z, $\bar{z}$ en fonction des dérivées partielles de F^1, F^2 par rapport à x_1, x_2, jusqu'à l'ordre 4 (Cf. Programme 2.1).

De même, on a, d'après (2.77) :

$$g_{21} = G_{zz\bar{z}} + \sum_{p=3}^{n}(2G_{zx_p}w^p_{11} + G_{\bar{z}x_p}w^p_{20})$$

avec

$$\begin{aligned}
G_{zz\bar{z}} &= \frac{1}{8}[F^1_{x_1x_1x_1} + F^1_{x_1x_2x_2} + F^2_{x_1x_1x_2} + F^2_{x_2x_2x_2} \\
&\quad + i(F^2_{x_1x_1x_1} + F^2_{x_1x_2x_2} - F^1_{x_1x_1x_2} - F^1_{x_2x_2x_2})], \\
G_{zx_p} &= \frac{1}{2}[F^1_{x_1x_p} + F^2_{x_2x_p} + i(F^2_{x_1x_p} - F^1_{x_2x_p})], \quad p = 3, \ldots, n, \\
G_{\bar{z}x_p} &= \frac{1}{2}[F^1_{x_1x_p} - F^2_{x_2x_p} + i(F^2_{x_1x_p} + F^1_{x_2x_p})], \quad p = 3, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Portant ces expressions dans (2.81), on obtient :

$$\begin{aligned}
16a_1 &= \frac{1}{\omega_0}[(F^1_{x_1x_1} + F^1_{x_2x_2})F^1_{x_1x_2} \\
&\quad -(F^2_{x_1x_1} + F^2_{x_2x_2})F^2_{x_1x_2} - F^1_{x_1x_1}F^2_{x_1x_1} + F^1_{x_2x_2}F^2_{x_2x_2}] \\
&\quad +(F^1_{x_1x_1x_1} + F^1_{x_1x_2x_2} + F^2_{x_1x_1x_2} + F^2_{x_2x_2x_2}) \\
&\quad +4\sum_{p=3}^{n}[2(F^1_{x_1x_p} + F^2_{x_2x_p})w^p_{11} \\
&\quad +(F^1_{x_1x_p} - F^2_{x_2x_p})\Re w^p_{20} - (F^1_{x_2x_p} + F^2_{x_1x_p})\Im w^p_{20}].
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Les dérivées partielles (2.83) sont calculées au point de bifurcation $(x,\mu) = (0,0)$.

2.4.2 Systèmes à trois et deux dimensions

Dans ce paragraphe nous allons illustrer le calcul du coefficient a_1 par l'algorithme de Hassard, Kazarinoff et Wan sur des systèmes de dimension faible.

Systèmes à trois dimensions

Considérons un système à trois dimensions dépendant d'un paramètre

$$\dot{u} = f(u, \nu), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{2.85}$$

où, pour simplifier le raisonnement, nous avons supposé que le point fixe a été ramené à l'origine (par une transformation de coordonnées). On peut donc écrire (2.85) sous la forme :

$$\dot{u} = A(\nu)u + \hat{F}(u, \nu) \text{ avec } A(\nu) \equiv \|a_{ij}(\nu)\| = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right\|_{u=0}. \tag{2.86}$$

a) Conditions de bifurcation et calcul de $\alpha'(\nu_c)$. L'équation aux valeurs propres de la matrice A s'écrit :

$$|a_{ij}(\nu) - \lambda \delta_{ij}| = 0$$

ou

$$\lambda^3 + P(\nu)\lambda^2 + Q(\nu)\lambda + R(\nu) = 0 \tag{2.87}$$

avec

$$\begin{aligned} P(\nu) &= -\operatorname{Tr} A = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\nu), \\ Q(\nu) &= \operatorname{Tr} A^c = \begin{vmatrix} a_{11}(\nu) & a_{12}(\nu) \\ a_{21}(\nu) & a_{22}(\nu) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(\nu) & a_{13}(\nu) \\ a_{31}(\nu) & a_{33}(\nu) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}(\nu) & a_{23}(\nu) \\ a_{32}(\nu) & a_{33}(\nu) \end{vmatrix}, \\ R(\nu) &= -\det |a_{ij}(\nu)|. \end{aligned}$$

Supposons que (2.87) possède une paire de racines complexes conjuguées $\lambda_{1,2}(\nu) = \alpha(\nu) \pm i\omega(\nu)$ et une racine réelle $\lambda_3(\nu)$ telles que, pour une certaine valeur $\nu = \nu_c$, on ait :

$$\alpha(\nu_c) = 0, \quad \alpha'(\nu_c) \neq 0, \quad \lambda_3(\nu_c) < 0$$

où l'on a posé $(') = d/d\nu$.

D'après les relations entre racines et coefficients d'un polynôme on a :

$$\begin{aligned} &2\alpha(\nu) + \lambda_3(\nu) = -P(\nu), \\ &\alpha(\nu)^2 + \omega(\nu)^2 + 2\alpha(\nu)\lambda_3(\nu) = Q(\nu), \\ &[\alpha(\nu)^2 + \omega(\nu)^2]\lambda_3(\nu) = -R(\nu). \end{aligned}$$

On en déduit que pour $\nu = \nu_c$:

$$\lambda_3(\nu_c) = -P(\nu_c), \quad \omega(\nu_c)^2 = Q(\nu_c), \quad \omega(\nu_c)^2\lambda_3(\nu_c) = -R(\nu_c). \tag{2.88}$$

D'où les conditions sur les coefficients $P(\nu)$, $Q(\nu)$ et $R(\nu)$:

$$P(\nu_c) > 0, \quad Q(\nu_c) > 0, \quad P(\nu_c)Q(\nu_c) = R(\nu_c). \tag{2.89}$$

Cette dernière équation permet de calculer le point de bifurcation ν_c (s'il existe). Dérivons (2.87) par rapport à ν, il vient :

$$3\lambda^2\lambda' + P'\lambda^2 + 2P\lambda\lambda' + Q'\lambda + Q\lambda' + R' = 0. \tag{2.90}$$

Portons $\lambda = \alpha(\nu) + i\omega(\nu)$ et $\lambda' = \alpha'(\nu) + i\omega'(\nu)$ dans (2.90) et ensuite $\nu = \nu_c$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2Q(\nu_c)\alpha'(\nu_c) &= R'(\nu_c) - P'(\nu_c)Q(\nu_c) - 2P(\nu_c)\omega(\nu_c)\omega'(\nu_c), \\ 2\omega(\nu_c)\omega'(\nu_c) &= 2\alpha'(\nu_c)P(\nu_c) + Q'(\nu_c). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\alpha'(\nu_c) = \frac{R'(\nu_c) - P'(\nu_c)Q(\nu_c) - P(\nu_c)Q'(\nu_c)}{2[Q(\nu_c) + P(\nu_c)]}, \tag{2.91}$$

d'où :

$$\operatorname{sgn}\,[\alpha'(\nu_c)] = \operatorname{sgn}\,[R'(\nu_c) - P'(\nu_c)Q(\nu_c) - P(\nu_c)Q'(\nu_c)]. \tag{2.92}$$

b) Calcul de la matrice de passage T. Soit

$$v_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

le vecteur propre de la matrice $A = \|a_{ij}(\nu_c)\|$ correspondant à la valeur propre λ_i, avec

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 = \pm iQ^{1/2}(\nu_c) \quad \lambda_3 = -P(\nu_c). \tag{2.93}$$

On a :

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0. \tag{2.94}$$

La solution de l'équation homogène (2.94) dépend d'une constante arbitraire. On pourrait, par exemple, calculer β_i, γ_i en fonction de α_i. Portant les solutions v_i de (2.94) dans

$$T \equiv (t_{ij}) = [\Re v_1 \quad -\Im v_1 \quad v_3], \tag{2.95}$$

nous obtenons les expressions suivantes pour les éléments t_{ij} de la matrice T :

$$\begin{aligned} t_{11} &= \alpha_1, \quad t_{12} = 0, \quad t_{13} = \alpha_3, \\ t_{21} &= \alpha_1[(a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11})\Delta + a_{13}a_{23}\omega_0^2]/D_1, \\ t_{22} &= -\alpha_1\omega_0[\Delta a_{23} - (a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11})a_{13}]/D_1, \\ t_{23} &= \alpha_3[a_{23}\lambda_3 + a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}]/D_2, \\ t_{31} &= \alpha_1[(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \omega_0^2)\Delta - a_{13}(a_{11} + a_{22})\omega_0^2]/D_1, \\ t_{32} &= \alpha_1\omega_0[a_{13}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - \omega_0^2) + (a_{11} + a_{22})\Delta]/D_1, \\ t_{33} &= \alpha_3[(a_{11} - \lambda_3)(a_{22} - \lambda_3) - a_{12}a_{21}]/D_2, \end{aligned} \tag{2.96}$$

où l'on a posé :

$$\Delta = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \quad D_1 = \Delta^2 + a_{13}^2\omega_0^2, \quad D_2 = \Delta + a_{13}\lambda_3$$

et α_1 et α_3 sont deux réels arbitraires (pour simplifier le calcul, nous avons supposé que $\Im\alpha_1 = 0$).

c) Calcul du coefficient a_1. Le système (2.57) s'écrit ici au point $\nu = \nu_c$:

$$\dot{x} = A'x + F(x) \tag{2.97}$$

avec $u = Tx$, $x = T^{-1}u$ et

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(x) = T^{-1}\hat{F}(Tx, \nu_c). \tag{2.98}$$

(2.75) donne :

$$\begin{aligned} w_{20} &= \frac{1}{2i\omega_0 - \lambda_3} F^3_{zz} = \bar{w}_{02}, \\ w_{11} &= -\frac{1}{\lambda_3} F^3_{z\bar{z}}, \end{aligned} \tag{2.99}$$

où

$$F^3_{zz} = \frac{1}{4}(F^3_{x_1x_1} - F^3_{x_2x_2}) - \frac{i}{2}F^3_{x_1x_2}, \qquad F^3_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}(F^3_{x_1x_1} + F^3_{x_2x_2})$$

(Les indices désignent les dérivées partielles, Cf. formule (2.83)). On en déduit :

$$\begin{aligned} w_{20} &= -\frac{1}{4\omega_0^2 + \lambda_3^2}[\frac{\lambda_3}{4}(F^3_{x_1x_1} - F^3_{x_2x_2}) + \omega_0 F^3_{x_1x_2}] \\ &\quad -\frac{i}{4\omega_0^2 + \lambda_3^2}[\frac{\omega_0}{2}(F^3_{x_1x_1} - F^3_{x_2x_2}) - \frac{\lambda_3}{2}F^3_{x_1x_2}], = \bar{w}_{02}, \\ w_{11} &= -\frac{1}{4\lambda_3}(F^3_{x_1x_1} + F^3_{x_2x_2}). \end{aligned} \tag{2.100}$$

Portant (2.100) dans (2.84), on obtient :

$$\begin{aligned} 16a_1 &= \frac{1}{\omega_0}[(F^1_{x_1x_1} + F^1_{x_2x_2})F^1_{x_1x_2} \\ &\quad -(F^2_{x_1x_1} + F^2_{x_2x_2})F^2_{x_1x_2} - F^1_{x_1x_1}F^2_{x_1x_1} + F^1_{x_2x_2}F^2_{x_2x_2}] \\ &\quad +(F^1_{x_1x_1x_1} + F^1_{x_1x_2x_2} + F^2_{x_1x_1x_2} + F^2_{x_2x_2x_2}) \\ &\quad -\frac{2}{\lambda_3}(F^1_{x_1x_3} + F^2_{x_2x_3})(F^3_{x_1x_1} + F^3_{x_2x_2}) \\ &\quad -\frac{1}{4\omega_0^2 + \lambda_3^2}(F^1_{x_1x_3} - F^2_{x_2x_3})[\lambda_3(F^3_{x_1x_1} - F^3_{x_2x_2}) + 4\omega_0 F^3_{x_1x_2}] \\ &\quad +\frac{2}{4\omega_0^2 + \lambda_3^2}(F^1_{x_2x_3} + F^2_{x_1x_3})[\omega_0(F^3_{x_1x_1} - F^3_{x_2x_2}) - \lambda_3 F^3_{x_1x_2}] \end{aligned} \tag{2.101}$$

où ω_0 et λ_3 sont donnés par (2.93).

Exemple 2.4.1 Soit le système de Belousov-Zhabotinski (appelé aussi Oregonator) :

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= s(u_1 + u_2 - u_1u_2 - qu_1^2), \\ \dot{u}_2 &= s^{-1}(fu_3 - u_2 - u_1u_2), \\ \dot{u}_3 &= w(u_1 - u_3). \end{aligned} \tag{2.102}$$

f, s, q, w sont des paramètres positifs et u_1, u_2, u_3 sont positifs ou nuls [159] [89]. On désire déterminer la nature de la bifurcation de Hopf de (2.102) à $s = 100$, $f = 1.1$, $q = 10^{-6}$, le paramètre de bifurcation étant w.

Les points fixes du système (2.102) sont $u = (0,0,0)$ et $u = u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ avec

$$\begin{aligned} u_2^* &= (1 + f - qu_1^*)/2, \\ u_1^* &= u_3^* = (1/2q)\{(1 - f - q) + [(1 - f - q)^2 + 4q(1 + f)]^{1/2}\}, \quad q > 0 \\ &= (f + 1)(f - 1), \quad (q = 0, f > 1). \end{aligned}$$

Le point fixe à l'origine est toujours instable car les valeurs propres λ sont données par l'équation :

$$\lambda^3 - \lambda^2(s - s^{-1} - w) - \lambda(1 + sw - ws^{-1}) - w(1 + f) = 0.$$

Les trois racines de cette équation vérifient la condition $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = w(1 + f) > 0$. Par conséquent, il y a toujours, au moins, une racine avec partie réelle positive.

Etudions maintenant le point fixe u^*. Effectuons dans (2.102) le remplacement $u \to u^* + u$ pour amener le point fixe à l'origine. Le système devient :

$$\dot{u} = A(w)u + \hat{F}(u), \tag{2.103}$$

avec

$$A(w) = \begin{bmatrix} s(1 - u_2^* - 2qu_1^*) & s(1 - u_1^*) & 0 \\ -u_2^*/s & -(1 + u_1^*)/s & f/s \\ w & 0 & -w \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -a & -b & 0 \\ -c & -d & e \\ w & 0 & -w \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}(u) = [-su_1(u_2 + qu_1), -u_1u_2/s, 0]^T.$$

L'équation caractéristique de $A(w)$ s'écrit :

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0$$

avec

$$P = w + a + d, \quad Q = ad - bc + (a + d)w, \quad R = w(ad - bc + eb).$$

Comme $f > 1$, on a $2a = s(f - 1 + 3qu_1^*) > 0$. Donc $P > 0$. Les conditions (2.89) s'écrivent alors :

$$2q(u_1^*)^2 + u_1^*(q - 1) + f + \alpha w > 0, \tag{2.104}$$

$$\alpha w^2 + [\alpha^2 + f(1 - u_1^*)]w + \alpha[2q(u_1^*)^2 + u_1^*(q - 1) + f] = 0, \tag{2.105}$$

$$\alpha = su_2^* + (s^{-1} + 2qs)u_1^* + s^{-1} - s. \tag{2.106}$$

Si $2q(u_1^*)^2 + u_1^*(q - 1) + f < 0$ alors (2.105) possède une racine positive :

$$\begin{aligned} w_0 = -\frac{1}{2\alpha}[\alpha^2 &+ f(1 - u_1^*)] + \frac{1}{2\alpha}\{[\alpha^2 + f(1 - u_1^*)]^2 \\ &- 4\alpha^2[2q(u_1^*)^2 + u_1^*(q - 1) + f]\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.107}$$

w_0 est le point de bifurcation de Hopf du système. Pour $s = 100$, $q = 10^{-6}$, la

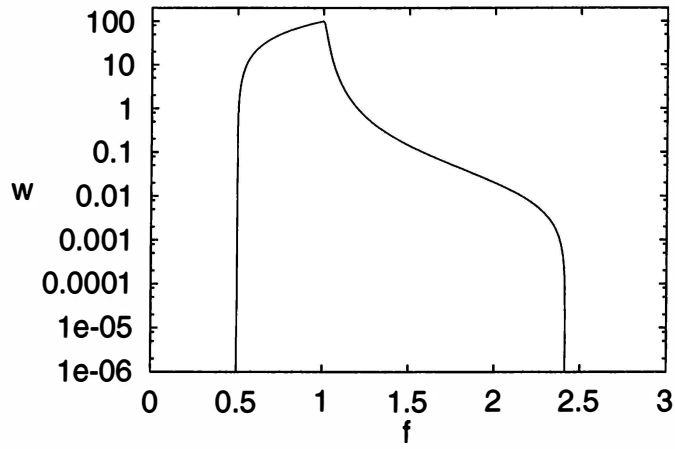


FIG. 2.15 – *Graphe de la fonction* $w_0(f)$ *pour* $s = 100$, $q = 10^{-6}$.

relation (2.107) définit une fonction $w_0(f)$ dont le graphe est donné sur la figure 2.15 (à comparer avec le graphe de [159]).

Pour $w = w_0$, posons $P(w_0) = A$, $Q(w_0) = B$; les valeurs propres de $A(w_0)$ sont, d'après (2.93),

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{B}, \quad \lambda_3 = -A. \tag{2.108}$$

(2.91) s'écrit maintenant :

$$\alpha'(w_0) = \frac{u_1^*[2qu_1^* + (q-1) + f] - B - \alpha A}{2(B + A^2)}. \tag{2.109}$$

Les éléments t_{ij} de (2.96) s'écrivent ici, avec $\alpha_1 = 2$, $\alpha_3 = 1$,

$$\begin{aligned}
t_{11} &= 2, \quad t_{12} = 0, \quad t_{13} = 1, \\
t_{21} &= -2ab^{-1}, \quad t_{22} = 2B^{1/2}b^{-1}, \quad t_{23} = (A-a)b^{-1}, \\
t_{31} &= 2w_0^2(w_0^2 + B)^{-1}, \quad t_{32} = 2B^{1/2}w_0(w_0^2 + B)^{-1}, \\
t_{33} &= -w_0(A - w_0)^{-1},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations (2.89) et (2.93). D'où :

$$T^{-1} = (A^2 + B)^{-1}\|r_{ij}\|$$

avec

$$\begin{aligned}
r_{11} &= [w_0^2 + B + (A - w_0)(A - a)]/2, \\
r_{12} &= -b(A - w_0)/2, \\
r_{13} &= (2w_0)^{-1}(w_0^2 + B)(A - w_0), \\
r_{21} &= -B^{-1/2}[(A - a)(A - w_0)w_0 - a(w_0^2 + B)]/2, \\
r_{22} &= bB^{-1/2}(Aw_0 + B)/2, \\
r_{23} &= A(2B^{1/2}w_0)^{-1}(w_0^2 + B)(A - w_0), \\
r_{31} &= (w_0 + a)(A - w_0), \quad r_{32} = b(A - w_0), \\
r_{33} &= -w_0^{-1}(w_0^2 + B)(A - w_0).
\end{aligned}$$

(2.98) donne alors :

$$F(x) = T^{-1}\hat{F}(Tx, 0) = T^{-1}G, \quad G = (G_1, G_2, G_3)^T,$$

avec

$$\begin{aligned}
G_1 &= s\{-4(q - ab^{-1})x_1^2 - (q + (A - a)b^{-1})x_3^2 - 2[2q + (A - 2a)b^{-1}]x_1x_3 \\
&\quad -2B^{1/2}b^{-1}(2x_1x_2 + x_2x_3)\}, \\
G_2 &= s^{-1}[4ab^{-1}x_1^2 - (A - a)b^{-1}x_3^2 - 2(A - 2a)b^{-1}x_1x_3 \\
&\quad -2B^{1/2}b^{-1}(2x_1x_2 + x_2x_3)], \\
G_3 &= 0.
\end{aligned}$$

On en déduit, en posant $W = A^2 + B$,

$$\begin{aligned}
& F^1_{x_1x_1x_1} = F^1_{x_1x_2x_2} = F^2_{x_2x_2x_2} = F^2_{x_1x_1x_2} = 0, \\
F^1_{x_1x_1} &= \frac{-4s}{W}[w_0^2 + B + (A - w_0)(A - a)](q - ab^{-1}) - \frac{4a}{sW}(A - w_0), \\
F^1_{x_1x_2} &= \frac{-2sB^{1/2}}{bW}[w_0^2 + B + (A - w_0)(A - a)] + \frac{2B^{1/2}}{sW}(A - w_0), \\
F^1_{x_1x_3} &= \frac{-s}{W}\left(2q + \frac{A - 2a}{b}\right)[w_0^2 + B + (A - w_0)(A - a)] \\
&\quad + \frac{1}{sW}(A - 2a)(A - w_0), \\
F^2_{x_1x_1} &= \frac{4s}{B^{1/2}W}[(A - a)(A - w_0)w_0 - a(w_0^2 + B)](q - ab^{-1}) \\
&\quad + \frac{4a}{B^{1/2}sW}(Aw_0 + B),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F^2_{x_1x_2} &= \frac{2s}{bW}[(A-a)(A-w_0)w_0 - a(w_0^2+B)] - \frac{2}{sW}(Aw_0+B),\\
F^2_{x_1x_3} &= \frac{s}{B^{1/2}W}\left(2q + \frac{A-2a}{b}\right)[(A-a)(A-w_0)w_0 - a(w_0^2+B)]\\
&\quad + \frac{1}{sB^{1/2}W}(A-2a)(Aw_0+B),\\
F^1_{x_2x_2} &= F^2_{x_2x_2} = F^3_{x_2x_2} = 0,\\
F^3_{x_1x_1} &= -\frac{8s}{W}(w_0+a)(A-w_0)(q-ab^{-1}) + \frac{8a}{sW}(A-w_0),\\
F^3_{x_1x_2} &= -\frac{4sB^{1/2}}{bW}(w_0+a)(A-w_0) - \frac{4B^{1/2}}{sW}(A-w_0),\\
F^1_{x_2x_3} &= \frac{1}{2}F^1_{x_1x_2}, \quad F^2_{x_2x_3} = \frac{1}{2}F^2_{x_1x_2}.
\end{aligned}
$$

Nous rappelons que les indices x_i désignent les dérivées partielles par rapport à x_i (Cf. formule (2.83)). Il suffit maintenant de porter ces expressions dans (2.101) pour obtenir le nombre de Lyapunov a_1.

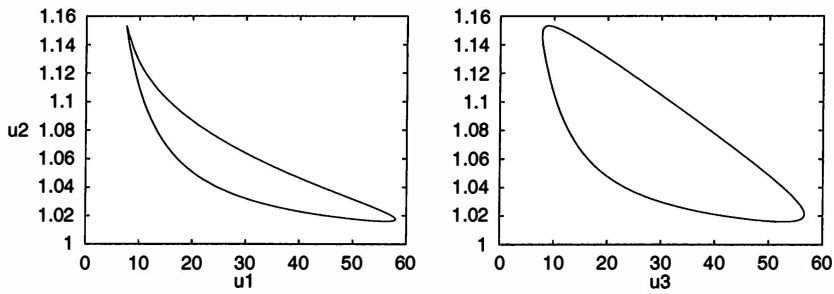


FIG. 2.16 – *Cycle limite du système de Belousov-Zhabotinski à* $w = 3.835$.

Pour $s = 100$, $f = 1.1$, $q = 10^{-6}$, on a $w_0 = 3.98292355\ldots$ et la formule (2.101) donne :

$$a_1 = -10.92\ldots \tag{2.110}$$

D'autre part, d'après (2.109), on a :

$$\alpha'(w_0) = -0.273712985\ldots \tag{2.111}$$

Ces valeurs ont été calculées par le programme 2.2. La bifurcation de Hopf est donc super-critique et la direction de bifurcation est du côté $w < w_0$. La figure 2.16 montre les projections d'un cycle limite de Hopf sur les plans (u_1, u_2) et (u_3, u_2) à $w = 3.835 < w_0$. Le cycle limite a été calculé par un programme analogue au programme 1.1.

Exemple 2.4.2 Déterminons la nature de la bifurcation de Hopf du système de Lorenz :

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\sigma u_1 + \sigma u_2, \\ \dot{u}_2 &= -u_1 u_3 + r u_1 - u_2, \\ \dot{u}_3 &= u_1 u_2 - b u_3. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Nous rappelons (voir l'exemple 1.6.4) qu'à $r > 1$ le système possède deux points fixes C et C' de coordonnées :

$$u_1^* = u_2^* = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad u_3^* = r - 1$$

respectivement. Effectuons dans (2.112) le remplacement $u \to u^* + u$ pour amener (2.112) à la forme (2.86) :

$$\dot{u} = Au + \hat{F}(u) \tag{2.113}$$

nous obtenons :

$$A = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right\|_{u=u^*} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -u_1^* \\ u_2^* & u_1^* & -b \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}^1(u) = 0, \quad \hat{F}^2(u) = -u_1 u_3, \quad \hat{F}^3(u) = u_1 u_2. \tag{2.114}$$

La matrice A a pour polynôme caractéristique :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(r + \sigma)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0. \tag{2.115}$$

Pour

$$r = r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}, \tag{2.116}$$

(2.115) a deux racines purement imaginaires et une racine réelle négative :

$$\lambda_{1,2} = \pm i w_0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{b(r_c + \sigma)} \text{ et } \lambda_3 = -(\sigma + b + 1). \tag{2.117}$$

D'où, en portant $P(r_c) = \sigma + b + 1 = -\lambda_3$, $P'(r_c) = 0$, $Q(r_c) = b(r_c + \sigma) = \omega_0^2$, $Q'(r_c) = b$, $R(r_c) = 2b\sigma(r_c - 1)$, $R'(r_c) = 2b\sigma$ dans (2.91), nous obtenons :

$$\alpha'(r_c) = \frac{b(\sigma - b - 1)}{2(\omega_0^2 + \lambda_3^2)}. \tag{2.118}$$

En choisissant dans (2.96) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 1$, on obtient :

$$T = \frac{1}{\sigma u_1^*} \begin{bmatrix} \sigma u_1^* & 0 & \sigma u_1^* \\ \sigma u_1^* & -\omega_0 u_1^* & (\sigma + \lambda_3) u_1^* \\ \omega_0^2 & \omega_0(1 + \sigma) & b\lambda_3 \end{bmatrix} \equiv \|t_{ij}\|. \tag{2.119}$$

On en déduit :

$$T^{-1} = \frac{1}{\omega_0(\lambda_3^2+\omega_0^2)} \begin{bmatrix} -\omega_0[b\lambda_3+(\sigma+\lambda_3)(1+\sigma)] & \omega_0\sigma(1+\sigma) & \sigma\omega_0 u_1^* \\ -[\sigma b\lambda_3+\omega_0^2(b+1)] & \sigma(b\lambda_3-\omega_0^2) & -\lambda_3\sigma u_1^* \\ \omega_0[\sigma(1+\sigma)+\omega_0^2] & -\omega_0\sigma(1+\sigma) & -\sigma\omega_0 u_1^* \end{bmatrix}$$
$$\equiv \|q_{ij}\|. \tag{2.120}$$

Portons (2.119), (2.120) et (2.114) dans (2.98) et calculons les dérivées partielles d'ordre 2 de $F(x)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F^i_{x_1x_1} &= 2(q_{i3}t_{21} - q_{i2}t_{31}), \\ F^i_{x_2x_2} &= 0, \\ F^i_{x_3x_3} &= 2(q_{i3}t_{23} - q_{i2}t_{33}), \\ F^i_{x_1x_2} &= F^i_{x_2x_3} = q_{i3}t_{22} - q_{i2}t_{32}, \\ F^i_{x_1x_3} &= q_{i3}(t_{21}+t_{23}) - q_{i2}(t_{31}+t_{33}), \quad i=1,2,3 \\ F^i_{x_kx_lx_j} &= 0, \quad i,j,k,l = 1,2,3. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Il suffit maintenant de porter (2.121) dans (2.101) pour trouver le nombre de Lyapunov a_1. On a le tableau suivant :

Tableau 2.1 : Système de Lorenz

b, σ	a_1	$\alpha'(r_c)$	$\delta = -a_1/\alpha'(r_c)$
$b = 8/3$, $\sigma = 10$	3.86687×10^{-3}	3.02225×10^{-2}	-1.27947×10^{-1}
$b = 10$, $\sigma = 20$	9.47803×10^{-4}	2.37550×10^{-2}	-3.98990×10^{-2}
$b = 10$, $\sigma = 40$	1.01724×10^{-3}	3.88528×10^{-2}	-2.61818×10^{-2}
$b = 20$, $\sigma = 40$	4.63320×10^{-4}	2.64859×10^{-2}	-1.74931×10^{-2}
$b = 30$, $\sigma = 40$	2.40617×10^{-4}	8.45106×10^{-3}	-2.84718×10^{-2}

Dans ce tableau $\alpha'(r_c)$ est donné par (2.118). Ces résultats ont été calculés par le programme 2.2. Noter que les valeurs de δ correspondent bien à celles de μ_2 du Tableau 3.4 de [74]. Pour ces valeurs de b et σ, la bifurcation est sous-critique et la direction de bifurcation est du côté $r < r_c$ (Cf. figure 2.17).

Systèmes à deux dimensions

a) Conditions de bifurcation et calcul de $\alpha'(\nu_c)$. Comme dans le système à trois dimensions, nous supposons que le point fixe a été ramené à l'origine. On peut donc écrire le système sous la forme :

$$\dot{u} = A(\nu)u + \hat{F}(u,\nu) \tag{2.122}$$

où

$$A(\nu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\nu) & a_{12}(\nu) \\ a_{21}(\nu) & a_{22}(\nu) \end{bmatrix}$$

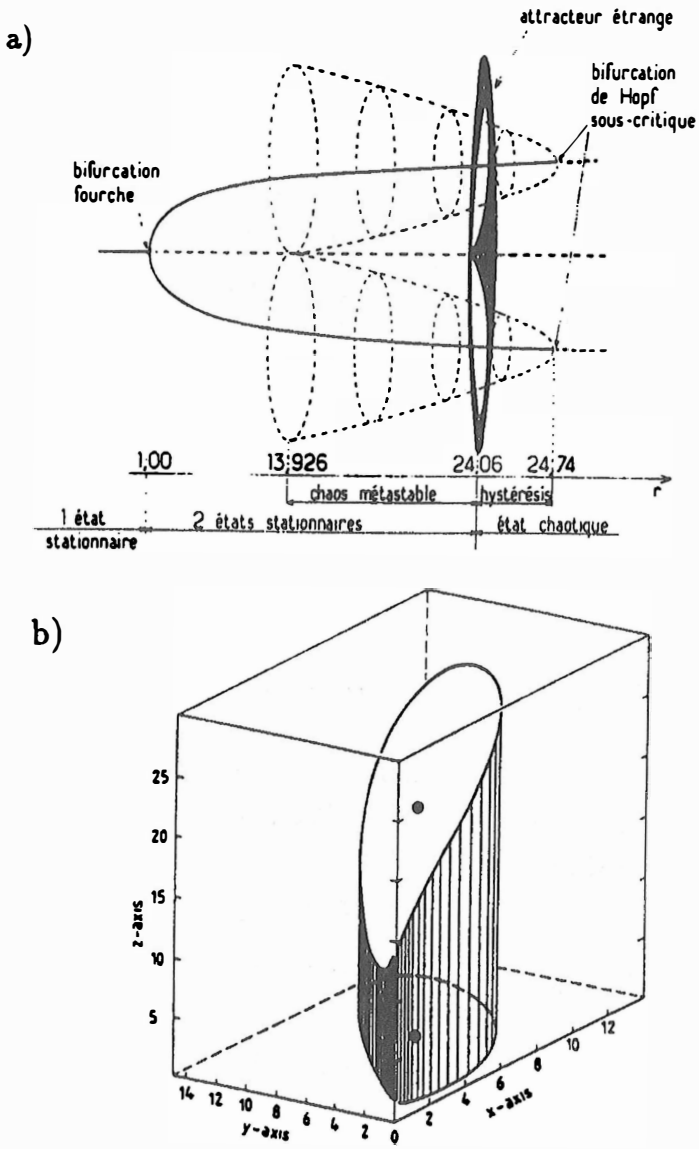


FIG. 2.17 – *Système de Lorenz à $\sigma = 10$, $b = 8/3$:*
a) diagramme de bifurcation, d'après C. Tresser [13].
b) une orbite périodique de Hopf et sa projection sur le plan (x, y) à $r = 20 < r_c \approx 24.7368\ldots$ d'après [127].

est la matrice jacobienne à l'origine. L'équation caractéristique :

$$\det |A(\nu) - \lambda I| \equiv \lambda^2 + P(\nu)\lambda + Q(\nu) = 0, \tag{2.123}$$
$$P(\nu) = -\operatorname{Tr} A(\nu), \quad Q(\nu) = \det A(\nu),$$

possède une paire de racines purement imaginaires, pour $\nu = \nu_c$, si et seulement si

$$P(\nu_c) = 0, \quad Q(\nu_c) > 0. \tag{2.124}$$

Dérivons (2.123) par rapport à ν, nous obtenons :

$$2\lambda\lambda' + P'\lambda + P\lambda' + Q' = 0. \tag{2.125}$$

Portant $\lambda(\nu) = \alpha(\nu) + i\omega(\nu)$, $\lambda'(\nu) = \alpha'(\nu) + i\omega'(\nu)$ dans (2.125), il vient :

$$2(\alpha\alpha' - \omega\omega') + P'\alpha + P\alpha' + Q' = 0,$$
$$2(\omega\alpha' + \alpha\omega') + \omega P' + P\omega' = 0. \tag{2.126}$$

Pour $\nu = \nu_c$, on a $\alpha(\nu_c) = P(\nu_c) = 0$, $\omega(\nu_c) = \sqrt{Q(\nu_c)}$. Le système (2.126) devient :

$$-2\omega(\nu_c)\omega'(\nu_c) + Q'(\nu_c) = 0,$$
$$2\omega(\nu_c)\alpha'(\nu_c) + \omega(\nu_c)P'(\nu_c) = 0, \tag{2.127}$$

d'où :

$$\alpha'(\nu_c) = -\frac{P'(\nu_c)}{2}, \quad \omega'(\nu_c) = \frac{Q'(\nu_c)}{2\omega(\nu_c)}. \tag{2.128}$$

b) Calcul de la matrice de passage T. Pour $\nu = \nu_c$, cherchons à écrire (2.122) sous la forme canonique :

$$\dot{x}_1 = -\omega_0 x_2 + F^1(x_1, x_2),$$
$$\dot{x}_2 = \omega_0 x_1 + F^2(x_1, x_2),$$

où $F = (F^1, F^2)^T$ est donné par :

$$F(x) = T^{-1}\hat{F}(Tx, \nu_c). \tag{2.129}$$

Soit $v_1 = (\xi, \eta)$, le vecteur propre de la matrice A correspondant à la valeur propre $i\omega_0$, avec $\omega_0 = \sqrt{Q(\nu_c)}$. On a :

$$(a_{11} - i\omega_0)\xi + a_{12}\eta = 0,$$
$$a_{21}\xi + (a_{22} - i\omega_0)\eta = 0. \tag{2.130}$$

On peut prendre comme solution de (2.130) :

$$v_1 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}} \begin{pmatrix} a_{12} \\ -a_{11} + i\omega_0 \end{pmatrix}, \tag{2.131}$$

d'où :

$$T = [\Re v_1 - \Im v_1] = \frac{1}{a_{12}} \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ -a_{11} & -\omega_0 \end{pmatrix},$$
$$T^{-1} = \frac{1}{\omega_0} \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}. \tag{2.132}$$

On en déduit le vecteur $F(x)$ par (2.129).

c) Calcul du coefficient a_1. Pour $x = (x_1, x_2)$ et $F^3(x) = 0$, l'équation (2.101) donne la formule (fort populaire) suivante :

$$\begin{aligned} 16a_1 &= \frac{1}{\omega_0}[(F^1_{x_1x_1} + F^1_{x_2x_2})F^1_{x_1x_2} \\ &\quad -(F^2_{x_1x_1} + F^2_{x_2x_2})F^2_{x_1x_2} - F^1_{x_1x_1}F^2_{x_1x_1} + F^1_{x_2x_2}F^2_{x_2x_2}] \\ &\quad +(F^1_{x_1x_1x_1} + F^1_{x_1x_2x_2} + F^2_{x_1x_1x_2} + F^2_{x_2x_2x_2}). \end{aligned} \tag{2.133}$$

En particulier, si :

$$\begin{aligned} F^1(x_1, x_2) &= \sum_{i+j\geq 2} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j = (\alpha_{20}x_1^2 + \alpha_{11}x_1x_2 + \alpha_{02}x_2^2) \\ &\quad +(\alpha_{30}x_1^3 + \alpha_{21}x_1^2x_2 + \alpha_{12}x_1x_2^2 + \alpha_{03}x_2^3) + \cdots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F^2(x_1, x_2) &= \sum_{i+j\geq 2} \beta_{ij} x_1^i x_2^j = (\beta_{20}x_1^2 + \beta_{11}x_1x_2 + \beta_{02}x_2^2) \\ &\quad +(\beta_{30}x_1^3 + \beta_{21}x_1^2x_2 + \beta_{12}x_1x_2^2 + \beta_{03}x_2^3) + \cdots, \end{aligned}$$

(2.133) s'écrira alors (à l'origine) :

$$\begin{aligned} &8a_1 = \\ &\frac{1}{\omega_0}[(\alpha_{20} + \alpha_{02})\alpha_{11} - (\beta_{20} + \beta_{02})\beta_{11} - 2(\alpha_{20}\beta_{20} - \alpha_{02}\beta_{02})] \\ &+3(\alpha_{30} + \beta_{03}) + \alpha_{12} + \beta_{21}. \end{aligned} \tag{2.134}$$

Cette formule est particulièrement utile dans l'étude des cycles limites des systèmes quadratiques [133].

Exemple 2.4.3 Considérons le Bruxellateur (Cf. exemple 1.4.2) :

$$\frac{du_1}{dt} = a - (\nu + 1)u_1 + u_1^2u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = \nu u_1 - u_1^2u_2 \tag{2.135}$$

avec $a > 0$, $\nu > 0$.

Ce système a un état d'équilibre $(u_1^*, u_2^*) = (a, \nu/a)$. La matrice jacobienne au point d'équilibre s'écrit :

$$A(\nu) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right\|_{u=u^*} = \begin{bmatrix} \nu - 1 & a^2 \\ -\nu & -a^2 \end{bmatrix}.$$

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^2 + (1 + a^2 - \nu)\lambda + a^2 = 0. \tag{2.136}$$

Posons :

$$\alpha(\nu) = \frac{\nu - 1 - a^2}{2}.$$

Si $\alpha(\nu)^2 - a^2 < 0$, (2.136) aura une paire de racines complexes conjuguées :

$$\lambda_{1,2} = \alpha(\nu) \pm i\omega(\nu) \text{ avec } \omega(\nu) = \sqrt{a^2 - \alpha(\nu)^2}. \tag{2.137}$$

Lorsque $\nu < (1 + a^2)$, le point d'équilibre $(x, y) = (a, \nu/a)$ est un point asymptotiquement stable. A $\nu = \nu_c = 1 + a^2$, la matrice jacobienne a deux valeurs propres purement imaginaires :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \text{ avec } \omega_0 = a.$$

Etudions la nature de la bifurcation à $\nu = \nu_c$ pour $a = 1$. On déduit de (2.136), pour $a = 1$:

$$\lambda = \frac{\nu - 2 \pm \sqrt{(\nu - 2)^2 - 4}}{2}, \tag{2.138}$$

d'où :

$$\alpha'(2) = 0.5 > 0. \tag{2.139}$$

(On pourrait aussi calculer $\alpha'(2)$ à partir de (2.128)). Les conditions du théorème de Poincaré-Andronov-Hopf sont donc vérifiées.

Pour amener le point fixe à l'origine, nous remplaçons dans (2.135) u par $u^* + u$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} &\dot{u} = A(\nu)u + \hat{F}(u, \nu), \quad \hat{F} = (\hat{F}^1, \hat{F}^2)^T, \\ &\hat{F}^1(u, \nu) = -\hat{F}^2(u, \nu) = \nu u_1^2 + u_1^2 u_2 + 2u_1 u_2. \end{aligned} \tag{2.140}$$

On déduit de (2.131) et (2.132) :

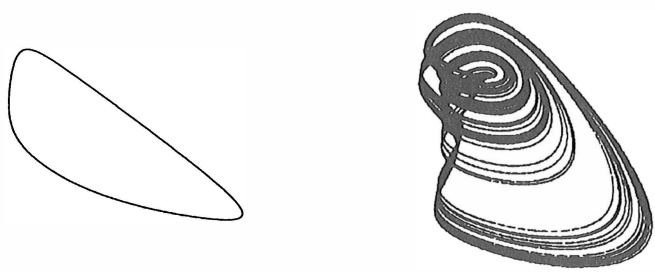


FIG. 2.18 – *L'orbite périodique du Bruxellateur à $a = 1, \nu = 2.5 > \nu_c$ (à gauche) et l'orbite chaotique du Bruxellateur forcé à $a = 0.4, \nu = 1.2, A = 0.05, f = 0.95$ (à droite).*

$$T = [\Re v_1 - \Im v_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = T^{-1}. \tag{2.141}$$

Connaissant maintenant $\hat{F}$ et T, on remonte par (2.129) au vecteur $F = (F^1, F^2)^T$; il vient :

$$F^1(x) = -2x_1x_2 - x_1^2x_2 - x_1^3, \quad F^2(x) = 0. \tag{2.142}$$

Portant (2.142) dans (2.133), où les dérivées partielles sont calculées au point $x_1 = x_2 = 0$, on obtient :

$$a_1 = -3/8. \tag{2.143}$$

On déduit de (2.139) et (2.143) que la bifurcation de Hopf à $\nu = \nu_c = 2$ est surcritique et que la direction de bifurcation est du côté $\nu > 2$. La figure 2.18 (gauche) montre l'orbite périodique du Bruxellateur à $\nu = 2.5$, obtenue par un programme analogue au programme 1.1.

Remarque 2.4.1 K. Tomita et T. Kai (voir [85] p. 32) ont ajouté à (2.135) un terme forcé sinusoïdal :

$$\frac{du_1}{dt} = a - (\nu + 1)u_1 + u_1^2 u_2 + A\cos ft, \quad \frac{du_2}{dt} = \nu u_1 - u_1^2 u_2, \tag{2.144}$$

et obtiennent, pour $a = 0.4, \nu = 1.2, A = 0.05$, une séquence de doublements de périodes avec $f = 0.6, 0.8, 0.83, 0.84$ et un attracteur chaotique à $f = 0.95$. Ce dernier est donné sur la figure 2.18 (droite).

2.5 La bifurcation du système de Rössler

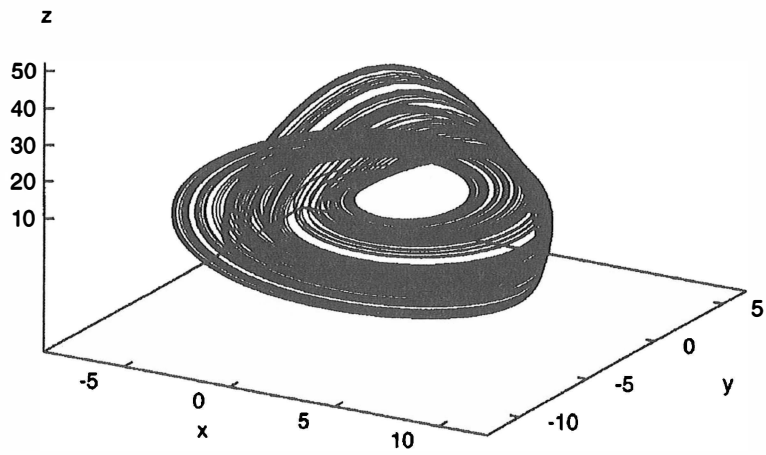


FIG. 2.19 – *L'attracteur de Rössler avec* $a = 0.38, b = 0.3, c = 4.5$.

Dans ce paragraphe, nous présentons, comme introduction aux bifurcations de codimension 2, la bifurcation du modèle de Rössler. L'exposé de la bifurcation suit le travail de Gaspard [62]. Cependant pour simplifier le propos, nous nous arrêtons à l'ordre 2.

Le système de Rössler s'écrit :

$$\dot{u}_1 = -u_2 - u_3, \quad \dot{u}_2 = u_1 + au_2, \quad \dot{u}_3 = bu_1 - cu_3 + u_1 u_3. \tag{2.145}$$

Un dessin de la trajectoire par un programme analogue au programme 1.1 est donné sur la figure 2.19. Ce système possède deux points fixes :

1) Premier point fixe :

$$O : \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

avec les valeurs propres de la matrice jacobienne données par :

$$\lambda^3 + (c-a)\lambda^2 + (1+b-ac)\lambda + (c-ab) = 0. \tag{2.146}$$

2) Deuxième point fixe :

$$P : \quad u_1 = c - ab, \quad u_2 = b - c/a, \quad u_3 = c/a - b \tag{2.147}$$

avec les valeurs propres de la matrice jacobienne données par :

$$\lambda^3 + a(b-1)\lambda^2 + (1 + c/a - a^2 b)\lambda - (c - ab) = 0. \tag{2.148}$$

Il y a collision des deux points fixes sur la surface $c = ab$ de l'espace des paramètres. Les valeurs propres communes sont alors données par :

$$(\pm i\omega, 0) \quad \text{avec } \omega = (2-a^2)^{1/2} \text{ si } b = 1, \ -\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}. \tag{2.149}$$

L'ensemble des points de bifurcation de ce type est le segment,

$$b = 1, \quad c = a, \quad -\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}, \tag{2.150}$$

dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des paramètres. C'est donc une bifurcation de codimension 2. Nous allons chercher le déploiement autour du point de bifurcation $b = 1$, $c = ab = a$; pour cela nous posons :

$$b = 1 + \epsilon_1, \quad c = a + \epsilon_2. \tag{2.151}$$

Réduction à la forme normale

Quand $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, le système (2.145) s'écrit :

$$\dot{u} = Au + \hat{F}(u) \tag{2.152}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix}$$

et $\hat{F}(\xi) = (0, 0, u_1 u_3)^T$. La réduction débute par la mise de (2.152) sous la forme (2.97)-(2.98). Les valeurs propres de la matrice A sont données par (2.149). Par rapport à la base des vecteurs propres,

$$v_1 = (2, -a - i\omega, a - i\omega), \quad v_2 = \bar{v}_1, \quad v_3 = (a, -1, 1),$$

les nouvelles variables, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, sont liées aux anciennes par :

$$u = T\eta, \quad \eta = T^{-1}u$$

où T est la matrice de passage $[\Re v_1, -\Im v_1, v_3]$:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a \\ -a & \omega & -1 \\ a & \omega & 1 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 1 & a/2 & -a/2 \\ 0 & \omega/2 & \omega/2 \\ -a & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

où l'on a tenu compte de la relation : $\omega^2 + a^2 = 2$. L'équation (2.152) s'écrit alors :

$$\dot{\eta} = A'\eta + F(\eta),$$

avec

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(\eta) = T^{-1}\hat{F}(T\eta)$$

ou, en posant $\chi = \eta_1 + i\eta_2$,

$$\dot{\chi} = i\omega\chi - \frac{a - i\omega}{2\omega^2}\Phi(\chi, \bar{\chi}, \eta_3), \quad \dot{\eta}_3 = \frac{1}{\omega^2}\Phi(\chi, \bar{\chi}, \eta_3), \tag{2.153}$$

avec

$$\Phi(\chi, \bar{\chi}, \eta_3) = (\chi + \bar{\chi} + a\eta_3)[\frac{1}{2}(a - i\omega)\chi + \frac{1}{2}(a + i\omega)\bar{\chi} + \eta_3].$$

Pour éliminer les termes non-résonnants d'ordre 2, on effectue une transformation quadratique $\eta = \zeta + h^{(2)}\zeta\zeta$ que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \chi &= \psi + \alpha_{11}\psi^2 + \alpha_{12}\psi\bar{\psi} + \alpha_{22}\bar{\psi}^2 + \alpha_{13}\psi\zeta_3 + \alpha_{23}\bar{\psi}\zeta_3 + \alpha_{33}\zeta_3^2, \\ \eta_3 &= \zeta_3 + \beta_{11}\psi^2 + \beta_{12}\psi\bar{\psi} + \beta_{22}\bar{\psi}^2 + \beta_{13}\psi\zeta_3 + \beta_{23}\bar{\psi}\zeta_3 + \beta_{33}\zeta_3^2, \end{aligned}$$

avec $\psi = \zeta_1 + i\zeta_2$. (2.153) prendra alors la forme suivante :

$$(1 + A_1)\dot{\psi} = -A_2\dot{\bar{\psi}} - A_3\dot{\zeta}_3 + f(\psi, \bar{\psi}, \zeta_3), \tag{2.154}$$

$$(1 + B_1)\dot{\zeta}_3 = -B_2\dot{\psi} - B_3\dot{\bar{\psi}} + g(\psi, \bar{\psi}, \zeta_3) \tag{2.155}$$

où l'on a posé $A_1 = 2\alpha_{11}\psi + \alpha_{12}\bar{\psi} + \alpha_{13}\zeta_3$, $A_2 = \alpha_{12}\psi + 2\alpha_{22}\bar{\psi} + \alpha_{23}\zeta_3$, $A_3 = \alpha_{13}\psi + \alpha_{23}\bar{\psi} + 2\alpha_{33}\zeta_3$, $B_1 = \beta_{13}\psi + \beta_{23}\bar{\psi} + 2\beta_{33}\zeta_3$, $B_2 = 2\beta_{11}\psi + \beta_{12}\bar{\psi} + \beta_{13}\zeta_3$, $B_3 = \beta_{12}\psi + 2\beta_{22}\bar{\psi} + \beta_{23}\zeta_3$ et $f(\psi, \bar{\psi}, \zeta_3)$, $g(\psi, \bar{\psi}, \zeta_3)$ sont les seconds membres du système (2.153). A l'ordre considéré, on peut remplacer, dans la première relation, $\dot{\bar{\psi}}$ et $\dot{\zeta}_3$, respectivement par $-i\omega\bar{\psi}$ et 0 et, dans la seconde relation, $\dot{\psi}$ et $\dot{\bar{\psi}}$ par $i\omega\psi$ et $-i\omega\bar{\psi}$. D'autre part, pour isoler $\dot{\psi}$ et $\dot{\zeta}_3$ on multiplie (2.154) par $(1 - A_1)$ et (2.155) par $(1 - B_1)$ (voir l'exemple 1.9.3). Après l'élimination des termes non-résonnants, en prenant :

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{i(a - i\omega)^2}{4\omega^3}, \quad \alpha_{22} = -\frac{i}{6\omega^3}, \quad \alpha_{23} = -\frac{\omega + 2ia}{4\omega^3}, \\ \alpha_{12} &= \alpha_{33} = -\frac{a(\omega + ia)}{2\omega^3} = 2a\beta_{11} = 2a\bar{\beta}_{22}, \\ \beta_{13} &= -\frac{a\omega + i(2 + a^2)}{2\omega^3} = \bar{\beta}_{23}, \quad \alpha_{13}, \beta_{12}, \beta_{33} \text{ arbitraires}, \end{aligned}$$

on obtient le système simplifié suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= i\omega\psi - \frac{a}{\omega^2}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{i\omega(1+a^2)}{2a}\right]\psi\zeta_3,\\ \dot{\zeta}_3 &= \frac{a}{\omega^2}(\zeta_3^2 + \psi\bar{\psi}), \text{ avec } \psi = \zeta_1 + i\zeta_2\end{aligned}$$

où les termes résonnants sont indépendants des α_{ij}, β_{ij}. Finalement, par un changement d'échelles,

$$\zeta_1 = -\frac{\omega^2}{a}x, \quad \zeta_2 = -\frac{\omega^2}{a}y, \quad \zeta_3 = -\frac{\omega^2}{a}z,$$

on obtient la forme normale de Guckenheimer-Holmes [68] :

$$\dot{q} = i\omega q + (\alpha + i\beta)zq, \quad \dot{z} = -z^2 - |q|^2, \quad q = x + iy, \tag{2.156}$$

avec

$$\alpha = \frac{a^2}{2}, \quad \beta = -\frac{\omega(a^2+1)}{2a}. \tag{2.157}$$

Le déploiement de (2.156) est, d'après [68],

$$\dot{q} = (\mu_1 + i\omega)q + (\alpha + i\beta)zq, \quad \dot{z} = \mu_2 - z^2 - |q|^2. \tag{2.158}$$

Pour calculer μ_1, μ_2 en fonction des paramètres ϵ_1, ϵ_2 de (2.151), on remarque que les points fixes de (2.158) sont :

$$P_\pm : \quad |q| = 0, \quad z = \pm\sqrt{\mu_2} \text{ si } \mu_2 > 0.$$

Il suffit alors d'identifier les valeurs propres à $P_\pm$ (calculées en fonction de μ_1, μ_2) avec les valeurs propres à O et P (calculées en fonction de ϵ_1, ϵ_2).

Dans le système de coordonnées $(q, \bar{q}, z)$, la matrice jacobienne aux points fixes $P_\pm$ est diagonale :

$$J(0,0,\pm\sqrt{\mu_2}) = \begin{bmatrix} \mu_1 + i\omega \pm (\alpha + i\beta)\sqrt{\mu_2} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 - i\omega \pm (\alpha - i\beta)\sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mp 2\sqrt{\mu_2} \end{bmatrix}.$$

On en déduit les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 pour P_+ :

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\omega + (\alpha + i\beta)\sqrt{\mu_2}, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \quad \lambda_3 = -2\sqrt{\mu_2},$$

d'où :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2\mu_1 + 2(\alpha - 1)\sqrt{\mu_2}.$$

Comme on identifie P_+ à O, λ_1, λ_2, λ_3 sont aussi racines de (2.146), d'où :

$$2\mu_1 + 2(\alpha - 1)\sqrt{\mu_2} = -(c - a),$$

d'après les relations entre les racines et coefficients d'un polynôme. On trouve une relation analogue pour P_- :

$$2\mu_1 - 2(\alpha - 1)\sqrt{\mu_2} = -a(b - 1).$$

On en déduit que :

$$\mu_1 = -\frac{1}{4}(a\epsilon_1 + \epsilon_2), \quad \mu_2 = \frac{(a\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{4(a^2-2)^2}$$

où l'on a tenu compte de (2.151) et (2.157).

Diagramme de bifurcation

Nous écrirons (2.158) en coordonnées cylindriques $(q = re^{i\phi}, z)$:

$$a) \quad \dot{r} = (\mu_1 + \alpha z)r, \quad b) \quad \dot{z} = \mu_2 - z^2 - r^2, \quad c) \quad \dot{\phi} = \omega + \beta z. \tag{2.159}$$

L'équation (2.159c) peut être découplée des deux autres. Le diagramme de bifurcation du système (2.159a)-(2.159b) est donné sur la figure 2.20. Noter qu'un point fixe dans le plan (r, z) correspond à une orbite périodique et qu'un cycle limite correspond à un tore dans l'espace à trois dimensions etc. (Cf. figures 2.21). Si $\mu_2 > 0$, le système (2.159a)-(2.159b) possède deux points fixes :

$$r = 0, \quad z = \pm\sqrt{\mu_2}$$

et, à l'intérieur de la parabole L d'équation,

$$\mu_2 = \mu_1^2/\alpha^2,$$

un troisième point fixe :

$$r = \left(\mu_2 - \frac{\mu_1^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}, \quad z = -\frac{\mu_1}{\alpha}. \tag{2.160}$$

Dans le système de coordonnées cylindriques (r, ϕ, z), ce point fixe correspond à un cycle limite.

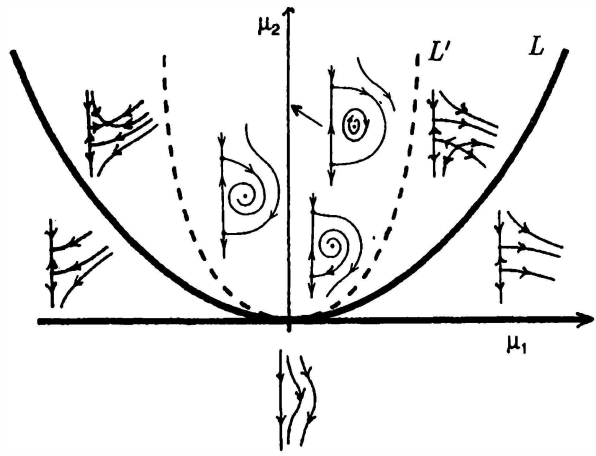


FIG. 2.20 – *Diagramme de bifurcation du modèle de Rössler.*

La stabilité des points fixes est donnée par les valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$J(r, z) = \begin{pmatrix} \mu_1 + \alpha z & \alpha r \\ -2r & -2z \end{pmatrix} \tag{2.161}$$

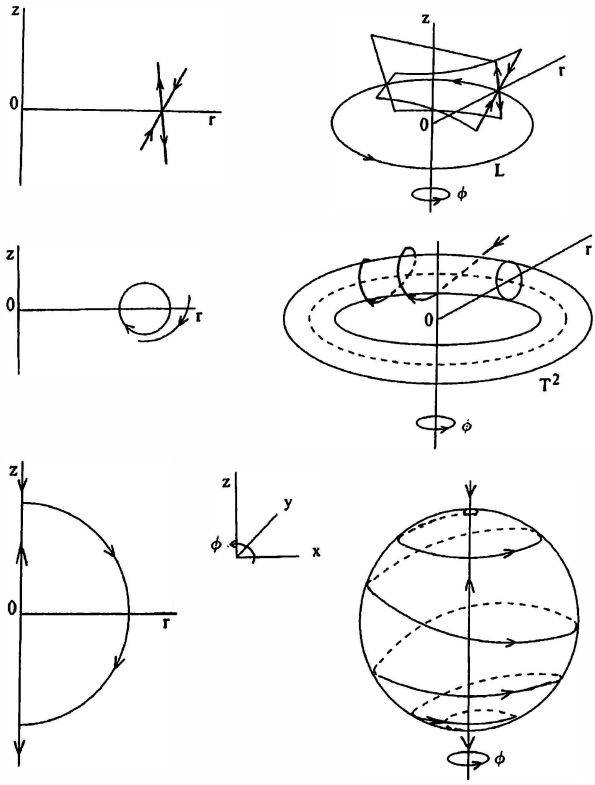


FIG. 2.21 – *Orbite périodique L, point selle, tore T^2 et orbite hétérocline dans (r, ϕ, z).*

en ces points. Pour les points fixes $(r, z) = (0, \pm\sqrt{\mu_2})$, la matrice (2.161) est diagonale :

$$J(0, \pm\sqrt{\mu_2}) = \begin{pmatrix} \mu_1 \pm \alpha\sqrt{\mu_2} & 0 \\ 0 & \mp 2\sqrt{\mu_2} \end{pmatrix}.$$

On en déduit, pour ces points, le tableau suivant :

Tableau 2.2 :

(r, z)	$(0, +\sqrt{\mu_2})$	$(0, -\sqrt{\mu_2})$
$\mu_1 > \alpha\sqrt{\mu_2}$	selle	source
$\alpha\sqrt{\mu_2} > \mu_1 > -\alpha\sqrt{\mu_2}$	selle	selle
$-\alpha\sqrt{\mu_2} > \mu_1$	puits	selle

La matrice (2.161) pour le point fixe (2.160) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\alpha^2\mu_2 - \mu_1^2} \\ -\frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2\mu_2 - \mu_1^2} & 2\frac{\mu_1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu_1 \pm \sqrt{(1+2\alpha)\mu_1^2 - 2\alpha^3\mu_2}}{\alpha}.$$

Elles sont complexes conjuguées à l'intérieur de la parabole L' d'équation :

$$(1+2\alpha)\mu_1^2 - 2\alpha^3\mu_2 = 0$$

et on peut voir facilement que, sur l'axe $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$, on a une bifurcation de Hopf au point fixe (2.160) (Cf. figure 2.20).

2.6 Champs de gradients - Théorie de Thom

Dans ce paragraphe, nous supposons que (2.1) est un système gradient, c'est-à-dire, qu'il existe un potentiel $V(x,\nu)$ tel que :

$$f(x,\nu) = -\nabla V(x,\nu)$$

et nous étudierons les ensembles catastrophes de ce système (voir le paragraphe 3.2). Les équations (2.1) (2.6) et (2.7) s'écrivent alors :

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla V(x,\nu), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad \nu \in D \subset \mathbb{R}^p, \tag{2.162}$$

$$\nabla V(x_0,\nu_0) = 0, \tag{2.163}$$

$$\det \left| \frac{\partial^2 V(x_0,\nu_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right| = 0, \tag{2.164}$$

respectivement. Eliminant x_0 entre (2.163) et (2.164), on obtient l'ensemble catastrophe.

Exemple 2.6.1 Considérons un système gradient à une dimension avec

$$V(x,\nu_1,\nu_2) = 2x^3 + \nu_2 x^2 + \nu_1 x. \tag{2.165}$$

(2.163) et (2.164) s'écrivent respectivement :

$$V'(x_0,\nu_1,\nu_2) = 6x_0^2 + 2\nu_2 x_0 + \nu_1 = 0 \tag{2.166}$$

et

$$V''(x_0,\nu_1,\nu_2) = 12x_0 + 2\nu_2 = 0. \tag{2.167}$$

Eliminant x_0 entre (2.166) et (2.167), on obtient l'ensemble catastrophe du système,

$$K = \{(\nu_1,\nu_2) : \nu_1 = \nu_2^2/6\}.$$

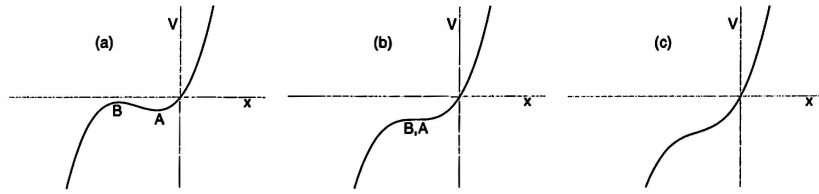


FIG. 2.22 – *Le potentiel* $V(x, \nu_1, \nu_2) = 2x^3 + \nu_2 x^2 + \nu_1 x$ *avec (a)* $\nu_1 < \nu_2^2/6$. *(b)* $\nu_1 = \nu_2^2/6$. *(c)* $\nu_1 > \nu_2^2/6$.

C'est une parabole dans le plan (ν_1, ν_2). Pour $\nu_1 < \nu_2^2/6$, le système a deux points critiques :

$$A : x_0 = -\nu_2 + \sqrt{\nu_2^2 - 6\nu_1}, \quad B : x_0 = -\nu_2 - \sqrt{\nu_2^2 - 6\nu_1}$$

correspondant aux deux extréma de V (Cf. figure 2.22a). Pour $\nu_1 > \nu_2^2/6$, le système a zéro point critique. Les deux points critiques A et B s'annihilent et disparaissent sur K. Un système qui se trouve initialement au point d'équilibre stable A, minimum de V, quand $\nu_1 < \nu_2^2/6$, se déplace subitement vers $x = -\infty$ lorsque les paramètres traversent l'ensemble K.

En théorie des catastrophes, on dit souvent *singularité* au lieu de point fixe ou point critique. De même, la codimension (Cf. Section 2.1) + 1 est appelée nombre de Milnor [42]. Si le déterminant de (2.164) est de rang $n - k$, alors la catastrophe est appelée catastrophe de *corang* k. Dans ce cas, les singularités de (2.162) sont équivalentes (topologiquement) à celles d'un système canonique de dimension k. Les $n - k$ autres variables ne jouent aucun rôle dans la description des singularités (voir l'exemple 2.3.2 et l'exemple 2.6.2 ci-dessous).

R. Thom [156] a entrepris de classer tous les systèmes gradients de codimension comprise entre 1 et 4 (ou de nombre de Milnor compris entre 2 et 5). Le résultat est le suivant.

Théorème 2.6.1 (Thom) *Pour un système gradient de codimension inférieure ou égale à 4, le corang d'une catastrophe en* x_0 *est au plus égal à 2. Les catastrophes de corang un sont données par le tableau 2.3 et les catastrophes de corang deux sont données par le tableau 2.4.*

Tableau 2.3 : Catastrophes de corang 1

Nom	Potentiel $V(x, \nu)$	Codimension
Pli	$x^3 + \nu x$	1
Fronce	$x^4 + \nu_2 x^2 + \nu_1 x$	2
Queue d'aronde	$x^5 + \nu_3 x^3 + \nu_2 x^2 + \nu_1 x$	3
Papillon	$x^6 + \nu_4 x^4 + \nu_3 x^3 + \nu_2 x^2 + \nu_1 x$	4

Tableau 2.4 : Catastrophes de corang 2

Nom	Potentiel $V(x,y,\nu)$	Codimension
Ombilic elliptique	$x^3 - 3xy + \nu_1(x^2+y^2) + \nu_2 x + \nu_3 y$	3
Ombilic hyperbolique	$x^3 + y^3 + \nu_1 xy + \nu_2 x + \nu_3 y$	3
Ombilic parabolique	$x^4 + x^2 y + \nu_1 x^2 + \nu_2 y^2 + \nu_3 x + \nu_4 y$	4

La catastrophe "Pli" n'est-autre que la bifurcation nœud-col dans le cas d'un système gradient. La catastrophe "Fronce" est aussi appelée catastrophe de Riemann-Hugoniot.

Exemple 2.6.2 Considérons le système gradient suivant [94] :

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \tag{2.168}$$

avec

$$V(x,y,\nu) = x^3 - 4xy + \nu_1 x^2 + \nu_2 x + 4y^2.$$

Les points critiques de (2.168) sont donnés par le système :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 4y + 2\nu_1 x + \nu_2 = 0, \tag{2.169}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -4x + 8y = 0. \tag{2.170}$$

L'équation (2.164) s'écrit ici :

$$\begin{vmatrix} 6x + 2\nu_1 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 48x + 16\nu_1 - 16 = 0. \tag{2.171}$$

Eliminant x et y de (2.169)-(2.171), on obtient l'ensemble catastrophe :

$$\nu_2 = \frac{1}{3}(1-\nu_1)^2.$$

Pour classer le système (2.168), effectuons dans (2.168) le changement de variables suivant :

$$u = x + \frac{1}{3}(\nu_1 - 1), \quad v = x - 2y,$$

nous obtenons le nouveau système gradient :

$$\dot{u} = -\frac{\partial V}{\partial u} = 3u^2 + c, \tag{2.172}$$

$$\dot{v} = -\frac{\partial V}{\partial v} = 2v, \tag{2.173}$$

avec $V(u,v,c) = u^3 + cu + v^2$, $c = \nu_2 - (\nu_1 - 1)^2/3$. L'équation (2.173) ne joue aucun rôle dans la bifurcation (la deuxième valeur propre de la matrice jacobienne de (2.172)-(2.173) est -2). L'exemple suivant montre que le potentiel V est un Pli.

Exemple 2.6.3 *Le Pli (fold).* La forme canonique du potentiel s'écrit :

$$V(x,u) = x^3 + ux.$$

Le point critique est donné par :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 + u = 0. \tag{2.174}$$

C'est l'équation d'une parabole dans le plan (u,x) (Cf. figure 2.23). L'ensemble catastrophe $K(u)$ est obtenu en éliminant x de (2.174) et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 6x = 0; \tag{2.175}$$

on en déduit $K(u) = \{0\}$.

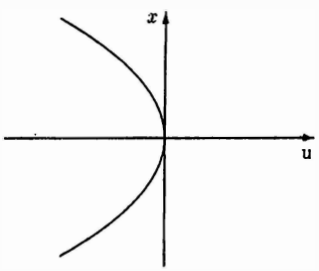


FIG. 2.23 – *Le Pli (fold).*

Exemple 2.6.4 *La Fronce (cusp).* La forme canonique du potentiel s'écrit :

$$V(x,u) = x^4 + ux^2 + vx.$$

Le point critique est donné par :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4x^3 + 2ux + v = 0. \tag{2.176}$$

L'ensemble catastrophe $K(u,v)$ est obtenu en éliminant x de (2.176) et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 12x^2 + 2u = 0; \tag{2.177}$$

on en déduit (Cf. figure 2.24) :

$$K(u,v) = \{(u,v) | 27v^2 + 8u^3 = 0\}.$$

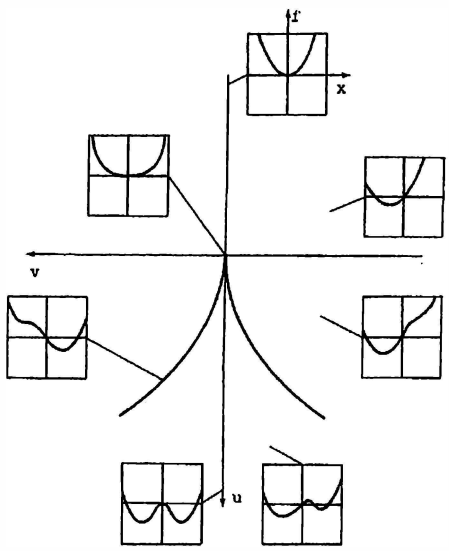


FIG. 2.24 – *La Fronce (cusp). D'après [22].*

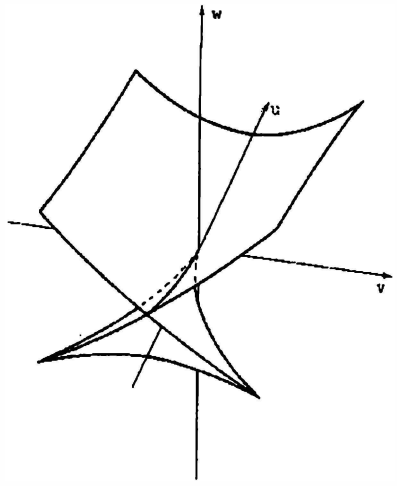


FIG. 2.25 – *La queue d'aronde (swallow-tail). D'après [22].*

Exemple 2.6.5 *La queue d'aronde (swallow-tail).* La forme canonique du potentiel s'écrit :

$$V(x,u) = x^5 + ux^3 + vx^2 + w.$$

L'ensemble catastrophe $K(u,v,w)$ est défini par le système paramétrique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= 5x^4 + 3ux^2 + 2vx + w = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 20x^3 + 6ux + 2v = 0; \end{aligned}$$

$K(u,v,w)$ a la forme présentée sur la figure 2.25.

Exemple 2.6.6 *L'ombilic elliptique.* La forme canonique du potentiel s'écrit :

$$V(x,u) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + w(x^2+y^2) - ux - vy.$$

Le point critique (x,y) est donné par le système :

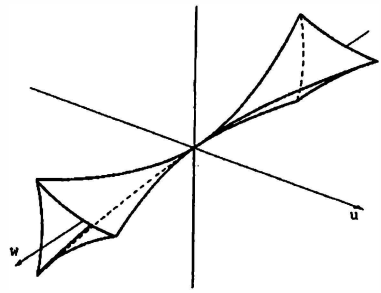


FIG. 2.26 – *L'ombilic elliptique. D'après [22].*

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= x^2 - y^2 + 2wx - u = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -2xy + 2wy - v = 0. \end{aligned}$$

(2.164) s'écrit ici :

$$\begin{vmatrix} 2x+2w & -2y \\ -2y & -2x+2w \end{vmatrix} = -4x^2 - 4y^2 + 4w^2 = 0.$$

On en déduit la représentation paramétrique de l'ensemble catastrophe $K(u,v,w)$:

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 + 2wx, \\ v &= -2xy + 2wy, \\ w^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

L'ensemble $K(u,v,w)$ est montré sur la figure 2.26.

2.7 Programmes

Programme 2.1 *Programme Mathematica [171]. Soient*

$$G(z,\bar{z}) = f(x,y) + ig(x,y), \quad \bar{G}(z,\bar{z}) = f(x,y) - ig(x,y),$$

avec $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. *Ce programme calcule les dérivées partielles de* $G(z,\bar{z})$ *et* $\bar{G}(z,\bar{z})$ *par rapport à* $z, \bar{z}$ *en fonction des dérivées partielles de* $f(x,y)$ *et* $g(x,y)$ *par rapport à* x, y *grâce aux formules :*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

```
In[1]:=
   G[0, 0][x_,y_]:=f[x,y]+ I g[x,y]
In[2]:=
   Gb[0, 0][x_,y_]:=f[x,y]- I g[x,y]
In[3]:=
   n=4
Out[3]:=
   4
In[4]:=
   Do[G[i,0][x,y]=1/2(D[G[i-1,0][x,y],x]-
                  I D[G[i-1,0][x,y],y]),{i,n}]
In[5]:=
   Do[G[0,j][x,y]=1/2(D[G[0,j-1][x,y],x]+
                  I D[G[0,j-1][x,y],y]),{j,n}]
In[6]:=
   Do[Do[G[i,j][x,y]=1/2(D[G[i,j-1][x,y],x]+
                  I D[G[i,j-1][x,y],y]),{j,n}],{i,n}]
In[7]:=
   Do[Do[h[i,j]=Simplify[G[i,j][x,y]],{i,0,n}],{j,0,n}]
In[8]:=
   Do[Gb[i,0][x,y]=1/2(D[Gb[i-1,0][x,y],x]-
                  I D[Gb[i-1,0][x,y],y]),{i,n}]
In[9]:=
   Do[Gb[0,j][x,y]=1/2(D[Gb[0,j-1][x,y],x]+
                  I D[Gb[0,j-1][x,y],y]),{j,n}]
In[10]:=
   Do[Do[Gb[i,j][x,y]=1/2(D[Gb[i,j-1][x,y],x]+
                  I D[Gb[i,j-1][x,y],y]),{j,n}],{i,n}]
In[11]:=
   Do[Do[hb[i,j] = Simplify [Gb[i,j][x,y]],
                     {i,0,n}],{j,0,n}]
```

Exemples :

a) Calcul de $G_{z\bar{z}}$ *:*

```
In[12]:=
   h[1,1]
```

```
Out[12]:=
  (0,2)             (0,2)
(f     [x, y] + I g     [x, y] +
     (2,0)             (2,0)
    f     [x, y] + I g     [x, y]) / 4
```

$G_{z\bar{z}} = (f_{yy} + ig_{yy} + f_{xx} + ig_{xx})/4.$

b) Calcul de $\bar{G}_{z\bar{z}}$:

```
In[13]:=
   hb[1,1]
Out[13]:=
  (0,2)             (0,2)
(f     [x, y] - I g     [x, y] +
     (2,0)             (2,0)
    f     [x, y] - I g     [x, y]) / 4
```

$\bar{G}_{z\bar{z}} = (f_{yy} - ig_{yy} + f_{xx} - ig_{xx})/4.$

c) Calcul de $G_{\bar{z}\bar{z}}$:

```
In[14]:=
   h[0,2]
Out[14]:=
   (0,2)             (0,2)
(-f     [x, y] - I g     [x, y] +
         (1,1)             (1,1)
    2 I f     [x, y] - 2 g     [x, y] +
     (2,0)             (2,0)
    f     [x, y] + I g     [x, y]) / 4
```

$G_{\bar{z}\bar{z}} = (-f_{yy} - ig_{yy} + 2if_{xy} - 2g_{xy} + f_{xx} + ig_{xx})/4.$

On a de façon analogue :

d) Calcul de $\bar{G}_{zz}$:

```
In[15]:=
   hb[2,0]
Out[15]:=
   (0,2)             (0,2)
(-f     [x, y] + I g     [x, y] -
         (1,1)             (1,1)
    2 I f     [x, y] - 2 g     [x, y] +
     (2,0)             (2,0)
    f     [x, y] - I g     [x, y]) / 4
```

e) Calcul de G_{zz} :

```
In[16]:=
   h[2,0]
```

```
Out[16]:=
   (0,2)              (0,2)
(-f     [x, y] - I g      [x, y] -
         (1,1)             (1,1)
    2 I f      [x, y] + 2 g      [x, y] +
     (2,0)             (2,0)
    f      [x, y] + I g      [x, y]) / 4
```

f) Calcul de $\bar{G}_{\bar{z}\bar{z}}$:

```
In[17]:=
   hb[0,2]
Out[17]:=
   (0,2)              (0,2)
(-f     [x, y] + I g      [x, y] +
         (1,1)             (1,1)
    2 I f      [x, y] + 2 g      [x, y] +
     (2,0)             (2,0)
    f      [x, y] - I g      [x, y]) / 4
```

g) Calcul de $G_{zz\bar{z}}$:

```
In[18]:=
   h[2,1]
Out[18]:=
     (0,3)           (0,3)
(-I f     [x, y] + g      [x, y] +
     (1,2)             (1,2)
    f      [x, y] + I g      [x, y] -
       (2,1)           (2,1)
    I f      [x, y] + g      [x, y] +
     (3,0)             (3,0)
    f      [x, y] + I g      [x, y]) / 8
```

h) Calcul de $\bar{G}_{z\bar{z}\bar{z}}$:

```
In[19]:=
   hb[1,2]
Out[19]:=
    (0,3)           (0,3)
(I f     [x, y] + g      [x, y] +
     (1,2)             (1,2)
    f      [x, y] - I g      [x, y] +
       (2,1)           (2,1)
    I f      [x, y] + g      [x, y] +
     (3,0)             (3,0)
    f      [x, y] - I g      [x, y]) / 8
```

Programme 2.2 *Ce programme calcule les fonctions* a_1, $\alpha'(0)$ *et*

$$\delta = -a_1/\alpha'(0)$$

pour les systèmes de Lorenz et de Belousov-Zhabotinski. Les résulats sont donnés sur le Tableau 2.1 et les formules (2.110)-(2.111).

```
(****
       BIFURCATION DE HOPF        *********)
PROGRAM HOPF;
USES dos,crt;
CONST N=3;
TYPE  Matrice=Array[1..N,1..N] OF REAL;
      Vecteur=Array[1..N] OF REAL;
VAR   I,J,K :INTEGER;
      T,Q:Matrice;
VAR   w,w0,delta,alphprim,L3,a11:real;
      F11,F22,F33,F12,F13,F23:vecteur;
      choix : char;

Procedure belousov;
var  f,x0,y0,a1,b1,c1,d1 : real ;
  A,B,b0,c0,alf,s,q,delt : real ;
Begin
   s:=100 ; q:=0.000001; f:=1.1;
   (* coordonnees du point fixe : x0,y0,x0  *)
   x0:=1-f-q+sqrt((1-f-q)*(1-f-q)+4*q*(1+f));
   x0 := x0/2/q; y0:=(1+f-q*x0)/2;
   (* calcul du point de bifurcation de Hopf w : *)
   alf:=s*y0+(1/s+2*q*s)*x0+1/s-s;
         b0:=alf*alf+f*(1-x0);
         c0:=alf*(2*q*x0*x0+x0*(q-1)+f);
         w:=-b0+sqrt(b0*b0-4*alf*c0);w:=w/2/alf;
   a1:=-s*(1-y0-2*q*x0);b1:=-s*(1-x0);c1:=y0/s;d1:=(1+x0)/s;
   A:=w+a1+d1;B:=a1*d1-b1*c1+w*(a1+d1);delt:=A*A+B;
   w0:=sqrt(B);L3:=-A;
   alphprim :=x0*(2*q*x0+q-1+f)-B-alf*A;
   alphprim :=alphprim/2/delt;
  F11[1] := -4*s*(w*w+B+(A-w)*(A-a1))*(q-a/b)-4*a1*(A-w)/s;
  F11[1]:=F11[1]/delt;
  F12[1]:=-2*s*(w*w+B+(A-w)*(A-a1))/b1+2*(A-w)/s;
  F12[1]:=F12[1]*sqrt(B)/delt;
  F13[1]:=-s*(2*q+(A-2*a1)/b1)*(w*w+B+(A-w)*(A-a1))+
        (A-2*a1)*(A-w)/s;  F13[1]:=F13[1]/delt;
  F11[2]:=4*s*((A-a1)*(A-w)*w-a1*(w*w+B))*(q-a1/b1)
      +4*a1*(A*w+B)/s;F11[2]:=F11[2]/delt/sqrt(B);
  F12[2]:=2*s*((A-a1)*(A-w)*w-a1*(w*w+B))/b1
       -2*(A*w+B)/s;F12[2]:=F12[2]/delt;
  F13[2]:=s*(2*q+(A-2*a1)/b1)*((A-a1)*(A-w)*w-a1*(w*w+B))
       +(A-2*a1)*(A*w+B)/s; F13[2]:=F13[2]/delt/sqrt(B);
  F11[3]:=-8*s*(w+a1)*(A-w)*(q-a1/b1)+8*a1*(A-w)/s;
```

```
        F11[3]:=F11[3]/delt;
  F12[3]:=-s*(w+a1)*(A-w)/b1-(A-w)/s;
       F12[3]:=F12[3]*4*sqrt(B)/delt;
  F23[1]:=F12[1]/2;F23[2]:=F12[2]/2;F22[1]:=0;F22[2]:=0;
       F22[3]:=0;
 end;

Procedure lorenz;
VAR   s,b,r,DT,x0:real;
BEGIN
    s:=20;  b:=10;  r:=s*(s+b+3)/(s-b-1);
    w0:=sqrt((r+s)*b); L3:=-(s+b+1); x0:=sqrt(b*(r-1));
(* alphprim =alpha prime *)
alphprim := b*(s-b-1)/(w0*w0+L3*L3)/2;
     (* Calcul de T[I,J]): *)
   T[1,1]:=1;  T[1,2]:=0;   T[1,3]:=1;
   T[2,1]:=1;  T[2,2]:=-w0/s;   T[2,3]:=1+L3/s;
   T[3,1]:=w0*w0/x0/s;   T[3,2]:=w0*(1+s)/x0/s;
   T[3,3]:=b*L3/x0/s;
   DT := w0*(L3*L3+w0*w0);
   Q[1,1]:=-w0*(b*L3+(s+L3)*(1+s)); Q[1,1] := Q[1,1]/DT;
   Q[1,2]:=w0*s*(1+s); Q[1,2]:=Q[1,2]/DT;
   Q[1,3]:=s*w0*x0; Q[1,3]:=Q[1,3]/DT ;
   Q[2,1]:=-(s*b*L3+w0*w0*(b+1)); Q[2,1]:=Q[2,1]/DT;
   Q[2,2]:=s*(b*L3-w0*w0); Q[2,2]:=Q[2,2]/DT ;
   Q[2,3]:=-L3*s*x0; Q[2,3]:=Q[2,3]/DT;
   Q[3,1]:=w0*(s*(1+s)+w0*w0); Q[3,1]:=Q[3,1]/DT;
   Q[3,2]:=-w0*s*(1+s); Q[3,2] := Q[3,2]/DT ;
   Q[3,3]:= -s*w0*x0; Q[3,3] := Q[3,3]/DT ;
          FOR i:=1 TO N DO
   BEGIN
  F11[i] := 2*(Q[i,3]*T[2,1]-Q[i,2]*T[3,1]);
  F33[i] := 2*(Q[i,3]*T[2,3]-Q[i,2]*T[3,3]);
  F22[i] := 0;
  F12[i] := Q[i,3]*T[2,2]-Q[i,2]*T[3,2];
  F23[i] := F12[i];
  F13[i] := Q[i,3]*(T[2,1]+T[2,3])-Q[i,2]*(T[3,1]+T[3,3]);
   END;
END;
BEGIN
ClrScr ;
writeln('Belousov-Zhabotinski : taper B, Lorenz : taper L ');
choix := readkey;
   case choix of
     'b','B' : belousov ;
     'l','L' : lorenz ;
   end;
  a11:=((F11[1]+F22[1])*F12[1]-(F11[2]+F22[2])*F12[2]
                      -F11[1]*F11[2]+F22[1]*F22[2])/w0
                -2*(F13[1]+F23[2])*(F11[3]+F22[3])/L3
```

```
  -(F13[1]-F23[2])*(L3*(F11[3]-F22[3])+4*w0*F12[3])/
                                        (4*w0*w0+L3*L3)
  +2*(F23[1]+F13[2])*(w0*(F11[3]-F22[3])-L3*F12[3])/
                                        (4*w0*w0+L3*L3);
 a11:=a11/16; writeln('a1 = ',a11);
 writeln('alpha prime = ',alphprim);
 delta:=-a11/alphprim;
 writeln('delta = ',delta);
readln;
END.
```

2.8 Exercices

(Les réponses sont données à l'Annexe A)

Exercice 2.1 Vérifier que les différentes équations (2.28), (2.43), (2.49) satisfont les conditions (2.25), (2.41), (2.46)-(2.48) respectivement.

Exercice 2.2 On considère l'équation [102]

$$\dot{z} = e^{i\alpha}z + e^{i\phi}z|z|^2 + b\bar{z}^3 \tag{2.178}$$

où $z \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que pour $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, le point fixe $z = 0$ de (2.178) est instable et une bifurcation de Hopf se produit à $\alpha = \pm\pi/2$. Montrer que cette bifurcation est sur-critique (resp. sous-critique) si $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$ (resp. $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$).

2) Montrer que l'on peut aussi écrire (2.178) sous la forme:

$$\dot{z} = \epsilon z + Az|z|^2 + \bar{z}^3, \quad \epsilon, A \in \mathbb{C}. \tag{2.179}$$

3) Montrer que, si $\Re\epsilon < 0, \Re A \leq 0$ ou si $\Re\epsilon > 0, \Re A \geq 0$, alors l'équation (2.179) n'a pas de solution périodique.

4) Ecrire (2.179) en coordonnées polaires (r, θ). En déduire que pour $\alpha = \pm\pi/2$, $\phi = 3\pi/2$ le système est hamiltonien.

5) On cherche des points fixes non-nuls de (2.178) ou (2.179). Montrer que

a) si $|A| < 1$ (ou $b > 1$), il y aura 4 points fixes non-nuls,

b) si $|A| = 1$ (ou $b = 1$), il y aura 4 ou 0 points fixes non-nuls,

c) si $|A| > 1$ (ou $b < 1$), il y aura 8, 4 ou 0 points fixes non-nuls.

Exercice 2.3 On considère le système suivant [68]:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2. \tag{2.180}$$

1) Trouver les points fixes de (2.180) et calculer leur matrice jacobienne. Montrer que l'axe des x_2 est une variété invariante.

2) Calculer la variété centrale de $(0,0)$. Est-elle stable?

3) Un des points fixes a pour valeurs propres $\pm i$. Calculer, dans ce cas, le nombre de Lyapunov a_1 de la formule (2.133).

Exercice 2.4 On considère le système suivant :

$$\dot{x}_1 = ax_1(\nu + x_1) - cx_1x_2, \quad \dot{x}_2 = -\nu bx_2 + (c-b)x_1x_2 \tag{2.181}$$

avec $\nu, a, b, c > 0$, $b < c$ [103].

Montrer qu'il existe une bifurcation de Hopf à :

$$x^* = \left(\frac{\nu b}{c-b}, \frac{a\nu(c-b-b\nu)}{(c-b)^2}\right), \tag{2.182}$$

pour $\nu = \nu_c = (c-b)/(c+b)$ et déterminer sa direction.

Exercice 2.5 On considère l'équation différentielle du troisième ordre [103] :

$$x''' + ax'' + \nu x' + x(1-x) = 0$$

ou sous forme de système :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -ax_3 - \nu x_2 - x_1 + x_1^2 \tag{2.183}$$

où a, $\nu > 0$ sont des paramètres. Montrer qu'il y a une bifurcation de Hopf à l'origine pour $\nu = 1/a$. Déterminer la direction de bifurcation lorsque ν varie.

Exercice 2.6 On considère le système suivant [138] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{1+\nu}\left[-x_1 - \frac{15}{8}x_2 + x_1x_3\right], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{1-\nu}\left[\frac{15}{8}x_1 - x_2 - x_2x_3\right], \\ \dot{x}_3 &= 1 - \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2. \end{aligned} \tag{2.184}$$

Calculer les points fixes du système (2.184). Ecrire la matrice jacobienne à ces points fixes et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il y a une bifurcation de Hopf à $\nu = 0$.

Exercice 2.7 On considère le système suivant [75] :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(x_1^2 - \mu_2)x_2 + x_1^3 + \mu_1 x_1, \quad (\dot{}) = d/dt \tag{2.185}$$

Ce système, appelé système de Bogdanov-Takens [15], [155], est un exemple important dans la théorie de bifurcation.

1) Montrer que le système précédent peut se ramener à un système de Liénard

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -g(x), \tag{2.186}$$

avec $F(x) = (x^3 - 3\mu_2 x)/3$, $g(x) = -x^3 - \mu_1 x$, par une transformation de coordonnées.

2) Trouver les points fixes de (2.186) et étudier leur nature.

Exercice 2.8 Déterminer les bifurcations du système [133] :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \beta y + y^2, \\ \dot{y} &= \alpha x - (\alpha\beta + \gamma^2)y - xy + c(-x + \beta y + y^2) \end{aligned} \tag{2.187}$$

avec $\alpha - \beta \geq 2\gamma \geq 0$.

Exercice 2.9 Soit le système de Boldrighini-Franceschini [16] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_4x_5, \\ \dot{x}_2 &= -9x_2 + 3x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= -5x_3 - 7x_1x_2 + r, \\ \dot{x}_4 &= -5x_4 - x_1x_5, \\ \dot{x}_5 &= -x_5 - 3x_1x_4, \quad r \geq 0. \end{aligned} \tag{2.188}$$

1) Ecrire la matrice jacobienne du système.
2) Trouver les solutions stationnaires et déterminer leur stabilité.
3) Ecrire un programme qui calcule la trajectoire à $r = 31$.

Exercice 2.10 Considérons le système suivant [90] :

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= b_1u_1z - ka_1u_1u_2, \\ \dot{u}_2 &= \nu k u_1u_3 - b_2u_2z - ka_2u_1u_2, \\ \dot{u}_3 &= (S - b_3u_3)z + ka_3u_1u_3(1 - u_3/\theta) \end{aligned}$$

avec $z = 1 + k(u_1 + u_2 + mu_3)$. Ce système provient d'une modélisation de la réaction immunitaire chez les animaux face à l'invasion des antigènes. Pour

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \quad a_2 = 3\nu, \quad a_3 = 5, \\ &b_1 = \frac{1}{10}, \quad b_2 = \frac{\nu}{10}, \quad b_3 = \frac{5}{4}, \\ &m = S = k = 1, \quad \theta = 2, \end{aligned}$$

ν étant le paramètre de bifurcation, le système admet le point fixe suivant :

$$u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1\right)^T. \tag{2.189}$$

Montrer que c'est un point de bifurcation de Hopf. Etudier sa stabilité.

Exercice 2.11 On considère l'équation de Ginzburg-Landau à coefficients réels [114] :

$$\partial_t A = rA + \partial_{xx}^2 A - |A|^2 A, \quad r > 0, \quad A(x,t) \in \mathbb{C}. \tag{2.190}$$

1) Trouver une solution stationnaire de la forme :

$$A = A^* = e^{ikx} \quad k = const. \tag{2.191}$$

Quelle est la condition sur k pour que cette solution existe?

2) Une perturbation infinitésimale étant ajoutée à la solution (2.191) : $A = A^* + a$, avec $a = u + iv$. L'équation pour a est ensuite linéarisée. Ecrire le système linéarisé donnant u et v.

3) On analyse le système linéarisé ainsi obtenu en modes normaux de la forme :

$$u = Ue^{st} \cos qx, \quad v = Ve^{st} \cos qx \quad U, V = \text{ const.} \tag{2.192}$$

Montrer que si $r/3 \leq k^2 \leq r$ la perturbation devient instable (instabilité d'Eckhaus).

Chapitre 3

Applications itérées

Le chapitre 3 traite des systèmes dynamiques discrets. Un grand nombre de notions développées dans le chapitre précédent sur des systèmes dynamiques continus sont transposables aux applications itérées. Ainsi il existe des variétés invariantes stable, instable et centrale pour les points fixes de ces applications. Aux orbites homocline et hétérocline vont correspondre des points homoclines et hétéroclines. Dans le cas des flots, le point fixe est stable si toutes les valeurs propres de la jacobienne au point fixe sont à partie réelle négative ; dans le cas discret, le point fixe est stable si toutes les valeurs propres de la jacobienne de l'application sont à l'intérieur du disque unité. Les applications itérées possèdent trois types de bifurcation à un paramètre : noeud-col, doublement de période et Neimark-Sacker. Le calcul de la forme normale se fait de façon analogue au cas des flots.

Certaines notions sont propres aux systèmes discrets comme le p-cycle qui, suivant des critères similaires à ceux du point fixe, sera attractif, répulsif, indifférent ou super-attractif. Nous avons consacré un paragraphe à l'application quadratique qui possède une route de doublement de période : on observe une suite croissante de valeurs du paramètre qui correspondent à des bifurcations d'une orbite périodique instable de période 2^n en une orbite périodique stable de période 2^{n+1}. Cette même fonction permet également l'étude de la période 3 qui conduit, via le théorème de Sarkovski, à l'assertion "Période 3 implique chaos", dans le sens ici de comportement apériodique. Le paragraphe se termine par un exposé sur les poussières de Fatou et la dynamique symbolique à laquelle nous ferons appel au chapitre 5. Le paragraphe suivant est consacré au calcul des constantes de Feigenbaum et en particulier du rapport d'échelles conduisant à la notion de fonction universelle.

L'application standard, le plus connu des endomorphismes du cercle, montre comment un terme non-linéaire peut rendre périodique un mouvement quasi-périodique : c'est le phénomène d'accrochage. Au delà d'une certaine valeur de l'intensité du terme non-linéaire, on observe la coexistence de plusieurs mouvements périodiques conduisant au chaos.

Le dernier paragraphe traite des ensembles de Julia et de Mandelbrot. Les théorèmes 3.6.2 et 3.6.3 de Julia et Fatou sont fondamentaux pour leur construction. Le calcul de ces ensembles pour l'application quadratique complexe est présenté. La fin du paragraphe traite du cas cubique et du puzzle d'Yoccoz.

3.1 Systèmes dynamiques discrets

Jusqu'ici les systèmes évoluaient selon une variable temporelle continue, ce chapitre traite du cas où la variable temporelle est discrète.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, et soit $f : D \to D$ une application continue (ou une transformation), f^k désigne la kième itérée de f, c'est-à-dire: $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, ... ,$f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$. Dans la pratique x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$,... représentent les valeurs d'une certaine quantité aux temps 0,1,2,... Ainsi la valeur de la quantité au temps $k+1$ est fonction de sa valeur au temps k. Cette quantité pourrait être, par exemple, une population. Un autre exemple est la section de Poincaré: si $x \in \Sigma$ (section de Poincaré), $f(x)$ est l'application de premier retour (Cf. Chapitre 4).

L'application f est appelée un système dynamique discret. Un point $x \in D$ est un *point fixe* de f si $f(x) = x$. Si, de plus, la matrice jacobienne $Df(x)$ n'a pas de valeurs propres dont le module soit égal à un, x est un point fixe *hyperbolique*. Si les modules des valeurs propres de $Df(x)$ sont égaux à 1, x est un point fixe *elliptique*. Dans les applications à deux dimensions, un point fixe hyperbolique s'appelle aussi un point *selle*.

Pour tout $x \in D$, on appelle *orbite* ou *trajectoire* de x, l'ensemble $\{f^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Un sous-ensemble A de D est *invariant* par f si $f(A) = A$.

3.1.1 Théorème de la variété centrale

On définit les sous-espaces vectoriels stable, instable et central, E^s, E^u et E^c de manière analogue à ceux des champs de vecteurs:

E^s est engendré par les vecteurs propres de $Df(\bar{x})$ dont les valeurs propres sont de module < 1,

E^u est engendré par les vecteurs propres de $Df(\bar{x})$ dont les valeurs propres sont de module > 1,

E^c est engendré par les vecteurs propres de $Df(\bar{x})$ dont les valeurs propres sont de module $= 1$.

On a le théorème suivant (Théorème de la variété centrale pour les applications).

Théorème 3.1.1 *Il existe des variétés invariantes stable, instable et centrale, W^s, W^u et W^c, tangentes respectivement à E^s, E^u, E^c, au point fixe $\bar{x}$. La variété centrale n'est pas nécessairement unique.*

Si $x \in W^u(\bar{x}) \cap W^s(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$, alors x est un *point homocline*. Les variétés instable et stable étant des variétés invariantes, si x est un point homocline, $f(x), f^2(x), f^3(x)$ etc. sont aussi des points homoclines: il y aura donc une infinité de points homoclines. L'orbite $f(x), f^2(x), f^3(x)\ldots$ est appelée *orbite homocline*. Si les variétés stable et instable $W^s(\bar{x}_1)$, $W^u(\bar{x}_2)$ de deux points fixes hyperboliques distincts $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ se coupent en x, alors x est appelé *point hétérocline* et l'orbite de x est appelée *orbite hétérocline* (Cf. fig. 3.1). Soit e_i le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i. Choisissons, dans l'espace des phases, un point x_0 proche du point fixe $\bar{x}$ et situé dans la direction e_i, à une distance $\epsilon \ll 1$ de $\bar{x}$, Alors si $|\lambda_i| > 1$, l'orbite de x_0, c'est-à-dire l'ensemble des points $\{f^k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$, appartient à la variété instable. Si $|\lambda_i| < 1$, l'ensemble des points $\{f^{-k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ appartient à la variété stable.

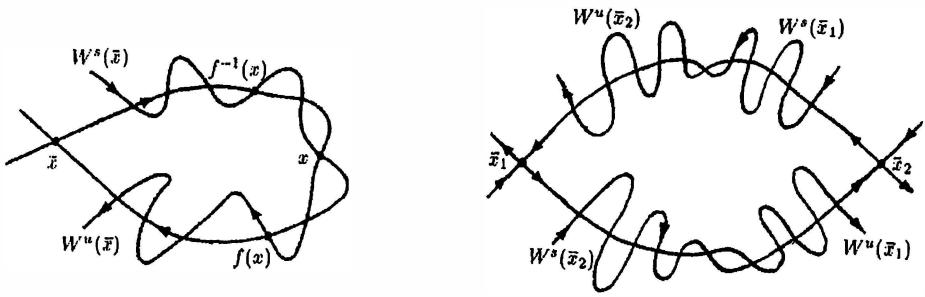


FIG. 3.1 – *Orbites homoclines (a) et orbites hétéroclines (b).*

Remarque 3.1.1 Dans la pratique la variété instable (resp. stable) est l'ensemble des orbites $f(x_0)$ (resp. $f^{-1}(x_0)$) des points x_0 appartenant à un volume infinitésimal engendré par les vecteurs propres dont la valeur propre est de module > 1 (resp. < 1). Nous verrons que dans l'application de Hénon les variétés stable et instable ont été calculées par cette méthode (figure 3.4).

Un sous-ensemble compact fermé A de D est un attracteur ou est *attractif* si A est invariant par f et s'il existe un voisinage V de A tel que pour tout $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 est une séquence qui converge vers A. Le voisinage V est appelé le *bassin d'attraction* de A et on a

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(V).$$

Le sous-ensemble A est *répulsif* ou instable s'il existe un voisinage V de A tel que pour tout $x_0 \in V$, l'orbite de x_0 s'éloigne de A (ou de façon équivalente : si A est un attracteur pour f^{-1}). Un attracteur A est fractal (ou est un attracteur étrange) si l'orbite de x est dense dans A pour tout $x \in A$ et est sensible aux conditions initiales (c'est-à-dire : pour deux points $x \in A$, $y \in A$ voisins l'un de l'autre, les orbites de x et y s'éloignent l'une de l'autre). Nous verrons dans l'exemple de l'application logistique :

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

que, pour $r \geq 4$, l'orbite x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ est devenue chaotique.

La figure 3.2 montre deux orbites initialement voisines qui s'écartent après seulement trois itérations [167].

L'attracteur le plus simple est le point fixe. Il peut être attractif ou répulsif. En dimension un, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c'est la pente $m = f'(\bar{x})$ de la tangente au point fixe $\bar{x}$ qui détermine le type de point fixe.

Théorème 3.1.2 *Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le point fixe $\bar{x}$ est :*
(i) attractif (ou stable) si $|m| < 1$;
(ii) répulsif (ou instable) si $|m| > 1$;
(iii) indifférent si $|m| = 1$;
(iv) super-attractif (ou super-stable) si $m = 0$.

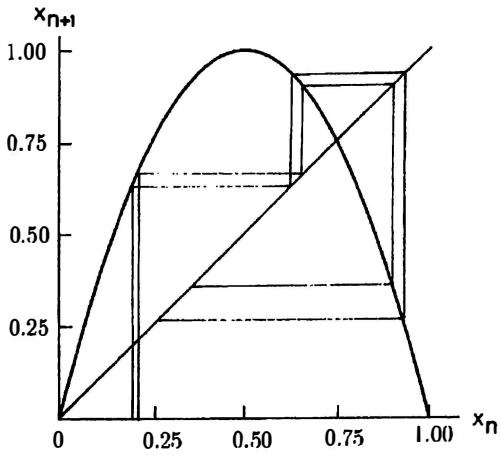


FIG. 3.2 – *Application logistique* $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$. *D'après [167].*

m s'appelle le *multiplicateur* de f au point $\bar{x}$.

Ce théorème s'explique par le développement de Taylor de f au voisinage de $\bar{x}$:

$$f(x) = \bar{x} + m(x - \bar{x}) + O((x - \bar{x})^2). \tag{3.1}$$

Ainsi l'éloignement par rapport à $\bar{x}$ est multiplié par m à chaque itération, d'où le nom "multiplicateur" donné à m. On déduit de (3.1) qu'après p itérations, le point x, voisin de $\bar{x}$, se trouve maintenant à la distance $m^p(x - \bar{x})$ de $\bar{x}$, d'où le théorème 3.1.2. Lorsque $m = 0$, l'attraction est la plus forte car le terme du premier ordre en $(x - \bar{x})$ disparaît complètement, d'où le nom "super attractif" ou "super-stable". Lorsque $m = \pm 1$, la nature de $\bar{x}$ dépend des termes d'ordre > 1 du développement de Taylor (3.1).

En dimension n, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, pour décider si un point fixe $\bar{x}$ est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne $J(\bar{x}) = Df(\bar{x})$.

Théorème 3.1.3 *Si toutes les valeurs propres de* $J(\bar{x}) = Df(\bar{x})$ *sont à l'intérieur du disque unité,* $\bar{x}$ *est stable. Si une de ces valeurs propres a un module plus grand que un,* $\bar{x}$ *est instable.*

Remarque 3.1.2 Dans une transformation :

$$u = f(x), \quad u, x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

on a, pour tout $V \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_{f(V)} du_1 du_2 \dots du_n = \int_V |J| dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad J = \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|.$$

Par conséquent, il y a contraction (resp. dilatation) du volume si $|J| < 1$ ($|J| > 1$). Dans le premier cas, on dit que la transformation (3.2) est *dissipative*. Si $|J| = 1$ la transformation (3.2) conserve les volumes : elle est alors dite *conservative*.

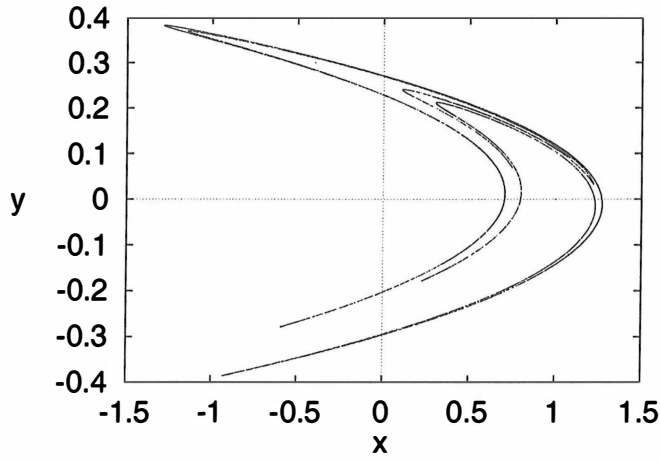


FIG. 3.3 – *L'attracteur de Hénon pour* $a = 1.4$, $b = 0.3$.

Exemple 3.1.1 Considérons l'application de Hénon [76] :

$$f(x,y) = (1 + y - ax^2, bx), \tag{3.3}$$

avec $0 < b < 1$. Cette application a deux points fixes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b - 1 + \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} > 0, \quad y_1 = bx_1, \\ x_2 &= \frac{b - 1 - \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a} < 0, \quad y_2 = bx_2, \end{aligned}$$

si $a > -(1-b)^2/4$. La matrice jacobienne s'écrit :

$$J = Df(x,y) = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix};$$

$|J| = b < 1$, on a donc une contraction des aires. J a pour valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}.$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs absolues est toujours inférieure à 1, tandis que la plus grande est $<, =$ ou > 1 suivant que $|x| <, =$ ou $> (1-b)/2a$. On en déduit que le point fixe (x_2, y_2) est un point selle. L'autre point fixe est stable si $a < 3(1-b)^2/4 = 0.3675$. Si $a = 3(1-b)^2/4$, on a $\lambda_1(x_1, y_1) = b$ et $\lambda_2(x_1, y_1) = -1$: c'est une bifurcation de doublement de période et le début d'une cascade de doublements de périodes (voir fig. 3.18).

L'attracteur de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ a été calculé par le programme 3.1. Le résultat est présenté sur la figure 3.3. Dans ce cas, le point (x_1, y_1) est

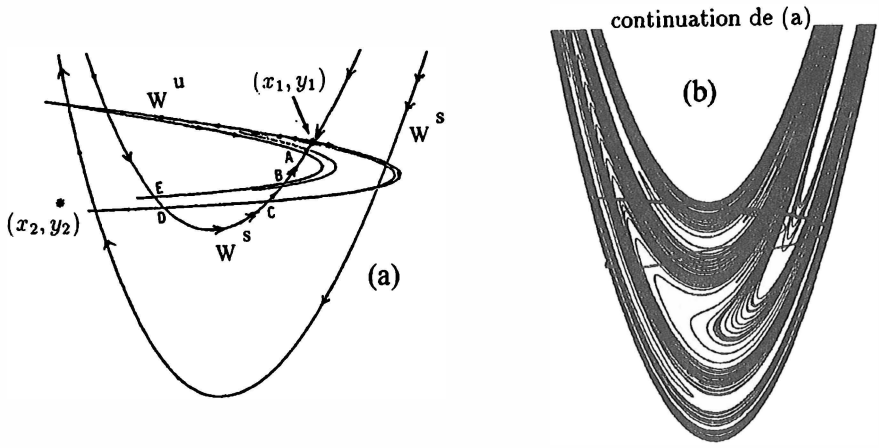


FIG. 3.4 – *Variétés stable et instable de l'application de Hénon pour* $a = 1.4$, $b = 0.3$, $A, B, C, \ldots$ *sont des points homoclines. D'après [59].*

hyperbolique car ses valeurs propres sont $\lambda_1 = 0.1559463223$, $\lambda_2 = -1.923738858$. L'application de Hénon est ici inversible ; son inverse est :

$$f^{-1}(x, y) = (b^{-1}y, x - 1 + ab^{-2}y^2).$$

Par conséquent, on peut utiliser le procédé schématisé à la remarque 3.1.1 pour représenter graphiquement les variétés stable W^s et instable W^u au voisinage de (x_1, y_1). Elles sont présentées sur la figure 3.4. Les points d'intersections des variétés stable et instable (ou séparatrices stable et instable) sont des points homoclines. Noter qu'entre le point homocline A, par exemple, et le point fixe (x_1, y_1) il y a une infinité de points homoclines car l'image (ou le conséquent) d'un point homocline est un point homocline. On peut les voir sur la figure 3.4b en itérant plus longtemps.

Exemple 3.1.2 *L'application de Chirikov (ou l'application standard) [67].* Considérons l'application itérée suivante

$$r_{n+1} = r_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_n, \quad x_{n+1} = x_n + r_{n+1}, \quad k > 0 \tag{3.4}$$

où r et x sont définis modulo 1. Les points fixes de cette application sont

$$\bar{r} = 0 \quad \bar{x} = 0, 1/2.$$

Il y a donc deux points fixes. La matrice jacobienne de l'application aux points fixes s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \pm k \\ 1 & 1 \pm k \end{pmatrix},$$

où le signe + correspond à $\bar{x} = 1/2$ et le signe − correspond à $\bar{x} = 0$. On a $|J| = 1$, par conséquent l'application est conservative. L'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda^2 - (2 \pm k)\lambda + 1 = 0$$

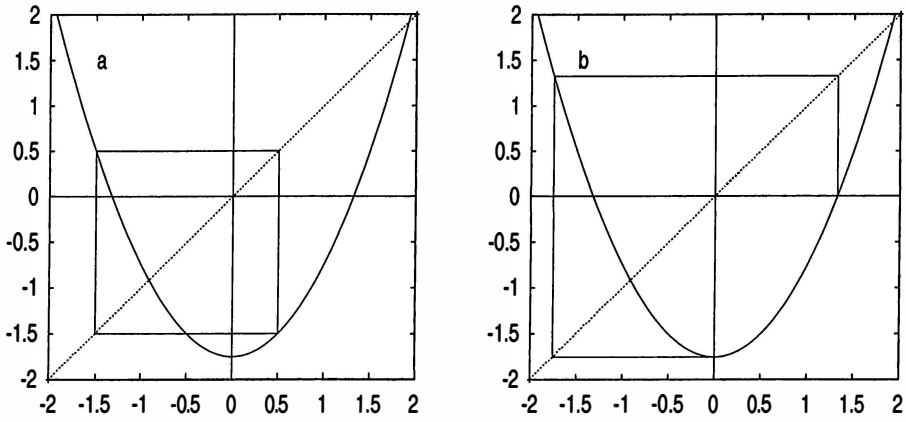


FIG. 3.5 – *Cycle d'ordre 2 (a) et cycle d'ordre 3 (b). D'après [92].*

D'où $\lambda_1\lambda_2 = 1$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \pm k$. Le point fixe $(\bar{r}, \bar{x})$ est stable si $\lambda_{1,2} = e^{\pm\sigma}$ avec $2\cos\sigma = 2 \pm k$. D'où

$$|2 \pm k| < 2. \tag{3.5}$$

On en déduit que le point fixe $(\bar{r}, \bar{x}) = (0, 1/2)$ est toujours instable. Le point fixe $(\bar{r}, \bar{x}) = (0, 0)$ est stable si $0 < k < 4$. Ce point fixe est montré sur la figure 3.9.

3.1.2 Cycles et cycles super-stables

Un ensemble de points $\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}\}$ forme un *cycle d'ordre p* (ou une *orbite périodique d'ordre p*, ou encore un *p-cycle*), si :

$$f(x_i) = x_{i+1} \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots, p-2, \text{ et } f(x_{p-1}) = x_0.$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre p (appelé aussi point périodique d'ordre p) est un point fixe pour f^p : $f^p(x_i) = x_i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ et n'est pas un point fixe pour f^k si $k < p$.

Exemple 3.1.3 *[92]* L'itération $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^2 - 1.75 \tag{3.6}$$

possède le cycle d'ordre 2 : $0.5 \to -1.5 \to 0.5$ (figure 3.5).

Exemple 3.1.4 *[92]* L'itération $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^2 - 1.75488 \tag{3.7}$$

possède le cycle d'ordre 3 : $0 \to -1.75488... \to 1.3247... \to 0$ (figure 3.5).

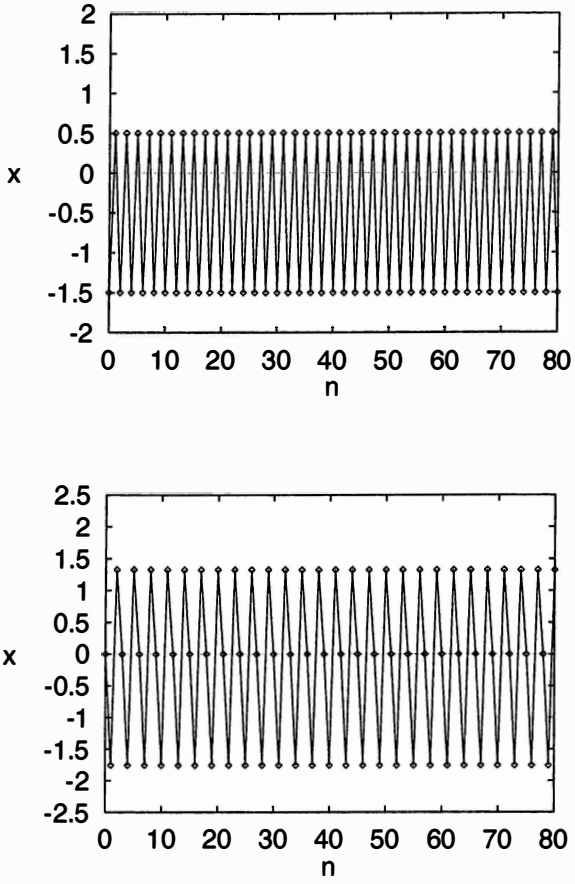


FIG. 3.6 – *Séries temporelles du cycle d'ordre 2 (en haut) et du cycle d'ordre 3 (en bas).*

La manière la plus simple de représenter un cycle limite est la *série temporelle* $(n, f^n(x_0)$. La figure 3.6 montre les séries temporelles de $x^2 - 1.75$ (haut) et $x^2 - 1.75488...$ (bas).

Une autre façon de trouver les cycles est de dessiner le diagramme de bifurcations. La figure 3.17 montre le diagramme de bifurcations de l'application logistique $rx(1-x)$. Ce diagramme a été fait par le programme 3.3 pour $2,9 \leq r \leq 4$ et $x_0 = 1/2$. Pour chaque valeur de r, on itère d'abord 300 fois sans marquer (période transitoire) ; on trace les 200 itérations suivantes. La figure 3.7 montre la relation entre le diagramme de bifurcations, la série temporelle et le graphe de la fonction $x^2 + c$ pour $c = -1, 3$.

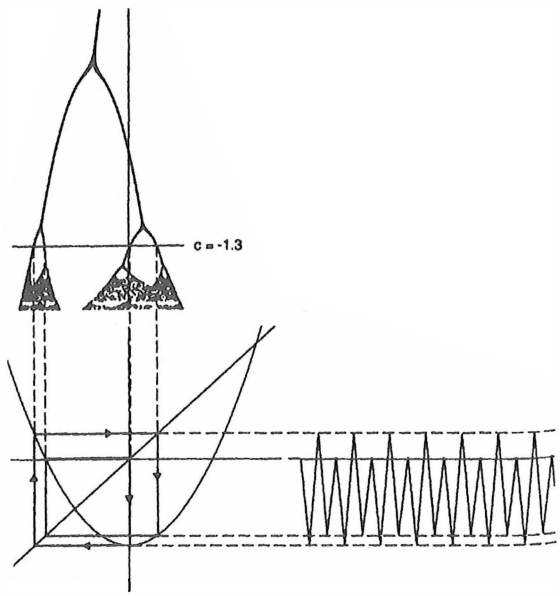


FIG. 3.7 – *Application $x^2 - 1.3$; cycle d'ordre 4, cascade de bifurcations et série temporelle. D'après [92].*

Une orbite périodique est un attracteur si chacun de ses points est un attracteur. Comme pour les points fixes, nous aimerions avoir un critère pour déterminer si une orbite périodique est un attracteur. Le théorème suivant est une généralisation directe du théorème 3.1.2. Il découle presque immédiatement de ce que tous les points d'une orbite périodique de période p sont les points fixes de f^p.

Théorème 3.1.4 *Soit x le point périodique d'un cycle d'ordre p, si le spectre de la matrice $Df^p(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable ; si une des valeurs propres a un module plus grand que un, le cycle est instable.*

On le voit plus facilement en dimension 1. Dans ce cas, le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de la chaîne. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$\begin{aligned}(f^p)'(x_0) &= f'(f(\dots(f(x_0)\dots)\dots f'(f(x_0))f'(x_0) \\ &= f'(x_{p-1})\dots f'(x_1)f'(x_0). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Mais $x_0 = x_p$, on en déduit que cette valeur $(f^p)'(x_0)$ est la même pour toutes les dérivées $(f^p)'(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, p-1$:

$$m_p \equiv (f^p)'(x_0) = (f^p)'(x_1) = \cdots = (f^p)'(x_{p-1}).$$

Cette valeur commune m_p est appelée le *multiplicateur du cycle.* Rappelons que les points x_i, $i = 0, 1, \ldots, x_{p-1}$ sont les points fixes de f^p. D'où en se reportant au développement (3.1) de la fonction $f^p(x)$:

Théorème 3.1.5 *Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le cycle $\{x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}\}$ est :*
(i) attractif (ou stable) si $|m_p| < 1$;
(ii) répulsif (ou instable) si $|m_p| > 1$;
(iii) indifférent si $|m_p| = 1$;
(iv) super-attractif (ou super-stable) si $m_p = 0$.

Exemple 3.1.5 Revenons aux cycles (3.6) et (3.7) :
(i) pour l'itération $f(x) = x^2 - 1.75$, on a $f'(x) = 2x$, d'où $m_2 = (f^2)' = 4x_0x_1 = 4(0.5)(-1.5) = -3$. Donc le cycle d'ordre 2 est répulsif (Cf. figure 3.8a, avec $x_0 = 0.49$).
(ii) pour l'itération $f(x) = x^2 - 1.75488$, on a aussi $f'(x) = 2x$, d'où $m_3 = (f^3)' = 8x_0x_1x_2 = 8(0.0)(-1.75488)(1.3247) = 0$. Donc le cycle d'ordre 3 est superattractif (Cf. figure 3.8b, avec $x_0 = -0.3$).

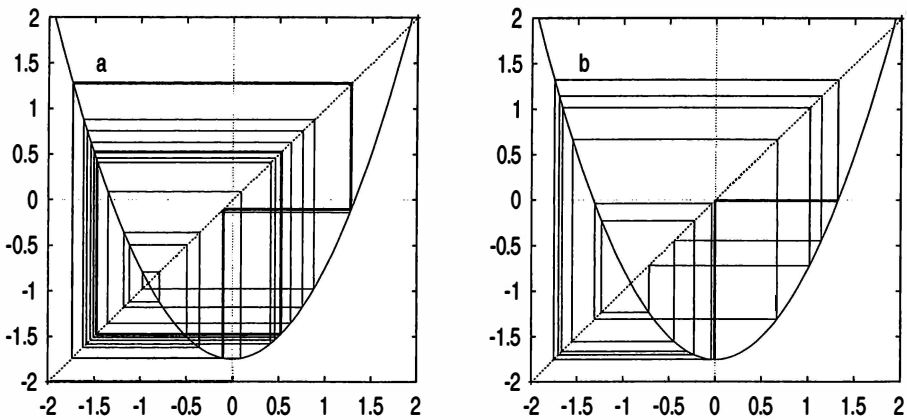


FIG. 3.8 – *Cycle répulsif d'ordre 2 (a) et cycle super-stable d'ordre 3 (b). D'après [92].*

Exemple 3.1.6 Dans l'application de Chirikov (3.4) considérons un cycle d'ordre p :

$$r_{i+1} = r_i - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_i, \quad x_{i+1} = x_i + r_{i+1}$$

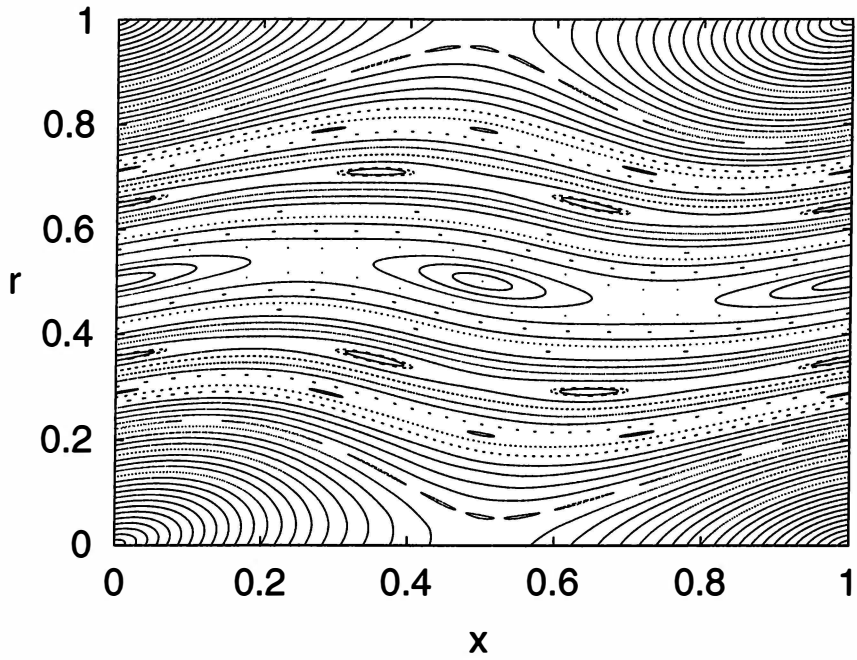


FIG. 3.9 – *L'application de Chirikov par le programme 4.5 avec* $k = 0.5$. *On voit clairement le point fixe elliptique* $(\bar{r}, \bar{x}) = (0, 0)$, *le point fixe hyperbolique* $(\bar{r}, \bar{x}) = (0, 0.5)$ *et le 2-cycle stable :* $(r_1, x_1) = (0.5, 0.5)$, $(r_2, x_2) = (0.5, 0)$.

$i = 1, \ldots, p$, avec $r_{p+1} = r_1$, $x_{p+1} = x_1$. La matrice jacobienne du cycle s'écrit

$$M = \prod_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} 1 & -k \cos 2\pi x_i \\ 1 & 1 - k \cos 2\pi x_i \end{pmatrix},$$

On a det $|M| = 1$ et l'équation caractéristique de M s'écrit

$$\lambda^2 - \text{ Trace } M \ \lambda + 1 = 0.$$

On en déduit les valeurs propres de M :

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2R \pm 2[R(R-1)]^{1/2}, \text{ en posant Trace } M = 2 - 4R$$

Quand $0 < R < 1$, on a $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma}$ avec $R = \sin^2(\sigma/2)$ et le p-cycle est stable. Quand $R < 0$ ou $R > 1$, les valeurs propres sont réelles avec $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$ et le p-cycle est instable. La figure 3.9 montre un 2-cycle stable : $(r_1, x_1) = (0.5, 0.5)$, $(r_2, x_2) = (0.5, 0)$ (voir aussi la figure 4.16).

3.2 Bifurcations

3.2.1 Bifurcations à un paramètre

On déduit du théorème 3.1.3 qu'il y a trois façons pour qu'un point fixe $\bar{x}$ perde (ou gagne) sa stabilité :

1. lorsqu'une valeur propre réelle de $Df(\bar{x})$ quitte (ou rentre dans) le cercle unité à -1,
2. lorsqu'une valeur propre réelle de $Df(\bar{x})$ quitte (ou rentre dans) le cercle unité à $+1$,

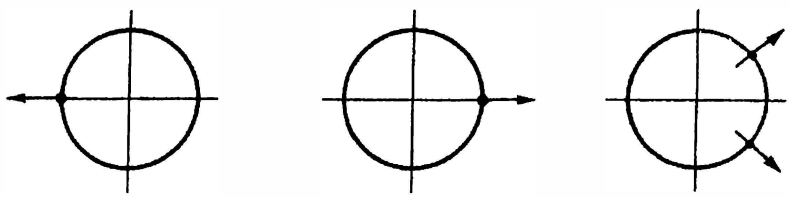


FIG. 3.10 – *Les trois façons, pour une valeur propre de $Df(\bar{x})$, de quitter le cercle unité.*

3. lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées de $Df(\bar{x})$ quittent (ou rentrent dans) le cercle unité simultanément à $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta}$ (voir figure 3.10).

Dans le cas 1, on a une bifurcation *flip* (ou *doublement de période, ou fourche*). Dans le cas 2, on a une *bifurcation nœud-col* (ou *tangente*, ou *pli*). Dans le cas 3, on a une *bifurcation de Neimark-Sacker.*

Exemple 3.2.1 Considérons l'application de Hénon (3.3). Pour $a > -(1-b)^2/4$, il y a deux points fixes ; pour $a = -(1-b)^2/4$, il y a un point fixe $x = (b-1)/2a$ et pour $a < -(1-b)^2/4$, il y a 0 point fixe. A $a = -(1-b)^2/4$, les valeurs propres sont 1 et $-b$: le point $a = -(1-b)^2/4$ est donc un point de bifurcation nœud-col. D'autre part, on a vu à l'exemple 3.1.1 que le point fixe (x_1, y_1) est stable pour $a < 3(1-b)^2/4 = 0.3675$. Pour $a = 3(1-b)^2/4$, le point fixe (x_1, y_1) a pour valeurs propres -1 et b : on a donc une bifurcation de doublement de période à $a = 3(1-b)^2/4$.

Exemple 3.2.2 Considérons l'itération $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par [103] :

$$f(x, a) = a + x + x^2, \quad a = \text{ paramètre.} \tag{3.9}$$

Les points fixes de (3.9) sont solutions de l'équation $x^2 + a = 0$. Pour $a > 0$, il n'y a pas de point fixe. Pour $a < 0$, il y a deux points fixes $x_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$. La matrice jacobienne est simplement $f_x(x, a) = 1 + 2x$. L'itération (3.9) présente une bifurcation nœud-col à $a = 0$ au point fixe $\bar{x} = 0$ avec $\lambda = f_x(0, 0) = 1$ (Cf. figure 3.11). Pour $a < 0$, $f_x(x_1, \alpha) = 1 + 2\sqrt{-a} > 1$, ($x_1$ est instable) ; $f_x(x_2, a) = 1 - 2\sqrt{-a} < 1$ (x_2 est stable). Le diagramme de bifurcation dans l'espace (x, a) est présenté sur la figure 3.11.

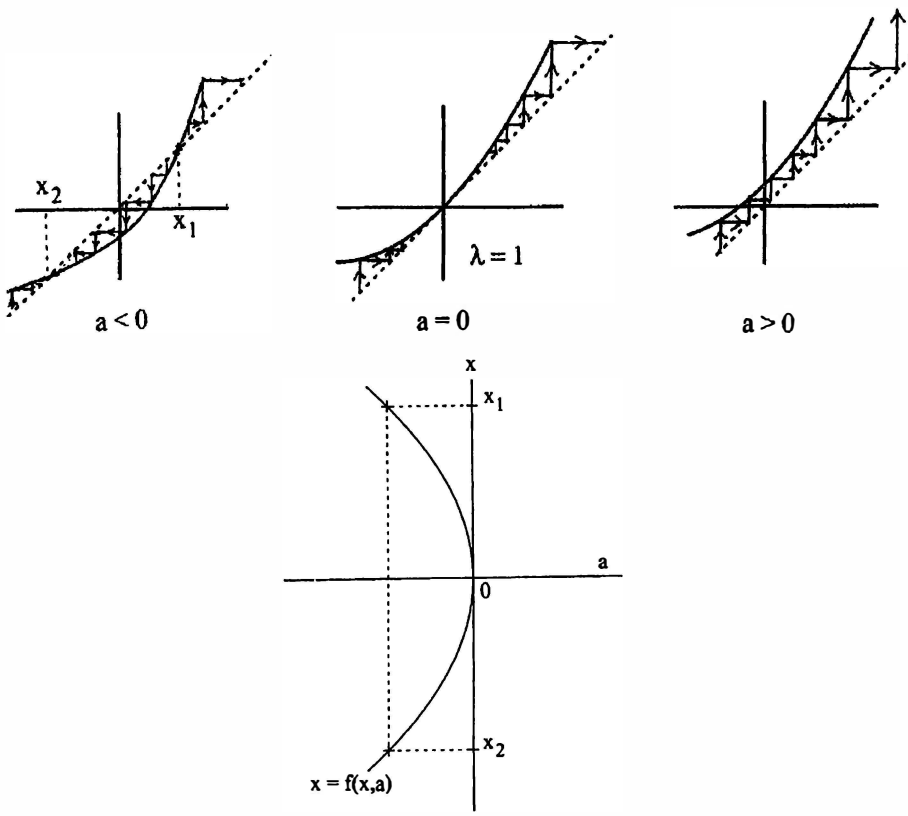


FIG. 3.11 – *Bifurcation nœud-col (en haut) et diagramme de bifurcation nœud-col (en bas). D'après [103].*

Exemple 3.2.3 Considérons l'application logistique retardée [103] :

$$x_{k+1} = r x_k(1 - y_k), \quad y_{k+1} = x_k, \quad r > 1. \tag{3.10}$$

Cette application a deux points fixes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_1 = y_1 = 0$ et $x_2 = y_2 = 1 - 1/r$. La matrice jacobienne évaluée au point fixe (x_2, y_2) est :

$$Df(x_2, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1-r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle a pour équation caractéristique :

$$\lambda^2 - \lambda + r - 1 = 0.$$

On en déduit les valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - r}.$$

Si $r > 5/4$, les valeurs propres sont complexes avec $|\lambda_{1,2}|^2 = \lambda_1 \lambda_2 = r - 1$. Pour $r = 2$, le point fixe (x_2, y_2) perd sa stabilité. Les valeurs propres sont alors $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\pi/3}$ et

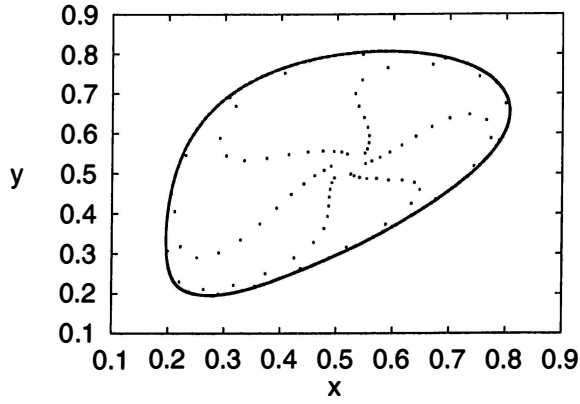


FIG. 3.12 – *Bifurcation de Neimark-Sacker.*

le système présente une bifurcation de Neimark-Sacker. La bifurcation est présentée sur la figure 3.12 (figure dessinée par le programme 3.2 pour une valeur initiale proche de x_2, y_2).

Exemple 3.2.4 L'itération $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par [103] :

$$f(x, a) = -(1 + a)x + x^3, \quad a = \text{ paramètre}, \tag{3.11}$$

présente une bifurcation de doublement de période en $a = 0$ au point fixe $\bar{x} = 0$ avec $\lambda = f_x(0, 0) = -1$ (Cf. figure 3.13). Le diagramme de bifurcation dans l'espace (x, a) est donné sur la figure 3.13 (le dessin pour $a = 0$ correspond à $x_0 < 1$).

Remarque 3.2.1 Dans la bifurcation de Neimark-Sacker, on distingue aussi les cas sur-critique et sous-critique. Dans l'exemple 3.2.3, elle est sur-critique. Cette bifurcation a notamment été observée dans le cas d'écoulements thermo-gravitationnels et thermocapillaires couplés en croissance cristalline par technique de zône flottante (Cf. [30]). Pour plus de détails sur cette bifurcation voir [103].

3.2.2 Forme normale

Le calcul de la forme normale se fait de façon analogue au cas des flots comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.2.5 Trouver la forme normale, à l'origine, de l'application :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

où $g, h = O(|x|^2)$ [103].

L'origine est le point fixe de (3.12). La matrice jacobienne à l'origine possède une valeur propre double $\lambda_{1,2} = -1$ (doublement de période). Les développements de

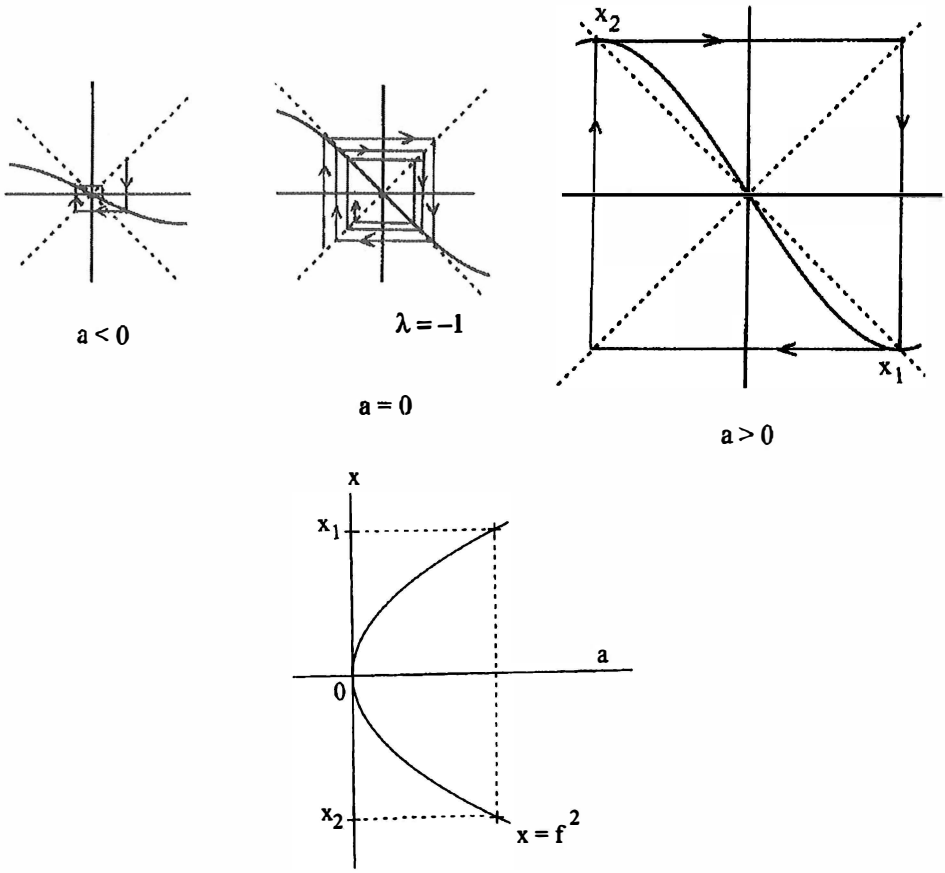


FIG. 3.13 – *Bifurcation de doublement de période (en haut) et diagramme de bifurcation de doublement de période (en bas). D'après [103].*

Taylor de $g(x)$ et $h(x)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{2\le j+k\le 3} g_{jk} x_1^j x_2^k + O(|x|^4), \\ h(x) &= \sum_{2\le j+k\le 3} h_{jk} x_1^j x_2^k + O(|x|^4). \end{aligned}$$

Cherchons une transformation :

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + \sum_{2\le j+k\le 3} \phi_{jk} \xi_1^j \xi_2^k + O(|\xi|^4), \\ x_2 &= \xi_2 + \sum_{2\le j+k\le 3} \psi_{jk} \xi_1^j \xi_2^k + O(|\xi|^4), \end{aligned} \tag{3.13}$$

qui élimine tous les termes non résonnants de (3.12) jusqu'à l'ordre 3. Dans le système de coordonnées (ξ_1, ξ_2), l'application (3.12) aura la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma(\xi) \\ \sigma(\xi) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

avec

$$\begin{aligned}\gamma(\xi) &= \sum_{2\le j+k\le 3} \gamma_{jk}\xi_1^j\xi_2^k + O(|\xi|^4),\\ \sigma(\xi) &= \sum_{2\le j+k\le 3} \sigma_{jk}\xi_1^j\xi_2^k + O(|\xi|^4).\end{aligned}$$

Pour que les termes d'ordre 2 soient nuls:

$$\gamma_{20} = \gamma_{11} = \gamma_{02} = \sigma_{20} = \sigma_{11} = \sigma_{02} = 0,$$

il faut et il suffit que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{20}\\ \phi_{11}\\ \phi_{02}\\ \psi_{20}\\ \psi_{11}\\ \psi_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{20}\\ g_{11}\\ g_{02}\\ h_{20}\\ h_{11}\\ h_{02} \end{pmatrix}.$$

Ce système a une solution unique car son déterminant est non-nul. Sa solution est:

$$\begin{aligned}\phi_{20} &= \frac{1}{2}g_{20} + \frac{1}{4}h_{20},\\ \phi_{11} &= \frac{1}{2}g_{20} + \frac{1}{2}g_{11} + \frac{1}{2}h_{20} + \frac{1}{4}h_{11},\\ \phi_{02} &= \frac{1}{4}g_{11} + \frac{1}{2}g_{02} + \frac{1}{8}h_{20} + \frac{1}{4}h_{11} + \frac{1}{4}h_{02},\\ \psi_{20} &= \frac{1}{2}h_{20},\\ \psi_{11} &= \frac{1}{2}h_{20} + \frac{1}{2}h_{11},\\ \psi_{02} &= \frac{1}{4}h_{11} + \frac{1}{2}h_{02}.\end{aligned}$$

Pour les termes d'ordre 3, il est possible, par un calcul analogue, d'obtenir:

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{03} = \gamma_{30} = \sigma_{12} = \sigma_{03} = 0,$$

par la transformation (3.13). Par contre, les termes $\sigma_{30}\xi_1^3$ et $\sigma_{21}\xi_1^2\xi_2$ sont résonnants et ne peuvent être éliminés. La forme normale de (3.12) est donc:

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ \sigma_{30}\xi_1^3 + \sigma_{21}\xi_1^2\xi_2\end{pmatrix} + O(|\xi|^4). \tag{3.15}$$

Le calcul donne:

$$\begin{aligned}\sigma_{30} &= h_{30} + g_{20}h_{20}\frac{1}{2}h_{20}^2 + \frac{1}{2}h_{20}h_{11},\\ \sigma_{21} &= h_{21} + 3g_{30} + \frac{1}{2}g_{20}h_{11} + \frac{5}{4}h_{20}h_{11} +\\ &\quad h_{20}h_{02} + 3g_{20}^2 + \frac{5}{2}g_{20}h_{20} + \frac{5}{2}g_{11}h_{20}\\ &\quad + h_{20}^2 + \frac{1}{2}h_{11}^2.\end{aligned}$$

3.3 L'application quadratique

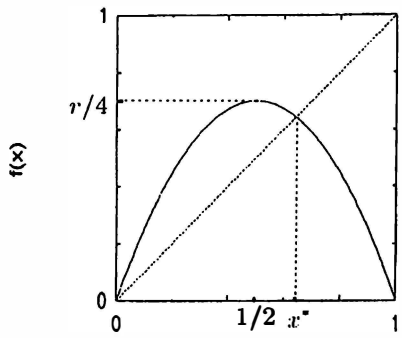


FIG. 3.14 – *L'application logistique* $f(x) = rx(1-x)$, $1 < r < 3$.

Considérons l'application quadratique (ou logistique) :

$$f(x) = rx(1-x), \quad r > 0. \tag{3.16}$$

La fonction $f(x) = rx(1-x)$ s'annule pour $x = 0$, $x = 1$. Sa dérivée $f'(x) = r(1-2x)$ s'annule pour $x = 1/2$. $f(x)$ atteint donc le maximum à $x = 1/2$ et $f(1/2) = r/4$ (Cf. figure 3.14).

Les points fixes de f sont solutions de l'équation :

$$x = rx(1-x), \text{ d'où } x = 0 \text{ et } x = x^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Comme $f'(0) = r$, $f'(1-\frac{1}{r}) = 2 - r$, pour $r < 1$ seul le point fixe zéro est stable. Pour $1 < r < 3$, le point fixe 0 devient instable et $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ est stable.

3.3.1 Conjugaison

Tout polynôme quadratique :

$$f(x) = ax^2 + bx + d, \quad a \neq 0, \tag{3.17}$$

est *conjugué* à :

$$g(z) = z^2 + c, \tag{3.18}$$

par l'application :

$$\phi(x) = \alpha x + \beta,$$

c'est-à-dire :

$$\phi \circ f = g \circ \phi \quad \text{ou} \quad f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi.$$

On vérifie facilement qu'il suffit de prendre $\alpha = a$, $\beta = b/2$ et $c = \beta - \beta^2$. En particulier l'itération :

$$x_{n+1} = f(z_n) \equiv rx_n(1-x_n), \quad r > 0, \tag{3.19}$$

est conjuguée à :

$$z_{n+1} = g(z_n) \equiv z_n^2 + c, \tag{3.20}$$

par la transformation :

$$\phi(x) = -rx + \frac{r}{2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4}. \tag{3.21}$$

Cette transformation reste valable lorsque x, r, z et c sont complexes. L'aspect le plus important de la conjugaison ϕ est qu'elle préserve les propriétés de l'itération : si x est un point fixe ou un point périodique de f alors z est le point fixe ou le point périodique de g. De plus, si ϕ est différentiable, alors les multiplicateurs des points correspondants sont égaux. Donc aux points périodiques attractifs (resp. répulsifs) de f correspondent des points périodiques attractifs (resp. répulsifs) de g.

3.3.2 Route du doublement de période

Bifurcation de doublage

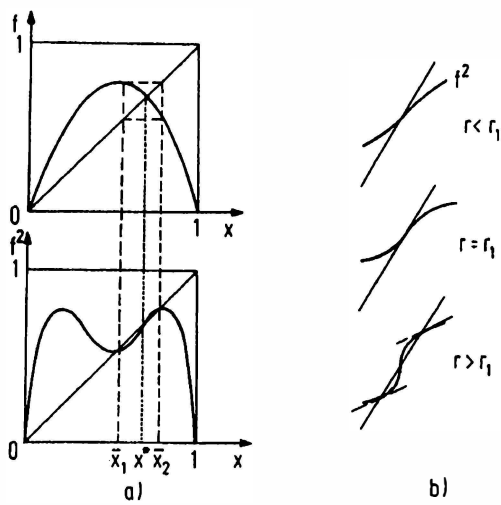


FIG. 3.15 – *Création d'un cycle d'ordre 2. D'après [145].*

Pour $r > r_1 \equiv 3$, $|f'(1-\frac{1}{r})| = |2-r| > 1$: $x^* = 1-\frac{1}{r}$ devient à son tour instable. Que se passe-t-il alors? En fait le point $r_1 = 3$ est le point de *bifurcation de doublage* avec $f'(x^*) = -1$. Dès que $r > r_1$, deux points fixes stables $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ de f^2 sont créés (Cf. figure 3.15). Rappelons que 0 et x^* sont aussi des points fixes de $f^2(x)$ et de tous les $f^p(x)$, $p \geq 1$ et que $f^{p\prime}(\bar{x}) = [f'(\bar{x})]^p$. On en déduit que, lorsque $x = x^*$ devient instable pour $f(x)$, il devient également instable pour $f^2(x)$ car $|f'(x^*)| > 1$ implique $|f'(x^*)|^2 > 1$.

La stabilité du cycle d'ordre 2 :

$$f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2, \quad f(\bar{x}_2) = x_1, \tag{3.22}$$

peut être établie en analysant les zéros de l'équation :

$$f^2(x) = x. \tag{3.23}$$

En effet, utilisant le fait que $x = 0$ et $x = x^*$ sont aussi les racines de (3.23), on montre facilement que $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ sont solutions de l'équation :

$$r^2x^2 - r(r+1)x + r + 1 = 0$$

et, en appliquant (3.8), que le cycle (3.22) est stable pour $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ (Cf. figure 3.15).

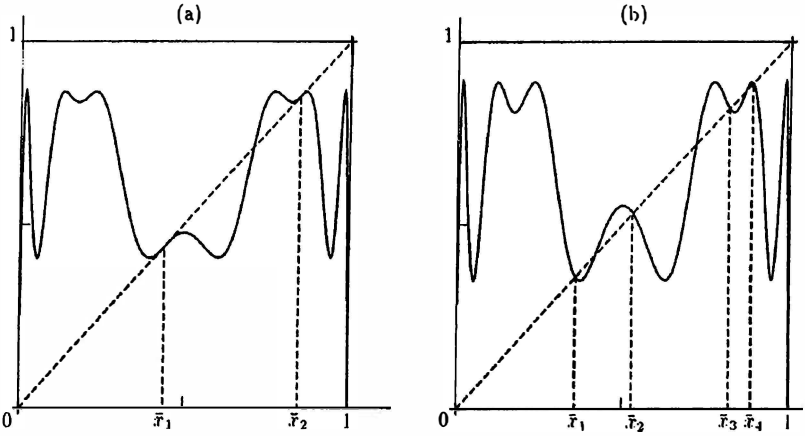


FIG. 3.16 – *Graphes de* $y = f^4(x)$ *à* $r = r_2 = 1 + \sqrt{6}$ *(a) et* $r > r_2$ *(b).*

Route du doublement de période

Le phénomène de doublage précédent peut se reproduire de nouveau pour $f^2(x)$: à $r = r_2 = 1 + \sqrt{6} = 3.44931...$ le cycle d'ordre 2 perd sa stabilité et donne lieu à un cycle stable d'ordre 4 (Cf. figure 3.16, dessinée par le programme 3.6) et ainsi de suite... On observe une suite croissante de valeurs du paramètre r : $r_1, r_2, r_3, \ldots$ qui correspondent à des bifurcations d'une orbite périodique instable de période 2^n en une orbite périodique stable de période 2^{n+1} via la bifurcation de doublage :

$$f^{2^{n+1}} = f^{2^n} \circ f^{2^n}.$$

Ces valeurs du paramètre s'accumulent en une valeur r_∞ où l'attracteur devient un ensemble de Cantor (voir la figure 3.17, dessinée par le programme 3.3).

Tableau 3.1 : Bifurcation de doublage pour $f(x) = rx(1-x)$.

n	r_n
1	3.0
2	3.44931...
3	3.54402...
4	3.56437...
5	3.56875...
∞	3.56994...

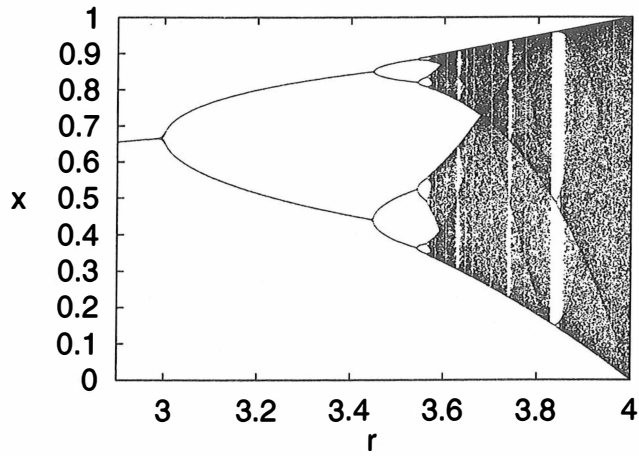


FIG. 3.17 – *Cascade de bifurcations pour* $f(x) = rx(1-x)$.

De plus :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = \delta. \tag{3.24}$$

Ce nombre δ a une valeur universelle = 4.66920161... (constante de Feigenbaum), pour les familles de transformations de l'intervalle qui ont un unique maximum parabolique. Par exemple, la famille de transformations $f(x) = r\sin(\pi x)$ possède également une suite infinie de bifurcations de doublage. Les valeurs du paramètre de bifurcation sont différentes de celles de la famille quadratique, par contre, la constante δ est la même. Nous verrons plus loin comment calculer numériquement la constante δ.

Remarque 3.3.1 Nous avons vu à l'exemple 3.2.1 que, dans l'application de Hénon, si $b = 0.3$, $a = 3(1-b)^2/4 = 0.3675$ est un point de bifurcation de doublement de période pour l'application de Hénon. Si a continue à augmenter, on obtient une cascade de bifurcations de doublement de périodes, comme le montre la figure 3.18 (dessinée par le programme 3.4).

3.3.3 La période trois et le théorème de Sarkovski

La période trois

Cherchons d'abord la condition sur c pour que l'itération (3.20) admette la période trois, c'est-à-dire, en utilisant x, y, z au lieu de z_1, z_2, z_3 :

$$\begin{aligned} y &= x^2 + c, \\ z &= y^2 + c, \\ x &= z^2 + c. \end{aligned} \tag{3.25}$$

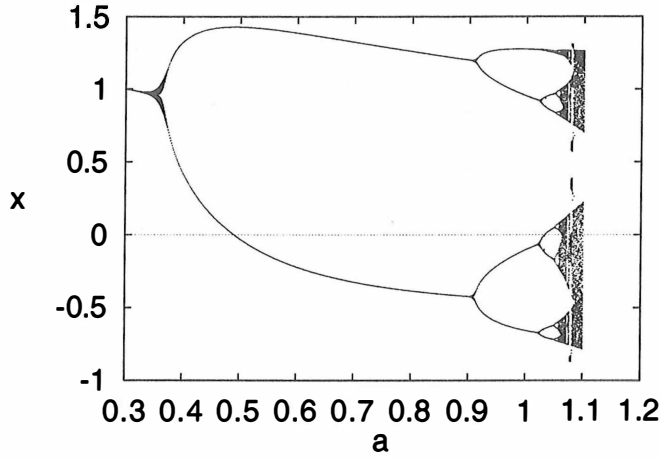


FIG. 3.18 – *Cascade de bifurcations pour l'application de Hénon à* $b = 0.3$.

Posons $s = x + y + z$ et additionnons les trois équations (3.25), nous obtenons

$$x^2 + y^2 + z^2 = s - 3c. \tag{3.26}$$

On a de plus :

$$\begin{aligned} s^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx), \\ &= s - 3c + 2(xy + yz + zx). \end{aligned} \tag{3.27}$$

On déduit de (3.25), en faisant des soustractions membre à membre :

$$\begin{aligned} y - z &= (x + y)(x - y), \\ z - x &= (y + z)(y - z), \\ x - y &= (z + x)(z - x). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Multipliant les trois équations de (3.28) membre à membre nous obtenons :

$$1 = (x + y)(y + z)(z + x) \tag{3.29}$$

$$= (s - z)(s - x)(s - y). \tag{3.30}$$

L'équation (3.29) donne, d'après (3.25)-(3.27) :

$$\begin{aligned} 1 &= x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz \\ &= (y - c)(y + z) + (z - c)(z + x) + (x - c)(x + y) + 2xyz \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2c(x + y + z) + xy + yz + zx + 2xyz \\ &= \frac{1}{2}s^2 + (\frac{1}{2} - 2c)s - \frac{3}{2}c + 2xyz. \end{aligned} \tag{3.31}$$

L'équation (3.30) donne :

$$\begin{aligned} 1 &= s^3 - (x + y + z)s^2 + (xy + yz + zx)s - xyz \\ &= \frac{1}{2}(s^2 - s + 3c)s - xyz. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Eliminant xyz de (3.31) et (3.32), on obtient :

$$\begin{aligned} s^3 - \frac{1}{2}s^2 \; &+ \; (c+\frac{1}{2})s - 3(\frac{1}{2}c+1) \\ &= \; (s-\frac{3}{2})(s^2+s+c+2) = 0. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Les solutions sont :

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-1.75-c}, \\ s_3 &= 3/2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

x, y, z sont donc les racines du polynôme du troisième degré :

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0 \tag{3.35}$$

avec, d'après (3.27) et (3.32),

$$\begin{aligned} \sigma_1 = x+y+z = s, \\ \sigma_2 = xy+yz+zx = \frac{1}{2}(s^2-s+3c), \\ \sigma_3 = xyz = \frac{1}{2}(s^2-s+3c)s - 1 \end{aligned}$$

où s prend les trois valeurs (3.34). On obtient ainsi 9 solutions de (3.25). Pour

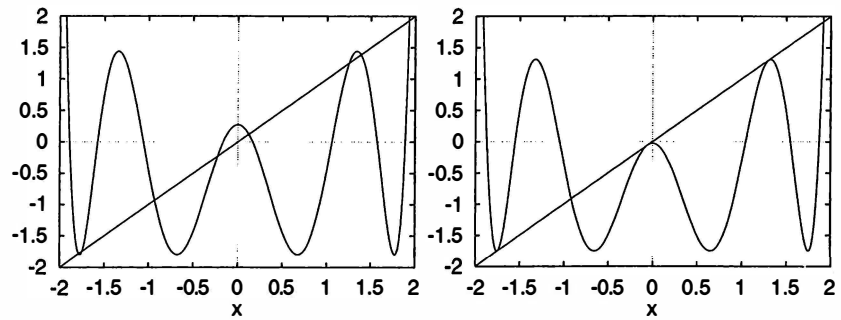


FIG. 3.19 – *Graphes de* $y = g^3(x)$ *à* $c = -1.8$ *(à gauche) et* $c = -1.75$ *(à droite).*

$s = s_3$, (3.35) possède des racines complexes. Pour $c < -1.75$ et $s = s_{1,2}$, (3.35) donne 6 racines réelles, abscisses des points d'intersection de la courbe $y = g^3(x)$, $g(x) = x^2 + c$, avec la bissectrice $y = x$ (figure 3.19 gauche). Lorsque $c = -1.75$ ou $r = 1+\sqrt{8}$, d'après (3.21), on a $s_1 = s_2 = -0.5$: les 6 points d'intersection coagulent deux à deux et la bissectrice est tangente à la courbe en 3 points (figure 3.19 droite ou figure 4.49a pour $f(x) = rx(1-x)$). C'est le début de la fenêtre de période trois (figure 3.17) [61].

Théorème de Sarkovski

Sarkovski [144] a construit la séquence suivante :

$$\begin{aligned}
&3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 11 \to \dots, \\
&2\times 3 \to 2\times 5 \to 2\times 7 \to 2\times 9 \to 2\times 11 \to \dots, \\
&2^2\times 3 \to 2^2\times 5 \to 2^2\times 7 \to 2^2\times 9 \to 2^2\times 11 \to \dots, \\
&2^3\times 3 \to 2^3\times 5 \to 2^3\times 7 \to 2^3\times 9 \to 2^3\times 11 \to \dots \\
&\dots\dots, \\
&\dots \to 2^5 \to 2^4 \to 2^3 \to 2^2 \to 2^1 \to 2^0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

On écrit d'abord la séquence des entiers impairs, dans l'ordre croissant :

$$3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 11 \to \dots$$

On ajoute ensuite la séquence :

$$2\times 3 \to 2\times 5 \to 2\times 7 \to 2\times 9 \to 2\times 11 \to \dots$$

toujours dans l'ordre croissant, puis la séquence :

$$2^2\times 3 \to 2^2\times 5 \to 2^2\times 7 \to 2^2\times 9 \to 2^2\times 11 \to \dots,$$

puis la séquence :

$$2^3\times 3 \to 2^3\times 5 \to 2^3\times 7 \to 2^3\times 9 \to 2^3\times 11 \to \dots$$

etc. Finalement, on ajoute la séquence :

$$\dots \to 2^5 \to 2^4 \to 2^3 \to 2^2 \to 2^1 \to 2^0$$

dans l'ordre décroissant. On peut vérifier que l'ensemble de ces séquences est une partition de l'ensemble des entiers positifs.

Théorème 3.3.1 (Sarkovski) *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue possédant un p-cycle alors f possède aussi un q-cycle où q est situé à droite de p dans la séquence (3.36).*

Une preuve de ce théorème se trouve dans [44]. Comme 3 est situé au début du tableau de Sarkovski, on en déduit que si l'application $f(x)$ a la période 3, elle a aussi la période n où n est un entier quelconque (c'est le cas de l'application logistique à $r = 1+\sqrt{8}$). C'est le fameux théorème de Li et Yorke [107] "Période trois implique chaos". Cependant il est à remarquer que le mot "chaos" dans ce théorème signifie simplement un comportement apériodique. Nous verrons, à la section 4.8, que le début de la période trois pour l'application logistique est aussi le siège d'une intermittence de Pomeau-Manneville de type I.

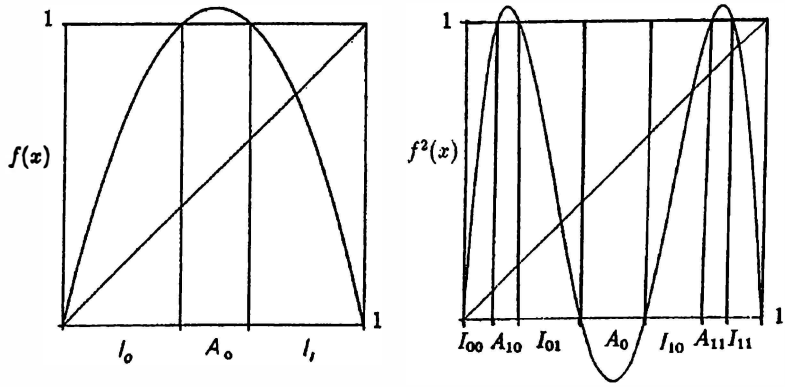


FIG. 3.20 – *Graphes de* $f(x) = rx(1-x)$ *et* $f^2(x)$, $r > 4$. *D'après [44].*

3.3.4 Les poussières de Fatou et la dynamique symbolique

Les poussières de Fatou

Considérons maintenant le cas $r > 4$. Comme le maximum de $f(x)$ est $r/4 > 1$, certains points quittent l'intervalle $I = [0,1]$ après la première itération. Désignons l'ensemble de ces points par A_0 (Cf. figure 3.20 (gauche)). Il est évident que A_0 est un ouvert centré sur $x = 1/2$ et défini par:

$$A_0 = \{x \in I | f(x) > 1\}.$$

L'ensemble des points qui restent dans I après la première itération, (i. e. $I - A_0$,) se compose de deux intervalles fermés (car A_0 est un intervalle ouvert) I_0 et I_1 tels que:

$$f : I_0 \to I, \quad f : I_1 \to I$$

sont des bijections.

Soit maintenant:

$$A_1 = \{x \in I | f^2(x) > 1\},$$

on voit sur la figure 3.20 (droite) que A_1 se compose de deux intervalles ouverts A_{10} et A_{11}. L'ensemble des points qui restent dans I après la deuxième itération se compose de quatre intervalles fermés I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11} tels que:

$$f : I_{00} \to I, \quad f : I_{01} \to I \quad f : I_{10} \to I, \quad f : I_{11} \to I$$

sont des bijections.

Continuons de cette manière et notons les deux faits suivants:

(i) A_n se compose de 2^n intervalles ouverts disjoints et

$$I - (A_0 \cup \ldots \cup A_n)$$

se compose de 2^{n+1} intervalles fermés,

(ii) l'ensemble $\Lambda = I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$ est un ensemble de Cantor [44]. Dans son ouvrage [113], B. B. Mandelbrot appelle cet ensemble *les poussières de Fatou* (en anglais, *Fatou dusts*) rendant ainsi hommage au mathématicien Pierre Fatou qui a étudié cet ensemble en 1906 [52].

La dynamique symbolique

La technique de numérotation des intervalles $I_0, I_1, I_{00}, I_{01}, I_{10}$ etc. est empruntée à la dynamique symbolique. Elle est aussi utilisée dans le *fer à cheval* de Smale (voir le chapitre suivant). Ainsi un élément $x \in \Lambda$ est représenté par une séquence infinie de 0 et 1 :

$$S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$$

avec $s_j = 0$, si $f^j(x) \in I_0$, $s_j = 1$ si $f^j(x) \in I_1$. L'application S sera un homéomorphisme si l'on définit sur l'ensemble,

$$\Sigma = \{s = (s_0, s_1, s_2, \dots) | \quad s_j = 0 \text{ ou } 1\},$$

une distance de la façon suivante : pour deux séquences $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ et $t = (t_0, t_1, t_2, \dots)$, on définit la distance $d(s,t)$ par :

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Comme $|s_i - t_i| = 0$ ou 1, on a :

$$d(s,t) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

La distance $d(s,t)$ est donc bornée. On peut aussi montrer que $d(r,s) + d(s,t) = d(r,t)$. $d(s,t)$ est donc une métrique. Muni de cette métrique, l'ensemble Σ sera homéomorphe à l'ensemble Λ [44].

3.4 Calcul des constantes de Feigenbaum

3.4.1 Points critiques et supercycles

Soit $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application itérée, un *point critique* de f est un point $\bar{x}$ avec $f'(\bar{x}) = 0$. Un 2^n-supercycle de $f(x)$ est un 2^n-cycle superstable tel que le point critique $\bar{x}$ appartienne au cycle. Pour l'application logistique $f(x) = rx(1-x)$, le point critique est $\bar{x} = 1/2$. Soit R_n la valeur du paramètre r correspondant au 2^n-supercycle ; R_n, est le zéro du polynôme :

$$g(R_n) \equiv f_{R_n}^{2^n}(\bar{x}) - \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = \frac{1}{2}. \tag{3.37}$$

La figure (3.21) montre les cycles superstables aux points R_1 et R_2 respectivement (remarquer sur les figures b) et d) les tangentes horizontales aux points fixes, racines des équations $f'^{2}_{R_1}(x) = 0$, $f'^{4}_{R_2}(x) = 0$). Comme $r_n < R_n < r_{n+1}$, (3.24) implique que la quantité

$$\delta_n = \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} \tag{3.38}$$

tend vers δ lorsque $n \to \infty$.

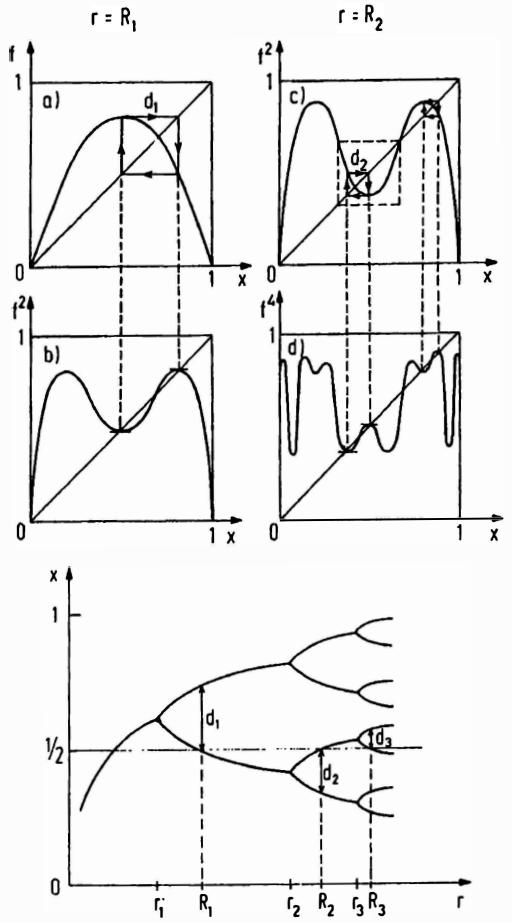


FIG. 3.21 – *Supercycles et distances d_n. D'après [145].*

3.4.2 Calcul de la constante δ.

Les premières valeurs R_0, R_1 peuvent être calculées exactement de la façon suivante :

pour $n = 0$, (3.37) s'écrit :

$$f_{R_0}(\bar{x}) - \bar{x} = 0, \text{ ou } R_0\bar{x}(1-\bar{x}) - \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = \frac{1}{2},$$

d'où $R_0 = 2$;

pour $n = 1$, (3.37) s'écrit :

$$f^2_{R_1}(\bar{x}) - \bar{x} \equiv R_1 f(\bar{x})[1 - f(\bar{x})] - \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = \frac{1}{2},$$

d'où :

$$R_1^3 - 4R_1^2 + 8 = 0.$$

Cette équation possède trois solutions: 2, $1 \pm \sqrt{5}$. Comme $R_1 > r_1 = 3$ (voir le paragraphe précédent), on en déduit que:

$$R_1 = 1 + \sqrt{5} = 3.23606797749978969640917366873.$$

Pour calculer R_n, on résout (3.37) par la méthode de Newton:

$$r_{k+1} = r_k - \frac{g(r_k)}{g'(r_k)}, \quad r_0 \approx R_n, \tag{3.39}$$

où $g'(r)$ désigne la dérivée de

$$g(r) \equiv f_r^{2^n}(\bar{x}) - \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = \frac{1}{2},$$

par rapport à r. La fonction $g(r)$ qui est définie par (3.37) et sa dérivée $g'(r_k)$ seront calculées de la façon suivante.

On a:

$$f_r^{j+1}(\bar{x}) = f_r(f_r^j(\bar{x})) = r f_r^j(\bar{x})[1 - f_r^j(\bar{x})], \quad j = 0, \ldots, 2^n. \tag{3.40}$$

D'où, en dérivant (3.40) par rapport à r, on obtient la formule de récurrence:

$$\frac{df_r^{j+1}(\bar{x})}{dr} = f_r^j(\bar{x})[1 - f_r^j(\bar{x})] + r\left[1 - 2f_r^j\right]\frac{df^j(\bar{x})}{dr} \tag{3.41}$$

$j = 0, \ldots, 2^n$, avec, pour $j = 0$:

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad \frac{dx_0}{dr} = 0.$$

On a donc à mener simultanément les deux itérations suivantes:

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= r x_j(1 - x_j), \quad x_0 = 1/2, \quad j = 0, \ldots, 2^n, \\ x'_{j+1} &= x_j(1 - x_j) + r(1 - 2x_j)x'_j, \quad x'_0 = 0, \\ & \quad j = 0, 1, \ldots, 2^n. \end{aligned}$$

On a alors:

$$g(r) = x_m - 1/2, \quad g'(r) = x'_m, \quad m = 2^n$$

La formule (3.38) fournit la valeur initiale de R_n:

$$R_n \approx R_{n-1} + \delta_{n-1}^{-1}(R_{n-1} - R_{n-2}) \quad n \geq 2, \tag{3.42}$$

δ_1 sera pris égal à 4. Lorsque n est grand, la prédiction est de plus en plus précise et quelques itérations suffisent pour localiser R_n avec précision. On en déduit δ_n par (3.38). Le programme 3.5 calcule les constantes R_n et δ_n d'après l'algorithme précédent.

3.4.3 La constante α et la fonction universelle $g(x)$

Soit d_n la différence entre les valeurs $\bar{x} = \frac{1}{2}$ et $f_{R_n}^{2^{n-1}}(\bar{x})$:

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(\bar{x}) - \bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{2}. \tag{3.43}$$

La figure 3.21 montre la relation entre les d_n et les supercycles. Posons :

$$\alpha_n = \frac{d_n}{d_{n+1}}. \tag{3.44}$$

Le nombre de Feigenbaum α ou le *rapport d'échelles* sera alors défini par :

$$\alpha = -\lim_{n\to\infty} \alpha_n. \tag{3.45}$$

On déduit de (3.43)-(3.45) et des résultats du programme 3.5 :

$$\alpha = 2.502907876... \tag{3.46}$$

L'idée essentielle de Feigenbaum est que, si l'on effectue un *changement d'échelles* (ou une *renormalisation*) par un facteur $\alpha = 2.502...$ à chaque doublement de période, la fonction $f^{2^n}(x)$ tendra, au voisinage de $\bar{x}$, vers une fonction *universelle* $g(x)$, c'est-à-dire la même pour une large classe d'applications itérées $f(x)$ remplissant les conditions suivantes :

$f : [0,1] \to [0,1]$ est une application continue,
f a un maximum x_m avec $f''(x_m) \neq 0$,
f est monotone dans $[0, x_m]$ et $[x_m, 1]$,
f a une dérivée Schwarzienne $S_f(x) < 0$ pour tout $x \in [0,1]$, où

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right).$$

Considérons, par exemple, la figure 3.4.3 (dessinée par le programme 3.6) : à gauche le graphe du huitième itéré de la fonction quadratique $f(x) = rx(1-x)$, à droite le huitième itéré de la fonction sinus : $f(x) = r \sin \pi x$. Au voisinage de $\bar{x} = 1/2$, les deux graphes ont le même aspect. De même regardons la figure 3.21 (haut) : l'intérieur du carré pointillé du dessin (c) est similaire au carré $[0,1] \times [0,1]$ du dessin (a) renversé.

Par un changement de coordonnées, on amène le point $\bar{x} = 1/2$ à $\bar{x} = 0$. L'équation (3.43) s'écrit alors :

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0). \tag{3.47}$$

Utilisant le facteur d'échelle α (Cf. Equation (3.45)), on peut écrire, d'après l'hypothèse de Feigenbaum :

$$\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n d_{n+1} = d_1. \tag{3.48}$$

(3.47) et (3.48) donnent :

$$\lim_{n\to\infty} (-\alpha)^n f_{R_{n+1}}^{2^n}(0) = d_1. \tag{3.49}$$

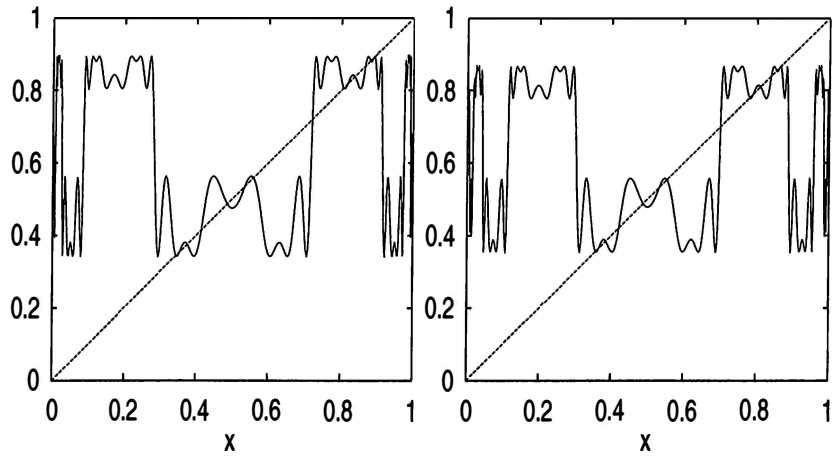


FIG. 3.22 – *8e itéré de* $f(x) = rx(1-x)$, $r = 3.5699$ *(à gauche) et 8e itéré de* $f(x) = r\sin\pi x$, $r = 0.86539$ *(à droite).*

Feigenbaum suggère une généralisation de (3.49) en plusieurs étapes.

1. Etendre (3.49) à un voisinage V de $\bar{x} = 0$ et écrire :

$$\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f^{2^n}_{R_{n+1}}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n}\right) = g_1(x), \quad \text{pour } x \in V. \tag{3.50}$$

2. Introduire une suite de fonctions universelles :

$$g_i(x) \equiv \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n f^{2^n}_{R_{n+i}}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n}\right), \quad i = 0,1,2,3,\ldots \tag{3.51}$$

Les fonctions $g_i(x)$ sont reliées entre elles par la *transformation de doublage* (ou *de renormalisation*) T :

$$g_{i-1}(x) = (-\alpha)g_i\left[g_i\left(\frac{x}{-\alpha}\right)\right] \equiv Tg_i(x). \tag{3.52}$$

En effet

$$\begin{aligned}(-\alpha)g_i[g_i(-x/\alpha)] &= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^{n+1} f^{2^n}_{R_{n+i}}\left[\frac{(-\alpha)^n}{(-\alpha)^n} f^{2^n}_{R_{n+i}}(-x/\alpha(-\alpha)^n)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^{n+1} f^{2^n}_{R_{n+i}}\left[f^{2^n}_{R_{n+i}}(x/(-\alpha)^{n+1})\right]. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Comme

$$f^{2^n}_{R_{n+i}}\left[f^{2^n}_{R_{n+i}}(x/(-\alpha)^{n+1})\right] = f^{2.2^n}_{R_{n+i}}(x/(-\alpha)^{n+1}) = f^{2^{n+1}}_{R_{n+i}}(x/(-\alpha)^{n+1}),$$

nous posons $m = n+1$ et le second membre de (3.53) s'écrit :

$$\lim_{m\to\infty}(-\alpha)^m f^{2^m}_{R_{m+i-1}}\left[x/(-\alpha)^m\right)\Big]$$

qui n'est autre que $g_{i-1}(x)$.

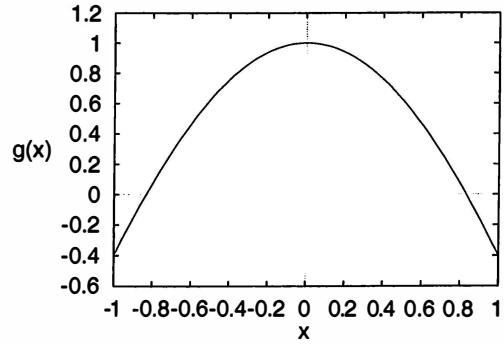


FIG. 3.23 – *Graphe de $g(x)$ au voisinage de $x = 0$.*

3. Prendre, dans (3.52), la limite $i \to \infty$, la fonction :

$$g(x) \equiv \lim_{i\to\infty} g_i(x)$$

devient le point fixe de T dans l'espace des fonctions[1] :

$$g(x) = Tg(x) = -\alpha g\Big[g\Big(-\frac{x}{\alpha}\Big)\Big]. \tag{3.54}$$

Cette équation détermine aussi la constante α par :

$$g(0) = -\alpha g[g(0)]. \tag{3.55}$$

Il est facile de montrer que, si $g(x)$ est une solution de (3.54), $\mu g(x/\mu)$ l'est aussi. On peut donc fixer μ par la condition :

$$g(0) = 1. \tag{3.56}$$

On en déduit $g(1) = -1/\alpha$. La fonction $g(x)$ est une fonction en x^2 qui satisfait l'équation (3.54) avec les conditions (3.55) et (3.56). On peut obtenir un développement limité de cette fonction en posant :

$$g(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^{2i} + O(x^{2(n+1)}). \tag{3.57}$$

Remplaçant (3.57) dans (3.54) et égalisant les coefficients des x^{2i}, $i = 0, 1, 2, \ldots$, on obtient $a_1, a_2, \ldots$ et α. Les premiers a_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$ sont [55] :

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.527632997, & a_2 &= 1.048151943 \times 10^{-1}, \\ a_3 &= 2.670567349 \times 10^{-2}, & a_4 &= -3.527413864 \times 10^{-3}, \\ a_5 &= 8.158191343 \times 10^{-5}, & a_6 &= 2.536842339 \times 10^{-5}, \\ a_7 &= -2.687772769 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

On en déduit le graphe de $g(x)$ (figure 3.23) et

$$\alpha = -\frac{1}{g(1)} \approx 2.502907876\ldots$$

(à comparer avec la valeur de α donnée par (3.46)).

1. Noter que ce point fixe est instable, car d'après (3.52) chaque application T éloigne g_i de g.

3.5 L'endomorphisme du cercle

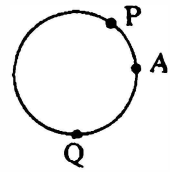


FIG. 3.24 – *L'endomorphisme du cercle.*

Considérons un cercle C de périmètre 1 (c'est-à-dire de rayon $1/2\pi$). Soit P un point du cercle d'arc $AP = x$ (Cf. figure 3.24), au point P on fait correspondre un point Q du cercle d'arc $AQ = f(x)$ avec :

$$f(x) = x + a + g(x), \quad g(x+1) = g(x), \quad a \in \mathbb{R}. \tag{3.58}$$

L'application $f(x)$, est appelée l'endomorphisme du cercle. La fonction $g(x)$ représente la partie non-linéaire de l'endomorphisme et a donne la fréquence de rotation en l'absence du terme non-linéaire. La dynamique sera périodique ou quasi-périodique selon que la quantité :

$$W = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f^n(x) - x}{n}\right), \tag{3.59}$$

appelée *nombre de rotation* (en anglais winding number), sera rationnelle ou irrationnelle. En effet, il est facile de voir que P est un point périodique s'il existe des entiers p et q tels que :

$$f^q(x) = x + p. \tag{3.60}$$

Le nombre de rotation est dans ce cas :

$$W = \lim_{n\to\infty}\frac{f^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{f^{nq}(x) - x}{nq} = \frac{np}{nq} = \frac{p}{q}. \tag{3.61}$$

Dans le cas où $g(x) = 0$, on a $W = a$.

3.5.1 L'application standard

L'endomorphisme du cercle le plus connu est l'*application standard* :

$$f(x) = x + a - \left(\frac{K}{2\pi}\right)\sin(2\pi x) \mod 1, \tag{3.62}$$

proposée par Arnold [6]. Il y a deux paramètres (a, K) dans l'application standard. Le paramètre K mesure le degré de non-linéarité de l'application. En l'absence de

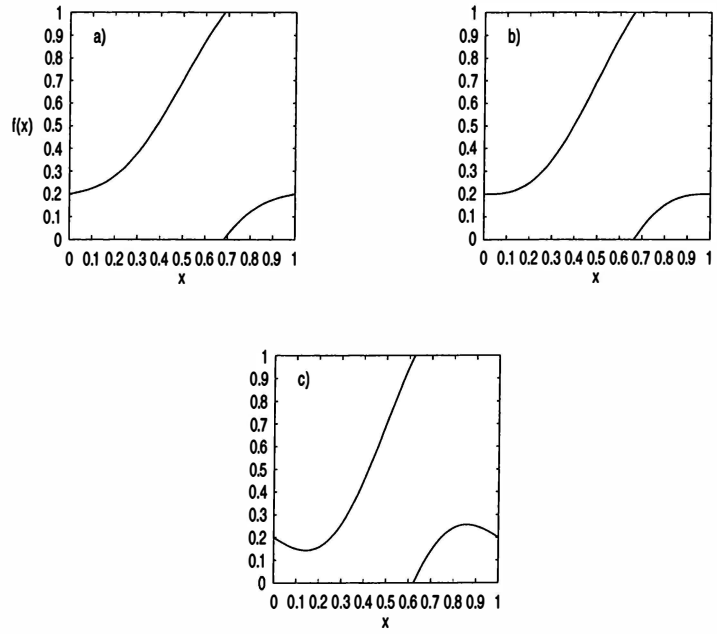


FIG. 3.25 – *Graphes de $f(x)$ pour $a = 0.2$ (a) $K < 1$ (b) $K = 1$ (c) $K > 1$.*

la non-linéarité, le paramètre a est le nombre de rotation. La figure 3.25 montre quelques graphes de $f(x)$ à $a = 0.2$. Noter que :

$$f'(x) \equiv 1 - K\cos(2\pi x) = 0, \tag{3.63}$$

si $\cos 2\pi x = 1/K$. Par conséquent, lorsque $K < 1$ l'application (3.62) est inversible. Pour $K = 1$, l'application présente un point d'inflexion à tangente horizontale en $x = 0$ (et $x = 1$). Pour $K > 1$, elle développe des maxima et minima locaux et l'application n'est plus inversible (Figure 3.25).

Les points fixes de (3.62) sont donnés par $f(x) = x$, d'où :

$$a - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) = N, \tag{3.64}$$

où N est un entier choisi de façon que $0 \leq x \leq 1$. Les solutions de (3.64), si elles existent, arrivent par paire. Par exemple, pour :

$$N = 0, \quad 0 < \frac{2\pi a}{K} < 1,$$

l'équation (3.64) possède une paire de solutions :

$$x = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{2\pi a}{K}\right) \text{ et } x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Arcsin}\left(\frac{2\pi a}{K}\right). \tag{3.65}$$

La collision des solutions se produit à $K = 2\pi a$ qui est donc le point de bifurcation nœud-col. La solution unique est alors $x = 1/4$. Au voisinage de $K = 2\pi a$, le régime

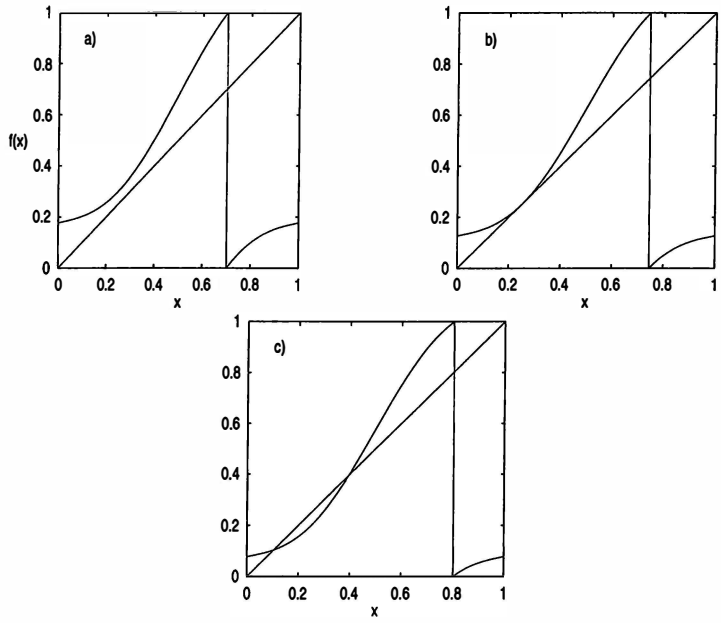


FIG. 3.26 – *Bifurcation nœud-col (ou tangentielle) à* $K = 0.8$ *:* *(a)* $a > K/2\pi$ *(b)* $a = K/2\pi$ *(c)* $a < K/2\pi$.

quasi-périodique est caractérisé par un comportement intermittent de type I avec réinjection (voir la section 4.8 et la figure 3.26).

La condition de stabilité est définie par $|f'(x)| < 1$ ou

$$-1 < 1 - K\cos(2\pi x) < 1. \tag{3.66}$$

Pour $f'(x) = -1$ ou

$$K\cos(2\pi x) = 2, \tag{3.67}$$

on a le doublement de période. Il se produit, dans le plan (a, K), le long de l'hyper-

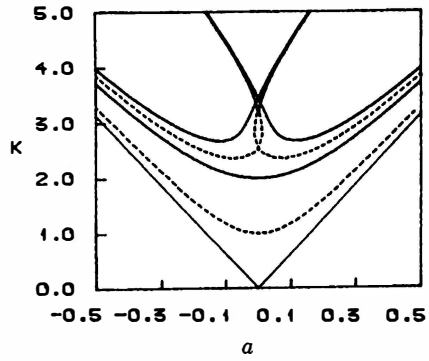


FIG. 3.27 – *Bifurcations de l'application standard dans le plan* (a, K). *D'après [61].*

bole (Cf. figure 3.27, ligne continue):

$$K = \sqrt{4 + (2\pi a)^2}, \tag{3.68}$$

obtenue en éliminant x de (3.65) et (3.67).

Pour $f'(x) = 1$ ou $\cos(2\pi x) = 0$, on a la bifurcation nœud-col. Elle se produit le long des droites: (Cf. figure 3.27)

$$K = \pm 2\pi a, \tag{3.69}$$

obtenues en éliminant x de (3.65) et $\cos(2\pi x) = 0$.

Les points fixes superstables sont obtenus en éliminant x de (3.65) et (3.63). Le résultat est l'hyperbole (Cf. figure 3.27, ligne pointillée):

$$K = \sqrt{1 + (2\pi a)^2}. \tag{3.70}$$

A noter que, d'après (3.63), il n'y a pas d'orbites superstables si $K < 1$. Les dernières courbes, situées au-dessus de l'hyperbole (3.68) et formant une "queue d'aronde" (*swallow tail*, en anglais), correspondent aux orbites de période deux superstables (courbe pointillée) et aux bifurcations d'ordre deux. Dans le cas général, les courbes correspondant aux bifurcations d'ordre n sont obtenues en éliminant x entre

$$f^n(x) = x + N \quad \text{et} \quad (f^n(x))' = \mu$$

avec $\mu = 1$ (bifurcation nœud-col), $\mu = 0$ (orbite de période n superstable) ou $\mu = -1$ (bifurcation de doublement de période).

3.5.2 Les langues d'Arnold et l'escalier du diable

Pour comprendre le phénomène d'*accrochage* (en anglais, *mode-locking*), considérons d'abord le cas $K = 0$. L'application standard se réduit alors à (voir (3.59)):

$$x_{n+1} = x_n + a \mod 1$$

qui est illustrée sur la figure 3.28a, pour le cas $a = 2/5 = 0.4$. Après cinq itérations x retourne à sa valeur initiale $x_0 = 0.3$. Le nombre de rotation est dans ce cas:

$$W = a = \frac{2}{5}.$$

Si le nombre de rotation est un rationnel p/q, l'application est périodique. Si le nombre de rotation est un irrationnel, alors x ne retourne pas exactement à la valeur initiale, le mouvement, dans ce cas, est *quasi-périodique*. La figure 3.28b illustre un cas de mouvement quasi-périodique avec $a = 0.404004...$ (irrationnel) pour 100 itérations.

Quand $K \neq 0$ on a, d'après (3.59),

$$W = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n - x}{n} \right) \tag{3.71}$$

où on calcule x_n sans prendre (mod 1). Par exemple pour $K = 0.95$ et $a = 0.404004...$, le mouvement reste périodique (fig. 3.29) comme dans le cas $K = 0$ et $a = 2/5$ (fig. 3.28a). C'est le phénomène d'*accrochage* à la résonance p/q (ici $p/q = 2/5$). Noter que dans le cas des applications à un paramètre, comme l'application logistique par exemple, il n'y a pas de phénomène d'accrochage.

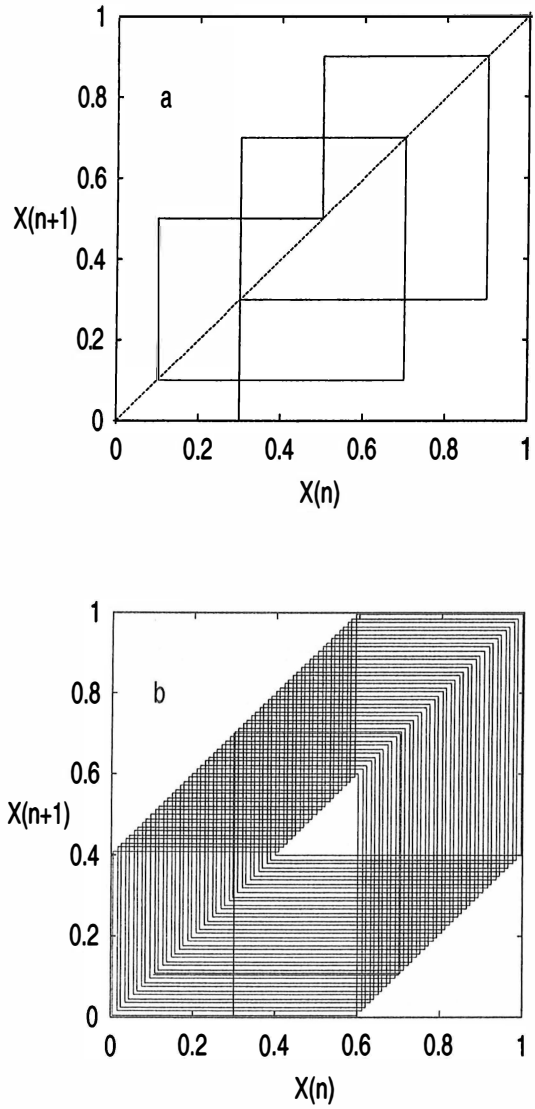


FIG. 3.28 – *Application standard linéaire* $x_{n+1} = x_n + a$ $(K = 0)$.
a) $a = 0.4$ *:* $x_0 = 0.3$, $x_1 = 0.7$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.9$, $x_5 = x_0 = 0.3$ *(période 5).*
b) $a = 0.404004...$, $x_0 = 0.3$ *(quasi-périodique). D'après [9].*

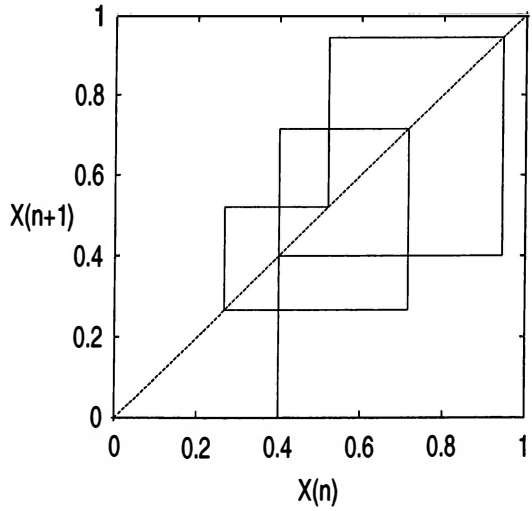


FIG. 3.29 – *Application standard non-linéaire : $K = 0.95$, $a = 0.404004...$ et $x_0 = 0.4$. D'après [9].*

Les langues d'Arnold

Sur la figure 3.30, pour une résonance p/q donnée on a une région peinte en noir, appelée *langue d'Arnold.* L'orbite est périodique à l'intérieur des langues d'Arnold et "quasi-périodique" en dehors. Nous indiquons ici la manière de calculer, pour un K donné, la largeur $\Delta a(p/q, K)$ de chaque langue d'Arnold, d'après l'algorithme de Jenson *et al.* [98]

Supposons que nous voulions calculer, par exemple $\Delta a(p/q, K)$. Cette résonance correspond au point fixe de l'application :

$$f^q(x) = x + p. \tag{3.72}$$

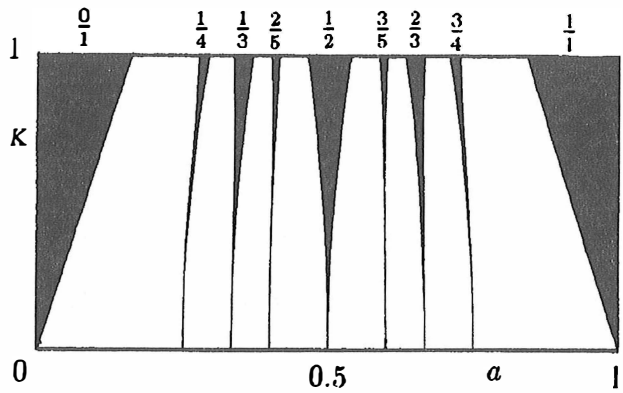


FIG. 3.30 – *Les langues d'Arnold*

Pour que le point fixe défini par (3.72) soit stable il faut et il suffit que :

$$\left|\frac{df^q}{dx}\right| \leq 1. \tag{3.73}$$

$\Delta a(p/q, K)$ est obtenu en éliminant x entre (3.72) et

$$\left|\frac{df^q}{dx}\right| = 1. \tag{3.74}$$

Par exemple, $\Delta a(0/1, K)$ est obtenu en éliminant x entre :

$$a - \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi x) = 0 \tag{3.75}$$

et

$$K\cos(2\pi x) = 0. \tag{3.76}$$

L'équation (3.76) a pour solution $x^* = \frac{1}{4}$. Portant cette solution dans (3.75), on obtient $a^* = K/2\pi$, d'où $\Delta a(0/1, K) = [0, K/2\pi]$. Pour $K = 0$, on a $\Delta a(0/1, 0) = 0$ et pour $K = 1$, on a $\Delta a(0/1, 1) = [0, 1/2\pi]$ (Cf. figure 3.30).

Les résonances d'ordre supérieur sont calculées de façon analogue. La solution (x^*, a^*) du système (3.72)-(3.74) peut être calculée par la méthode de Newton. Les résultats sont présentés sur la figure 3.30. Sur la figure 3.30 seulement quelques "langues d'Arnold" correspondant aux neuf premiers rationnels de l'arbre de Farey ont été dessinées (L'arbre de Farey est formé de rationnels d'après la combinaison :

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s} \tag{3.77}$$

Cf. figure 3.31).

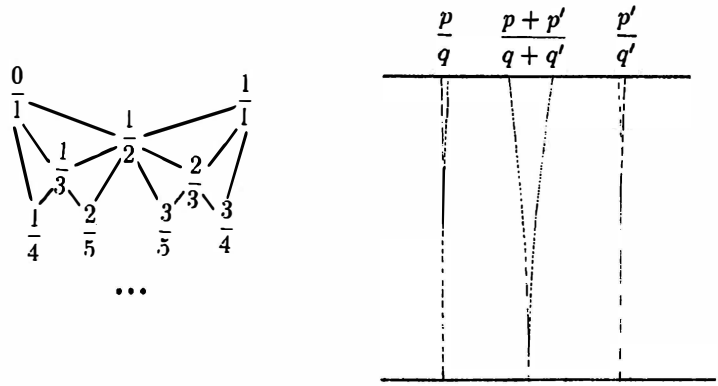


FIG. 3.31 – *L'arbre de Farey et le déploiement des langues d'Arnold.*

Au delà de $K = 1$, les langues d'Arnold peuvent se recouvrir ce qui débouche sur la coexistence de plusieurs mouvements périodiques suivant les conditions initiales ou encore, sur la coexistence d'attracteurs et du chaos.

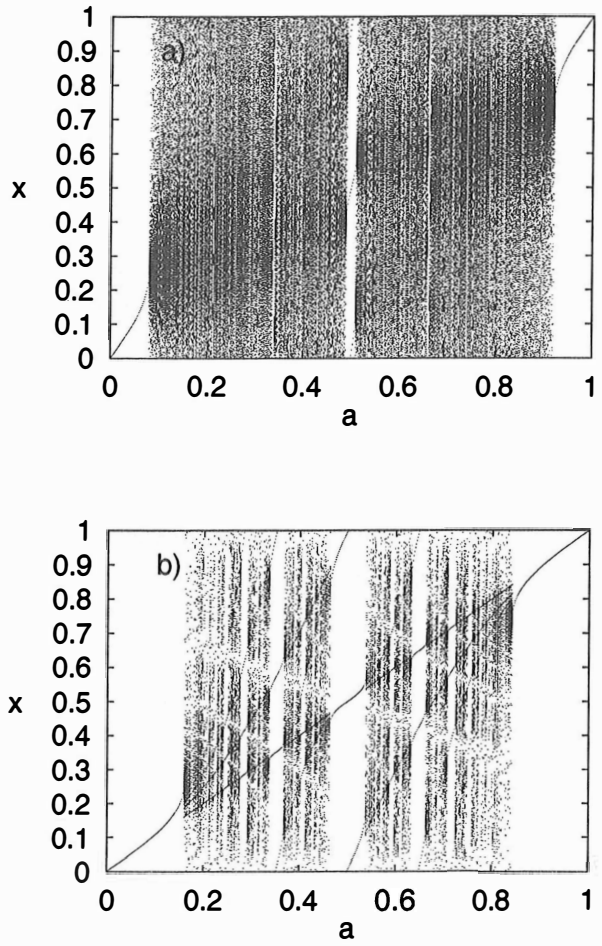


FIG. 3.32 – *Application standard. Diagrammes de bifurcation par le programme 3.7: a) $K = 0.5$ b) $K = 1$*

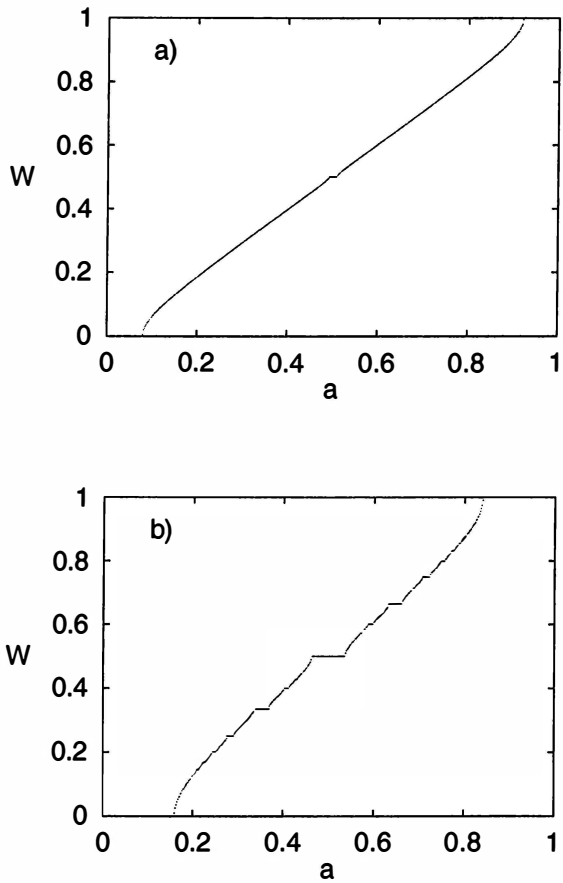


FIG. 3.33 – *Escaliers du diable : a)* $K = 0.5$ *b)* $K = 1$.

Le diagramme de bifurcations se fait comme dans le cas de l'application logistique. Mais, comme ici on a deux paramètres K et a, on est donc obligé de se donner une valeur de K et de faire varier a. La figure (3.32) donne les diagrammes de bifurcations de l'application (3.62) pour $K = 0.5$ et $K = 1$, après l'élimination du transitoire. Les régimes périodiquse sont représentés par des lignes continues transversales et les régimes apériodiques par des lignes verticales à a constant.

L'escalier du diable

Si l'on calcule, par la formule (3.71), le nombre de rotation W en fonction de a en laissant K fixe, on obtient *un escalier du diable.* Les figures 3.33a et 3.33b montrent deux escaliers du diable dessinés par le programme 3.8, pour $K = 0.5$ et $K = 1$. Pour $K > 0$ et petit, les accrochages acquièrent une largeur finie mais une partie de mesure finie de l'intervalle est laissée aux régimes quasi-périodiques ; l'escalier est *incomplet* (figure 3.33a). Quand K augmente, la fraction des régimes non accrochés diminue et tend vers zéro pour $K \to 1$; l'escalier est alors *complet* (figure 3.33b) car dans ce cas :

$$\sum_{p,q} \Delta a(p/q, 1) = 1.$$

Les régimes quasi-périodiques n'apparaissent que pour a appartenant à un ensemble de Cantor de mesure nulle. On voit alors sur l'escalier une infinité de marches à chaque valeur rationnelle de W. Ces marches (ou plateaux) ne sont clairement visibles que pour les rationnels les plus simples mais la structure d'ensemble est autosimilaire : en agrandissant une partie de l'escalier on trouve de nouveaux plateaux et la courbe montre la même allure.

Pour $K > 1$, l'application standard présente des maxima et minima locaux (figure 3.25c) et n'est plus inversible. Les langues d'Arnold peuvent se recouvrir dans de larges portions du plan (a, K) ce qui débouche sur un comportement compliqué avec coexistence d'attracteurs et chaos (voir aussi l'exercice 4.7).

3.6 Ensembles de Julia et de Mandelbrot

Pour simplifier, considérons un polynôme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de degré d, à coefficients complexes (et non pas une fraction rationnelle). Comme dans le cas des applications réelles, $f^k(z) = f(f^{k-1}(z))$ désigne le $k$ième itéré de z. Les définitions et théorèmes dans le cas des applications réelles restent valables dans le cas complexe. Nous les rappelons brièvement ici. Si $f(z) = z$, z est un *point fixe* de f. Si $p \geq 1$ est le plus petit entier tel que $f^p(z) = z$, z est le *point périodique* d'ordre p. L'ensemble $\{z, z_1 = f(z), \ldots, z_{p-1} = f^{p-1}(z)\}$ est un *cycle d'ordre p* ou un *p-cycle.* La quantité :

$$\lambda = (f^p)'(z) = f'(z)f'(z_1)\ldots f'(z_{p-1}), \quad (') \equiv d/dz$$

s'appelle le *multiplicateur* du cycle. Le p-cycle est :

- superattractif (ou superstable) si $\lambda = 0$,
- attractif (ou stable) si $0 < |\lambda| < 1$,
- indifférent (ou neutre) si $|\lambda| = 1$,
- répulsif (ou instable) si $|\lambda| > 1$.

Dans le cas d'un p-cycle attractif, le bassin d'attraction du cycle est l'ouvert des points z tels que la suite des itérés de z converge vers l'un des points du cycle. Un point z est dit *prépériodique* s'il existe un entier k tel que $f^k(z)$ soit périodique.

L'ensemble de Julia rempli est l'ensemble :

$$K_f = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \not\to \infty\}.$$

L'ensemble de Julia J_f (ou simplement J) est la frontière de K_f. C'est aussi l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs [12]. Le complément de J est l'ensemble de Fatou.

Exemple 3.6.1 Considérons l'application itérée :

$$z_{k+1} = f(z_k) = z_k^2. \tag{3.78}$$

Le point fixe de f est donné par $z^2 = z$, d'où les deux points fixes : $z_1 = 0$ et $z_2 = 1$. Les points périodiques z_0 tels que $f^q(z_0) = z_0$ sont :

$$z_0 = \exp\left(\frac{2\pi ik}{2^q - 1}\right), \quad 0 \leq k < 2^q - 2. \tag{3.79}$$

Ces points périodiques sont répulsifs car $|(f^q)'(z_0)| = 2^q$. Ainsi l'ensemble de Julia J, adhérence des points périodiques répulsifs (3.79), est un cercle C de rayon 1 et l'ensemble de Fatou a deux composantes : l'intérieur du cercle C, bassin d'attraction du point fixe super attractif $z = 0$ et l'extérieur de C, bassin d'attraction du point ∞.

Les principales propriétés de J sont [12] :

1) J est un *ensemble parfait* (c'est-à-dire un ensemble fermé et sans point isolé, un ensemble parfait n'est pas dénombrable),

2) J est non-vide, compact et complètement invariant par f, c'est-à-dire :

$$f(J) = f^{-1}(J) = J, \tag{3.80}$$

3) sauf dans des cas particuliers comme $f(z) = z^k$ ou $f(z) = z^2 - 2$, J est un ensemble *fractal*, c'est-à-dire sa dimension de Hausdorff est non entière. Récemment, D. Ruelle (voir [132]) a montré que, si $f(z) = z^2 + c$, la dimension de Hausdorff de J est $d_H(J) = 1 + |c|^2/4\log 2 + \cdots$ pour c petit.

Le théorème suivant permet de déterminer J dans la pratique.

Théorème 3.6.1 *Soit α un point fixe attractif de f, $A(\alpha)$ le bassin d'attraction de α, alors $J_f = \partial A(\alpha)$, (∂A désigne la frontière de A).*

Pour la démonstration de ce théorème voir par exemple [50].

Si $f'(z) = 0$, z est un *point critique*. Dans ce cas, l'application $f(z)$ n'est plus injective dans le voisinage de z. Dans le cas $f(z) = z^2 + c$, le point $z_0 = 0$ est le point critique de f. (Dans le cas de la forme quadratique $f(z) = rz(1 - z)$, le point critique est $z_0 = 1/2$). Fatou et Julia ont démontré les théorèmes suivants relatifs aux points critiques des polynômes.

Théorème 3.6.2 *Un polynôme de degré d a au plus $d - 1$ cycles attractifs d'ordre p, $p \geq 1$. Tout p-cycle attractif a dans son bassin un point critique.*

Théorème 3.6.3 *(i) K_f est connexe si et seulement si tous les points critiques de f appartiennent à K_f.*

(ii) Si K_f ne contient aucun point critique de f alors K_f est un ensemble de Cantor.

En particulier, $f(z) = z^2 + c$ a au plus un p-cycle attractif et $K_f \equiv K_c$ est connexe si le point critique $0 \in K_c$. Nous verrons, par exemple, que $f(z) = z^2 + c$ possède un 2-cycle attractif si c appartient au disque de rayon $1/4$ et de centre -1. De même, il existe au plus un 3-cycle attractif, un 4-cycle attractif etc. (Cf. figure 3.36).

3.6.1 Polynôme quadratique complexe

Considérons maintenant l'itération d'un polynôme complexe de degré 2:

$$z_{k+1} = f(z_k) = z_k^2 + c \tag{3.81}$$

où c est un paramètre complexe. L'itération (3.81) est conjuguée à une application logistique complexe:

$$x_{k+1} = rx_k(1 - x_k), \quad x_k, r \in \mathbb{C}, \tag{3.82}$$

par la transformation (3.21).

L'ensemble de Julia rempli K_c est entièrement contenu dans un disque d'origine 0 et de rayon $R = \max(2, |c|)$. En effet, pour $|z| > R$ on a:

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \geq |z| - \frac{|c|}{|z|} \geq |z| - 1 > 1. \tag{3.83}$$

Donc, si $|z| > R$, on a $\lim_{k\to\infty} f^k(z) \to \infty$. Nous verrons plus loin que si K_c est connexe, on a $|c| \leq 2$. On en déduit l'algorithme qui dessine un ensemble de Julia rempli, connexe:

a) choisir un domaine $D = [-2, 2] \times [-2, 2]$,

b) choisir un entier N_0 = nombre maximum d'itérations, assez grand,

c) supprimer tous les points $z \in D$ tels que $|f^k(z)| > 2$ pour un certain $k < N_0$.

Le programme 3.9 dessine l'ensemble de Julia rempli pour $c = -0.122561 + 0.744861i$ par cet algorithme. Le dessin (appelé lapin de Douady) est présenté sur la figure 3.34.

L'ensemble de Julia J_c de f est la frontière de K_c. Pour dessiner l'ensemble de Julia J_c, on part de la constatation suivante. Sous l'itération:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

si l'on part d'un point (assez grand) situé en dehors de l'ensemble de Julia, ce point tendra vers l'infini. Mais si l'on itère par l'application inverse:

$$z_n = \pm\sqrt{z_{n+1} - c} \tag{3.84}$$

(on aura donc le choix entre deux valeurs inverses), on se rapprochera de plus en plus de l'ensemble de Julia. Dans la pratique, il suffit d'une vingtaine d'itérations inverses pour qu'on soit dessus. Si l'on continue, comme l'ensemble de Julia est un

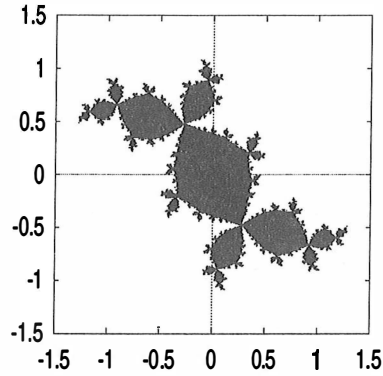


FIG. 3.34 – *L'ensemble de Julia rempli* $c = -0.122561 + 0.744861i$ *(le lapin de Douady).*

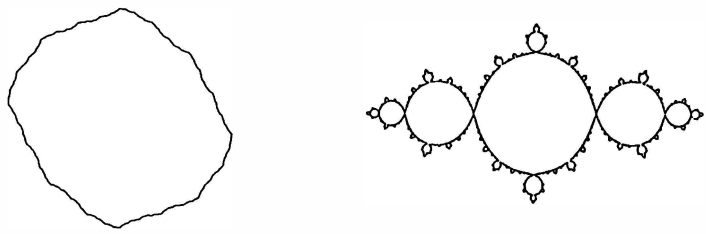


FIG. 3.35 – *Deux ensembles de Julia :* $c = -0.13 + 0.16i$ *(à gauche) et* $c = -1$ *(à droite).*

ensemble invariant (voir (3.80)), on obtient approximativement l'ensemble de Julia au bout d'un certain temps. Le programme 3.10 dessine les ensembles de Julia pour $c = -0.13 + 0.16i$ et $c = -1$. Le résultat est présenté sur la figure 3.35.

Pour chercher les c tels que (3.81) soit périodique de période k, $k > 2$, on a recours à l'ordinateur. Sur la figure 3.36, on a présenté les ensembles des c correspondant à $k = 1, 2, 3, 4, 5$ etc. Ces ensembles sont des composantes de l'ensemble de Mandelbrot :

$$M = \{c \in \mathbb{C} : K_c \text{ est connexe .}\} \tag{3.85}$$

Comme 0 est le seul point critique de $f(z) = z^2 + c$, pour que K_c soit connexe, il faut et il suffit que $0 \in K_c$, c'est-à-dire que $f^k(0) \not\to \infty$. On en déduit :

$$M = \{c \in \mathbb{C} : f^k(0) \not\to \infty\}. \tag{3.86}$$

Les *centres* des composantes de période $2, 3, 4, \ldots$ (appelées aussi *composantes hyperboliques*) de l'ensemble de Mandelbrot sont les racines non nulles des poly-

nômes :

$$\begin{aligned} f^2(0) &= c^2 + c = 0, \\ f^3(0) &= (c^2 + c)^2 + c = 0, \\ f^4(0) &= ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c = 0, \end{aligned}$$

respectivement. $f^k(0)$ est un polynôme de degré 2^{k-1} en c. Comme $c = 0$ est une des racines de $f^k(0)$, on en déduit que le nombre de racines non nulles de $f^k(0) = 0$ est $2^{k-1} - 1$. C'est donc le nombre de composantes hyperboliques de période k.

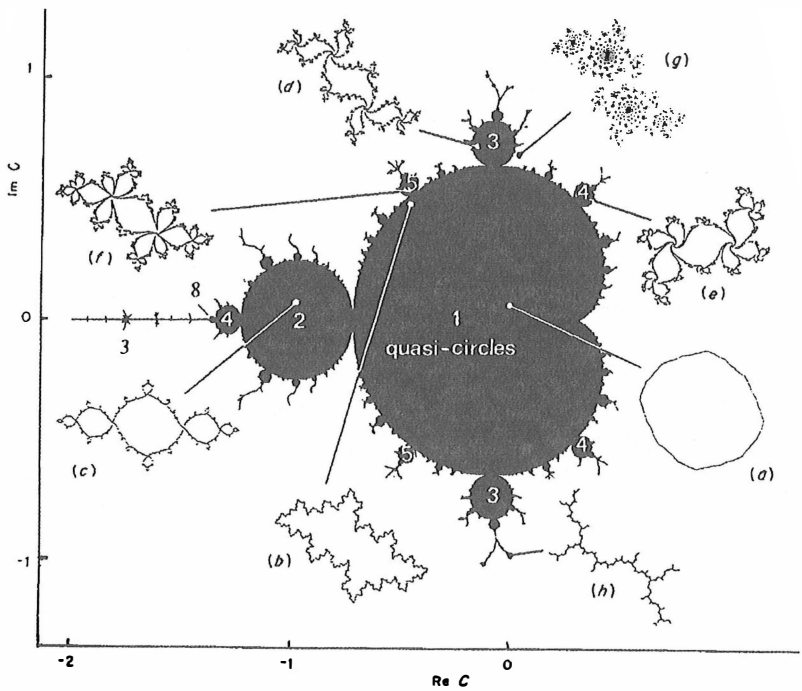


FIG. 3.36 – *L'ensemble de Mandelbrot dans le plan complexe c et une sélection de quelques ensembles de Julia. Les chiffres correspondent aux cycles stables de* $f(z)$. *D'après [50].*

La figure 3.36 montre l'ensemble de Mandelbrot et une sélection de quelques ensembles de Julia. Ce dessin nécessite les quelques précisions suivantes.

(i) Pour $c = 0$: l'ensemble de Julia J_0 est un cercle de rayon 1 (Cf. Exemple 3.6.1) et on a évidemment : $f(J_0) = f^{-1}(J_0) = J_0$. De plus : $\lim_{k\to\infty} f^k(z) \to 0$ si $|z| < 1$. L'ensemble de Julia rempli K_0 est donc le disque de rayon 1 et J_0 est aussi la frontière de K_0.

(ii) Considérons maintenant le cas $c \neq 0$ mais petit. Le point fixe de (3.81) est donné par :

$$z^2 + c = z, \tag{3.87}$$

d'où les deux points fixes :

$$z_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2} \tag{3.88}$$

avec

$$f'(z_1) + f'(z_2) = 2(z_1 + z_2) = 2.$$

On ne peut avoir $|f'(z_1)| < 1$ *et* $|f'(z_2)| < 1$. Donc il y a *au plus* un point fixe attractif z_1 avec

$$|f'(z_1)| = 2|z_1| < 1, \text{ d'où } |z_1| < \frac{1}{2} \tag{3.89}$$

(voir aussi le théorème 3.6.2). On déduit de (3.87) et (3.89) que l'ensemble des c tels que z_1 soit un point fixe attractif est défini par:

$$c = z_1 - z_1^2 \text{ avec } |z_1| < \frac{1}{2}. \tag{3.90}$$

C'est une cardioïde ayant un point de rebroussement à $c = 1/4$ (Cf. figure 3.36). Noter que l'équation paramétrique de la cardioïde est (3.100).

Si c est à l'intérieur de la cardioïde, on a $|f'(z_1)| < 1$, $|f'(z_2)| > 1$. L'ensemble de Julia rempli K_c est le bassin d'attraction de z_1. L'ensemble de Julia J_c de (3.81) est la frontière de K_c. Mais cette fois J_c est une courbe fermée homéomorphe à un cercle dont les arcs ne sont pas lisses (Cf. figure 3.35 (gauche)).

(iii) Cherchons maintenant l'ensemble des points $c \in \mathbb{C}$ tels que (3.81) admette un cycle attractif d'ordre 2. Le point fixe de $f^2(z)$ est solution de l'équation $f^2(z) - z = 0$. Comme z_1 et z_2 sont des points fixes de f, ce sont aussi des points fixes de f^2. On en déduit que $f(z) - z$ divise $f^2(z) - z$, d'où:

$$f^2(z) - z = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \tag{3.91}$$

avec

$$f(z_3) = z_4, \quad f(z_4) = z_3. \tag{3.92}$$

Les conditions (3.92) impliquent que (z_3, z_4) est un cycle d'ordre 2. D'après la règle de la chaîne on a:

$$(f^2)'(z_3) = f'(f(z_3))f'(z_3) = f'(z_4)f'(z_3) = 4z_3z_4 = 4(1 + c).$$

Nous voulons que ce cycle d'ordre 2 soit attractif, c'est-à-dire:

$$|(f^2)'(z_3)| = |(f^2)'(z_4)| < 1. \tag{3.93}$$

On en déduit que l'ensemble des c recherchés est:

$$|1 + c| < \frac{1}{4}. \tag{3.94}$$

C'est un disque de rayon $1/4$ de centre -1 et tangent à la cardioïde précédente au point $c = -3/4$ qui est le point de bifurcation de $f(z)$. (Cf. figure 3.36). La figure 3.35 (droite) montre, comme exemple dans ce cas, l'ensemble de Julia de

$$f(z) = z^2 - 1. \tag{3.95}$$

Il contient une infinité de courbes simples fermées. On a ici $f(0) = -1$, $f(-1) = 0$ et $f^{2\prime}(0) = f^{2\prime}(-1) = 0$. $(0, -1)$ est donc un cycle d'ordre 2 super-attractif. A noter aussi que l'itération (3.95) possède deux points fixes répulsifs $(1 \pm \sqrt{5})/2$, solutions de $z^2 - 1 = z$, qui entourent les points 0 et 1.

(iv) Si $c \notin M$, l'ensemble de Julia est un Cantor (cas (g)).

(v) $c = \pm i$ sont des *points de Misiurewicz* (points $c \in M$ tels que $f(0)$ est prépériodique mais non périodique) car pour $c = -i$ par exemple, on a $f(0) = -i$, $f(-i) = -1 - i$, $f(-1 - i) = i$, $f(i) = -1 - i$. $\{i, -1 - i\}$ est donc un 2-cycle (répulsif, car $|f^2(i)'| = |f^2(-i - 1)'| = 4\sqrt{2} > 1$). L'ensemble de Julia $c = -i$ (cas (h)) s'appelle *dendrite* et on a dans ce cas $J_c = K_c$ (c'est une autre définition du point de Misiurewicz).

(vi) Les centres des composantes de période 3 sont les solutions non nulles de l'équation $f^3(0) = 0$, c'est-à-dire :

$$c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0. \tag{3.96}$$

Les racines de cette équations sont :

$$c_{1,2} = -0.122561 \pm 0.744861i, \quad c_3 = -1.75487766.$$

Pour $c = c_1$, l'ensemble de Julia est appelé *lapin de Douady* [47] (figure 3.34). La racine réelle $c = c_3$ est très proche de $-1.75 = -7/4$ qui correspond, d'après (3.21), à la fameuse valeur $r = 1 + \sqrt{8}$ (voir la section 3.3.3) qui marque le début de la fenêtre de période 3 de l'application logistique (et où a lieu aussi l'intermittence de type I). Si l'on agrandit fortement la composante contenant c_3, on obtient une cardioïde (similaire à celle de (3.90)) qui est le premier chaînon d'une suite de bifurcations multiples de 3 (Cf. figure 3.37, faite par le programme Turbo Pascal 3.11).

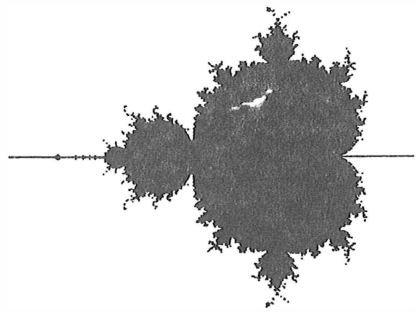


FIG. 3.37 – *Agrandissement de la composante contenant le point* $c = c_3 = -1.75487766...$

On déduit de (3.83) que si $|c| > 2$ alors $|f^2(0)| = |c^2 + c| = |f(c)| > |c|$ et $f^n(0) \to \infty$, d'où :

$$M \subset \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}. \tag{3.97}$$

C'est la meilleure estimation possible car $-2 \in M$. En fait, pour $c = -2$, on a $f(0) = -2$, $f(-2) = 2$, $f(2) = 2.$; -2 est donc un point de Misiurewicz et on peut montrer (voir l'exercice 3.7) que dans ce cas : $J_c = K_c = [-2, 2]$.

On déduit de (3.86) et (3.97) l'algorithme qui dessine l'ensemble de Mandelbrot [1] :

a) choisir un nombre $G > 2$ et un entier N_0 (= Nombre maximum d'itérations),

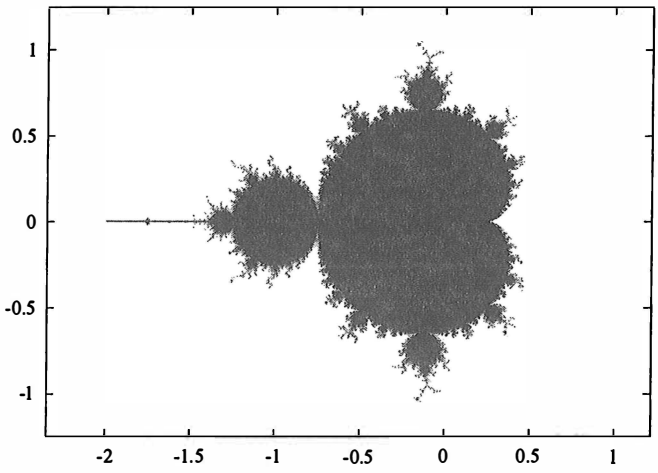


FIG. 3.38 – *Ensemble de Mandelbrot de* $P(z) = z^2 + c$.

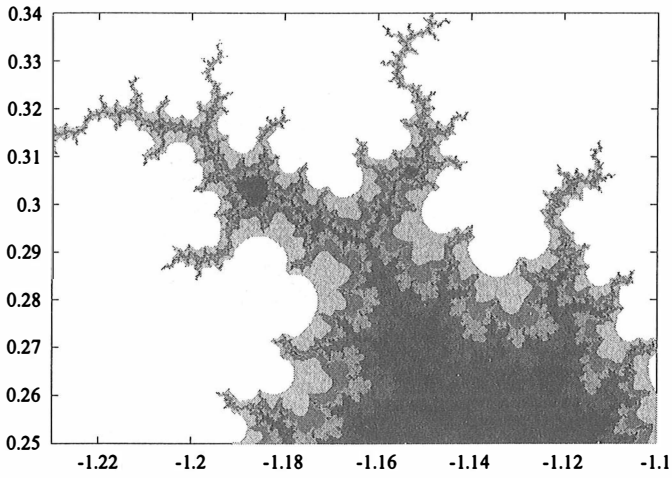


FIG. 3.39 – *Détail de la figure précédente.*

b) colorier tous les points c tels que $|f^k(0)| \leq G$ pour un certain $k < N_0$.

Le programme 3.11 dessine l'ensemble de Mandelbrot par l'algorithme précédent. Les résultats sont présentés sur les figures 3.38 et 3.39. Pour $-2.25 \leq \Re c \leq 0.75$,

1. L'ensemble de Mandelbrot M est connexe [46] et on conjecture que M est localement connexe (conjecture MLC).

$-1.25 \leq \Im c \leq 1.25$, le dessin est sur la figure 3.38 et pour $-1.23 \leq \Re c \leq -1.1$, $0.25 \leq \Im c \leq 0.34$ (agrandissement), le dessin est sur la figure 3.39.

3.6.2 Points fixes indifférents

Le point fixe z est indifférent si :

$$a) \quad f(z) \equiv z^2 + c = z, \quad b) \quad |f'(z)| \equiv |2z| = 1. \tag{3.98}$$

On déduit de (3.98b) que $2z = e^{i2\pi\theta}$, $\theta \in [0, 1]$. L'équation (3.98a) s'écrit alors :

$$\frac{1}{4}e^{i4\pi\theta} - \frac{1}{2}e^{i2\pi\theta} + c = 0$$

ou

$$c = \frac{1}{2}e^{i2\pi\theta} - \frac{1}{4}e^{i4\pi\theta}. \tag{3.99}$$

D'où, en posant $c = x + iy$,

$$x = \frac{\cos 2\pi\theta}{2} - \frac{\cos 4\pi\theta}{4}, \quad y = \frac{\sin 2\pi\theta}{2} - \frac{\sin 4\pi\theta}{4}. \tag{3.100}$$

C'est l'équation paramétrique de la grande cardioïde de l'ensemble de Mandelbrot (figure 3.36).

Dans le cas des points fixes indifférents, il est plus commode d'utiliser le polynôme quadratique :

$$q_\lambda(z) = \lambda z + z^2 \quad \lambda, z \in \mathbb{C}, \tag{3.101}$$

$q_\lambda(x)$ est conjugué à $f(z) = z^2 + c$ par la transformation :

$$z = \phi(x) = x + \frac{\lambda}{2} \text{ avec } c = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$$

c'est-à-dire $\phi \circ q_\lambda = f \circ \phi$. L'origine est un point fixe de $q_\lambda(z)$ avec multiplicateur $q'_\lambda(0) = \lambda$. L'origine est un point fixe indifférent si :

$$\lambda = e^{2i\pi\theta}, \quad \theta \in [0, 1].$$

Si θ est un nombre rationnel : $\theta = p/q$, on dit que le point indifférent est *parabolique*. Dans ce cas, il existe des régions ouvertes attractives et répulsives qu'on appelle *pétales* [12]. Les orbites issues d'un pétale attractif convergent vers le point indifférent tandis celles issues d'un pétale répulsif finissent par en sortir. Ces pétales sont entrelacés. La réunion de tous les pétales s'appelle une *fleur de Léau-Fatou* [129]. La figure 3.40 (gauche) montre une fleur de Léau-Fatou à $\theta = 1/2$ (ou $c = -3/4$).

Supposons maintenant que θ soit un nombre irrationnel. Par définition, le point fixe 0 possède un disque de Siegel s'il existe un domaine simplement connexe U, autour de 0, tel que q_λ soit un difféomorphisme de U sur le disque unité D de $\mathbb{C}$, et si l'action de q_λ sur U correspond à la rotation par λ sur D. Si 0 n'admet pas de disque de Siegel, c'est un point de Cremer. Les points de Cremer correspondent

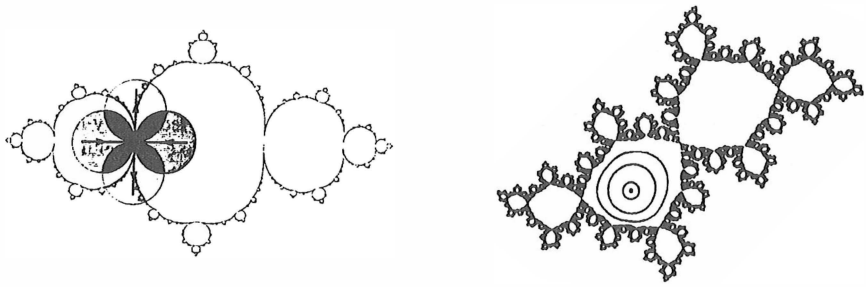


FIG. 3.40 – *Fleur de Léau-Fatou pour $\theta = 1/2$ (à gauche) et disque de Siegel pour $\theta = (\sqrt{5}-1)/2$ (à droite). D'après [129] et [132].*

à des θ qui sont très bien approchés par des rationnels, comme les nombres de Liouville[1], tandis que les points de Siegel correspondent au contraire à des θ mal approchés par les nombres rationnels comme les nombres diophantiens[2]. La figure 3.40 (droite) montre un ensemble de Julia avec un disque de Siegel, associé à la valeur $\theta = (\sqrt{5}-1)/2$ ou $c \approx -0.3905407802 - 0.5867879073i$. Noter que si θ est irrationnel, le point indifférent est à l'intérieur de l'ensemble de Julia. Tandis que si θ est rationnel ($\theta = p/q$), le point indifférent est sur l'ensemble de Julia. Dans ce cas, d'après un théorème de Douady et Hubbard appelé "théorème d'atterrissage" (en anglais, *landing theorem*) [46] [19], il est le point d'atterrissage de q rayons externes (voir la section 3.6.4), $R(\theta_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, q-1$ avec :

$$\theta_i = 2^i \theta^-, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, q-1 \tag{3.102}$$

où θ^- est l'argument (ou l'angle externe) de l'un des deux rayons externes de l'ensemble de Mandelbrot qui atterrissent sur la racine de la composante $M_{p/q}$ (voir la section 3.6.4).

Exemple 3.6.2 Soit $f(z) = z^2 + \lambda z$, avec $\lambda = \exp(2\pi i/3)$. On a ici $p/q = 1/3$, $\theta^- = 1/7$, d'où les angles externes :

$$\theta_0 = \frac{1}{7}, \quad \theta_1 = \frac{2}{7}, \quad \theta_2 = \frac{4}{7}. \tag{3.103}$$

Les rayons externes sont présentés sur la figure 3.41.

1. Un nombre de Liouville θ peut être approché par une suite de nombres rationnels p_n/q_n tels que :

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{\alpha_n}}$$

avec $\limsup \alpha_n = +\infty$. Ce sont des nombres irrationnels transcendants (ou non-algébriques).

2. Un nombre θ est diophantien s'il existe un exposant β et une constante c tels que pour tout rationnel p/q,

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^\beta}.$$

Les nombres algébriques (Cf. Remarque 4.4.1) sont diophantiens.

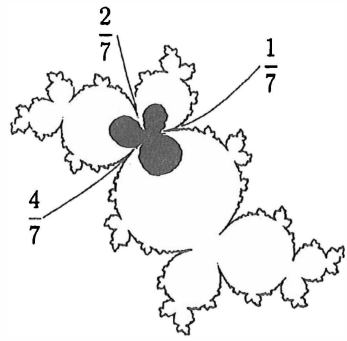


FIG. 3.41 – *Fleur de Léau-Fatou et rayons externes au point fixe parabolique de* $f(z) = z^2 + \lambda z$, $\lambda = \exp(2\pi i/3)$. *D'après [64].*

3.6.3 Polynôme cubique complexe

Tout polynôme du troisième degré :

$$Q(z) = \sigma a z^3 + bz^2 + cz + d, \quad \sigma = \pm 1, \quad a > 0 \tag{3.104}$$

est conjugué avec le polynôme :

$$P(z) = \sigma z^3 + pz + q, \tag{3.105}$$

a, b, c, d, p, q sont des complexes. Cherchons une application :

$$\phi(z) = \alpha z + \beta \tag{3.106}$$

telle que $\phi \circ Q = P \circ \phi$. Nous avons :

$$\alpha(\sigma a z^3 + bz^2 + cz + d) + \beta = \sigma(\alpha z + \beta)^3 + p(\alpha z + \beta) + q.$$

Identifiant les deux membres, nous obtenons :

$$\alpha = \pm\sqrt{a}, \quad \beta = \sigma b/3\alpha, \quad p = c - 3\sigma\beta^2, \quad q = \alpha d + (1-p)\beta - \sigma\beta^3.$$

Il suffit donc d'étudier $P(z)$. Dans la suite nous supposons que $\sigma = 1$. Le cas $\sigma = -1$ est analogue.

$P(z) = z^3 + pz + q$ a au plus deux n-cycles attractifs d'après le théorème 3.6.2. Les points critiques sont donnés par :

$$P'(z) = 3z^2 + p = 0, \quad \text{d'où } z = \pm a \text{ avec } a = \sqrt{-\frac{p}{3}}\,. \tag{3.107}$$

L'équation aux points fixes s'écrit :

$$P(z) = z \text{ ou : } z^3 + (p-1)z + q = 0. \tag{3.108}$$

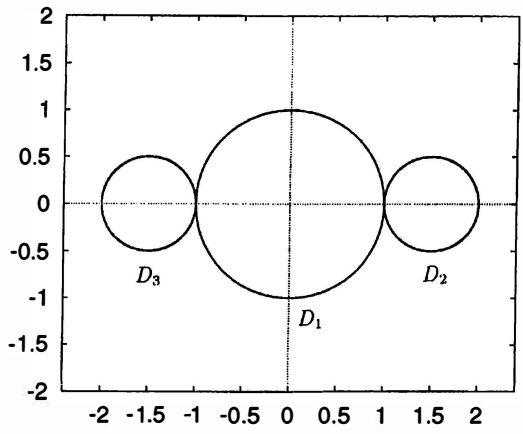


FIG. 3.42 – *Les disques D_1, D_2 et D_3.*

Soit $\bar{z}_i(p,q)$, $i = 1,2,3$, les trois racines de (3.108). Pour que $\bar{z}_i$ soit un point fixe stable, il faut et il suffit que $|P'(\bar{z}_i)| < 1$, c'est-à-dire:

$$|3\bar{z}_i^2(p,q) + p| < 1, \quad i = 1,2,3. \tag{3.109}$$

On peut remarquer que les inégalités (3.109) ne peuvent être simultanémént satisfaites, sinon il y aurait trois points fixes attractifs, ce qui est en contradiction avec le théorème 3.6.2. Par exemple, pour $q = 0$, les racines de (3.108) sont $\bar{z}_1 = 0$, $\bar{z}_{2,3} = \pm\sqrt{1-p}$ et les inégalités (3.109) s'écrivent: $|p| < 1$, pour $i = 1$, $|p - \frac{3}{2}| < 1/2$, pour $i = 2,3$. Ces deux inégalités s'excluent mutuellement. La première inégalité définit un disque ouvert D_1 de centre $(0,0)$, de rayon 1. La deuxième inégalité définit un disque ouvert D_2 de centre $(\frac{3}{2},0)$, de rayon $1/2$ (Cf. fig. 3.42). Si $p \in D_1$, le point fixe $\bar{z}_1$ est attractif. Si $p \in D_2$, les points fixes $\bar{z}_2$ et $\bar{z}_3$ sont attractifs.

Notons que, dans le cas $P(z) = z^3 + pz$, si p appartient au disque ouvert D_3, symétrique de D_2 par rapport à l'origine (Cf. fig. 3.42), $P(z)$ admet un 2-cycle attractif, car on a $P(\sqrt{-1-p}) = -\sqrt{-1-p}$, $P(-\sqrt{-1-p}) = \sqrt{-1-p}$ et $|P'(\sqrt{-1-p})| < 1$ est équivalent à $|p + \frac{3}{2}| < 1/2$.

Pour un (p,q) donné, on appelle ensemble de Julia rempli de $P(z)$, l'ensemble

$$K_{p,q} = \{z \in \mathbb{C} : P^k(z) \not\to \infty\}.$$

L'ensemble de Julia de $P(z)$ est la frontière de $K_{p,q}$. L'ensemble:

$$M = \{(p,q) \in \mathbb{C}^2 : K_c \text{ est connexe } \} \tag{3.110}$$

est l'ensemble de Mandelbrot ou *lieu de connexité* (*connectedness locus* en anglais [18], [121]) de $P(z)$.

D'après le théorème 3.6.3, pour que $K_{p,q}$ soit connexe, il faut et il suffit que les deux points critiques $\pm a$ soient dans $K_{p,q}$, c'est-à-dire $P^k(a) \not\to \infty$ et $P^k(-a) \not\to \infty$.

Théorème 3.6.4 *On a:*

$$K_{p,q} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \text{ où } R = \max(2, |p|, |q|).$$

PREUVE: Si $|z| > R$ alors:

$$\frac{|P(z)|}{|z|} = \frac{|z^3 + pz + q|}{|z|} \geq |z^2 + p| - \frac{|q|}{|z|} > |z^2 + p| - 1 > |z| - 1 > 1$$

car pour le polynôme quadratique $z^2 + p$, on a:

$$|z^2 + p| > |z| \text{ si } |z| > \max(2, |p|)$$

(Cf. formule (3.83). On en déduit que si $|z| > R$, $P^k(z) \to \infty$. □

On en déduit l'algorithme pour le calcul de M: soient

$$\begin{aligned} M_+ &= \{(p,q) \in \mathbb{C}^2 : P^k(+a) \not\to \infty, \} \\ M_- &= \{(p,q) \in \mathbb{C}^2 : P^k(-a) \not\to \infty, \} \end{aligned}$$

avec $a = \sqrt{-p/3}$ (voir (3.107)), alors $M = M_+ \cap M_-$.

Théorème 3.6.5 *Si $(p,q) \in M$ alors $a \leq 2$ et $|q| \leq 128$.*

PREUVE: Voir [18]. □

Le programme 3.13 dessine les sections de l'ensemble $M_+ \cup M_-$ par $q = 0$ et $q = 1$. Les résultats sont présentés sur la figure 3.43. Pour dessiner la figure 3.43 (haut), il suffit de prendre une seule valeur critique, $z = a$ par exemple, car comme $P(z) = z^3 + pz$ est antisymétrique, on a $|P^k(z)| = |P^k(-z)|$. Sur la figure 3.43 (bas), les ensembles A, B et C sont définis par:

$$A = \{p \in \mathbb{C} : P^k(a) \not\to \infty\} \text{ avec } q = 1, \tag{3.111}$$

$$B \cup C = \{p \in \mathbb{C} : P^k(-a) \not\to \infty\} \text{ avec } q = 1. \tag{3.112}$$

Notons que les intérieurs des trois cardioïdes déformées sont les régions dans lesquelles $P(z)$ possède un point fixe attractif. Les ensembles A, B et C sont les intersections, dans $\mathbb{C}^2$, de l'ensemble $M_+ \cup M_-$ avec le plan $q = 1$.

Le programme 3.14 calcule l'ensemble de Julia rempli de $z^3 + pz + q$. Les figures 3.44, 3.45 et 3.46 présentent quelques ensembles de Julia remplis de $P(z) = z^3 + pz$, $P(z) = z^3 + pz + 0.5$ et $P(z) = z^3 + pz + 1$ respectivement. Remarquons que, comme prévu, les deux derniers ensembles de Julia remplis ne sont pas connexes, car dans le cas de la figure 3.46a le point critique $-a$ s'échappe à l'infini et le point critique $a \in K_P$, tandis que dans le cas de la figure 3.46b, c'est l'inverse.

Fatou conjectura que, pour que l'ensemble de Julia d'un polynôme $P(z)$ soit un ensemble de Cantor, il faut que *tous* les points critiques de $P(z)$ s'échappent vers l'infini (voir [53] p. 84). Cependant Brolin [23] donna le contre exemple suivant:

$$Q(x) = 18(x^3 - 2x^2 + x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ce polynôme est conjugué avec le polynôme:

$$P(x) = x^3 - 6x + 2\sqrt{2}, \tag{3.113}$$

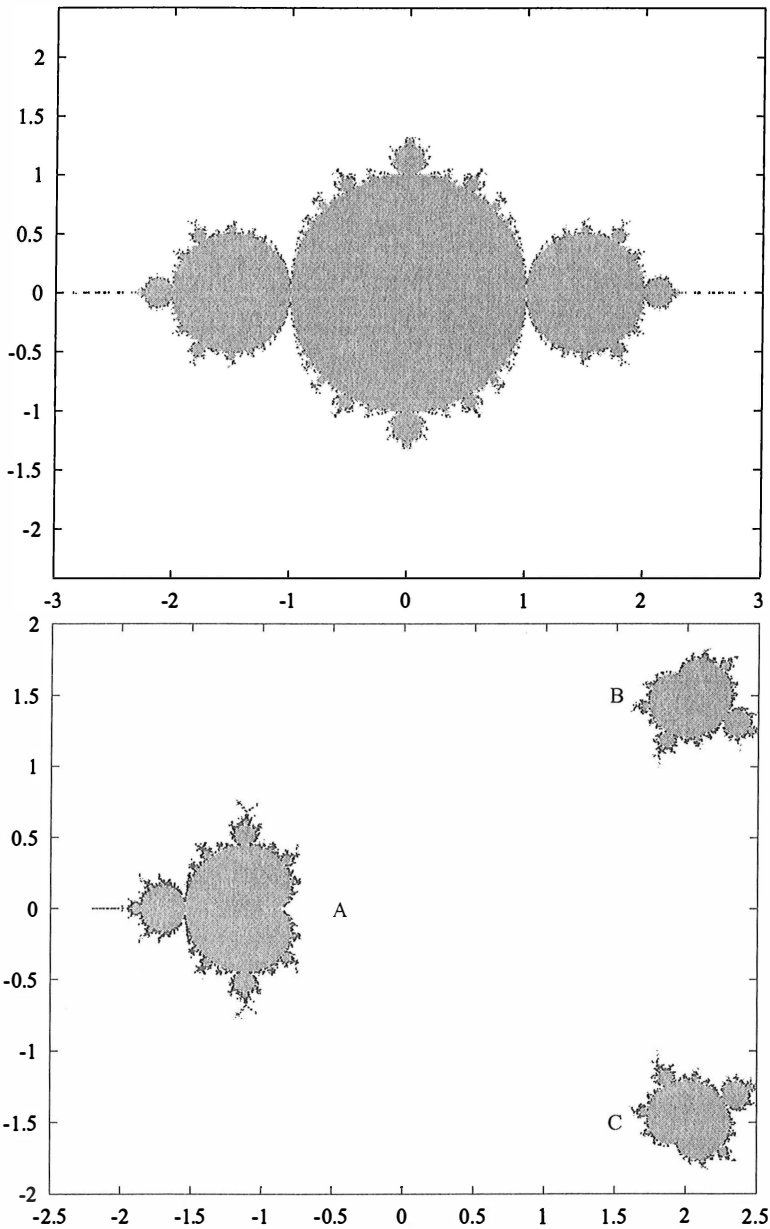


FIG. 3.43 – *Deux coupes de l'ensemble* $M_+ \cup M_-$ *par* $q = 0$ *(en haut) et* $q = 1$ *(en bas).*

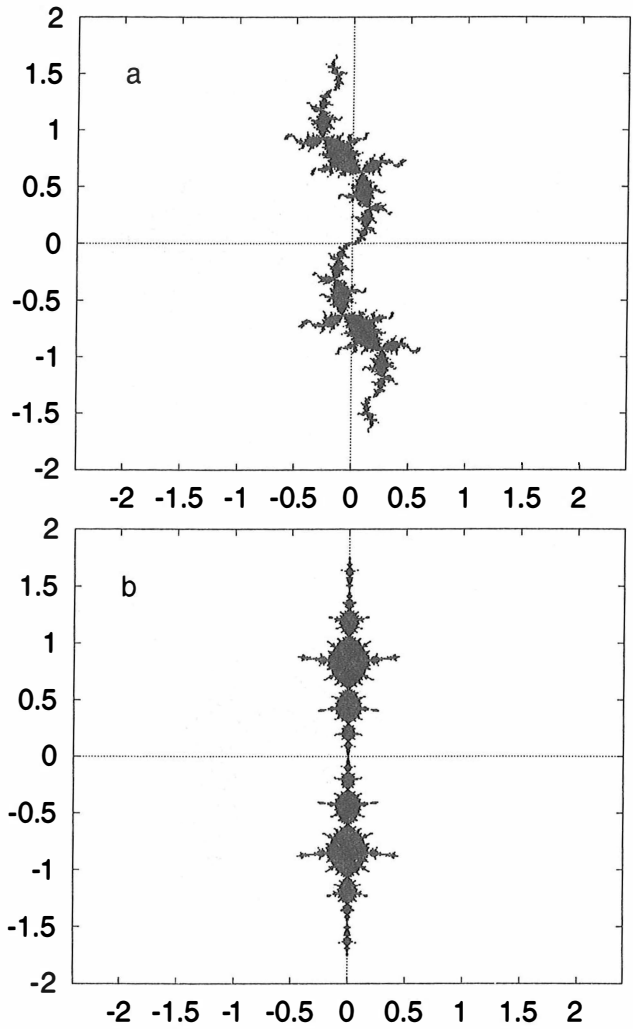


FIG. 3.44 – *Deux ensembles de Julia remplis de* $P(z) = z^3 + pz$ *: a)* $p = 1.8 + 0.5i$*, b)* $p = 2.14$.

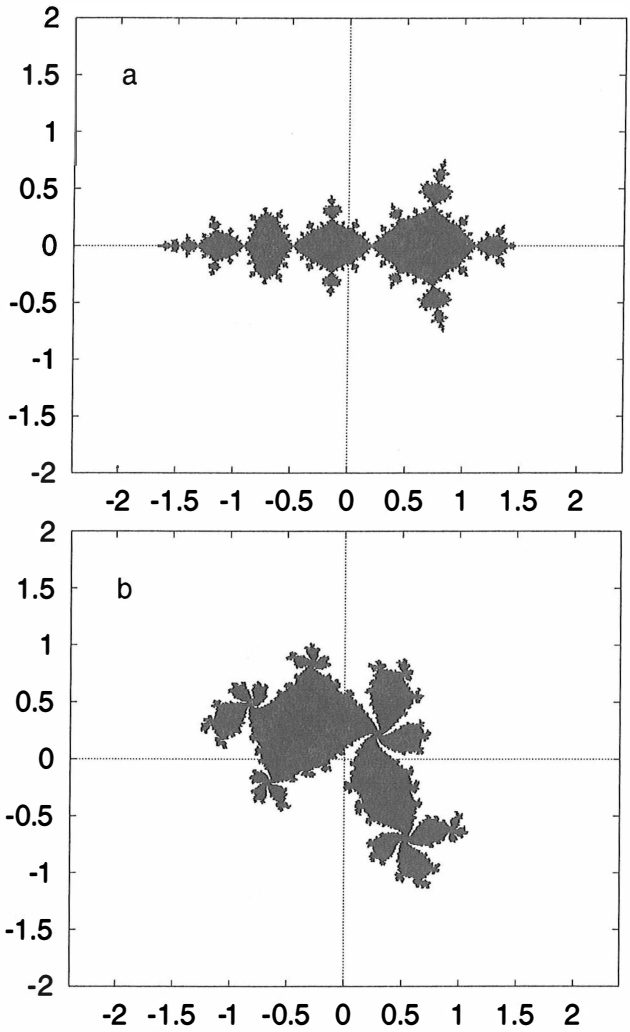


FIG. 3.45 – *Deux ensembles de Julia remplis de* $P(z) = z^3+pz+0.5$ *:* *a)* $p = -1.5$, *b)* $p = -0.14 + 0.7i$.

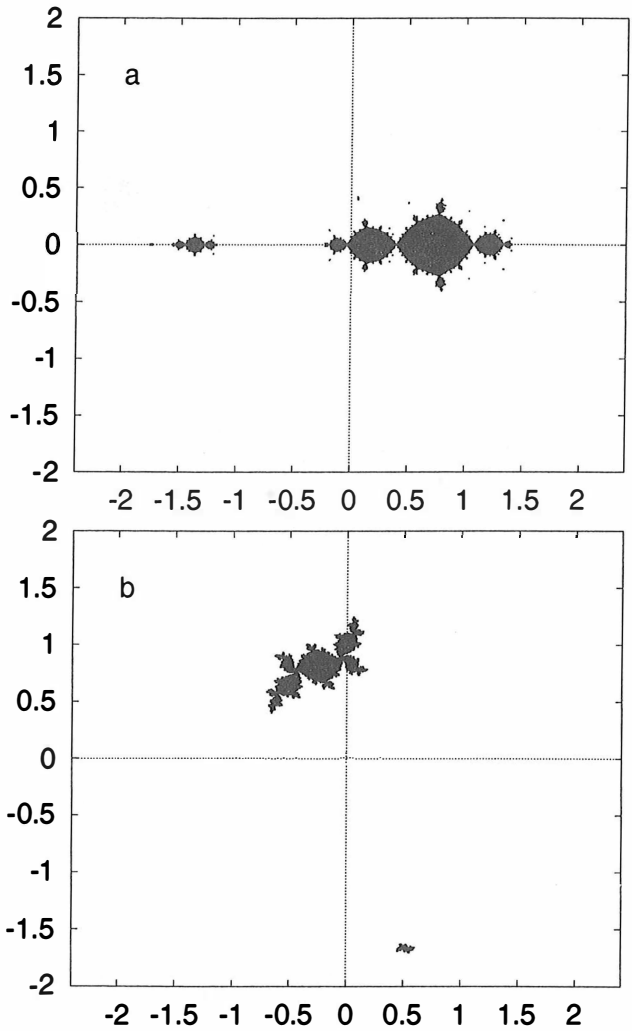


FIG. 3.46 – *Deux ensembles de Julia remplis de* $P(z) = z^3 + pz + 1$ *: a)* $p = -1.714$*, b)* $p = 1.84 + 1.2i$*.*

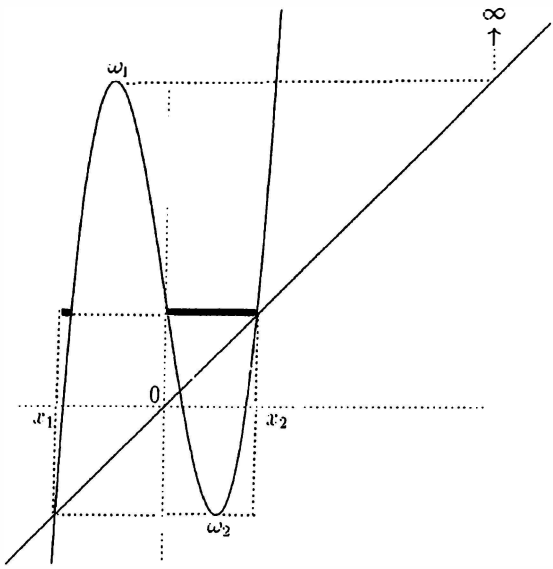


FIG. 3.47 – *Graphe de* $P = x^3 - 6x + 2\sqrt{2}$, $\omega_1 = (-\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$, $\omega_2 = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$. *Le point critique* $-\sqrt{2}$ *s'échappe vers l'infini tandis que le point critique* $\sqrt{2}$ *est prépériodique.*

dans la conjugaison (3.106). Les deux points critiques de $P(x)$ sont $x = \pm\sqrt{2}$. Le graphe de $P(x)$ (figure 3.47) montre que le point critique $-\sqrt{2}$ s'échappe vers l'infini tandis que $P(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} = x_1$ est un point fixe répulsif[1]; donc, x_1 appartient à l'ensemble de Julia J_P et le point critique $\sqrt{2}$ est prépériodique. Les deux autres points fixes sont $x_{2,3} = \sqrt{2} \pm 1$, avec $|P'(x_{2,3})| = |3(1 \pm 2\sqrt{2})| > 1$. Donc x_2 et x_3 appartiennent aussi à J_P. De plus, on a $|P(x)| > |x|$ si $x < x_1$ ou $x > x_2$. On en déduit :

$$J_P \subset [x_1, x_2] = I.$$

La construction de l'ensemble de Cantor J_P est analogue à celle des poussières de Fatou (Cf. figure 3.20) et consiste à enlever tous les $x \in I$ tels que $P^k(x) \notin I$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Les deux premières étapes de la construction sont présentées sur les figures 3.47-3.48. Les intervalles sont dessinés sur la droite $y = \sqrt{2} + 1$ afin d'éviter les projections sur l'axe Ox comme sur la figure 3.20 (voir aussi les exercices 3.2 et 3.8).

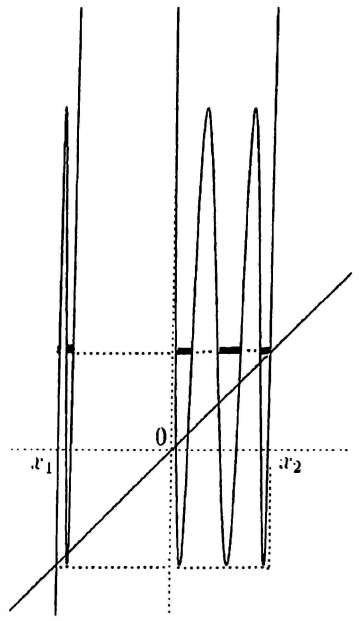


FIG. 3.48 – *Graphe de* P^2.

3.6.4 Rayons externes et puzzles d'Yoccoz

a) Lignes équipotentielles et rayons externes

Soit $f(z) = z^2 + c$. On définit une fonction de Green de l'ensemble de Julia rempli K_c par :

$$g_f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \log |f^n(z)|. \tag{3.114}$$

A. Douady et J. H. Hubbard [47] ont montré qu'il existe une fonction unique ϕ_f

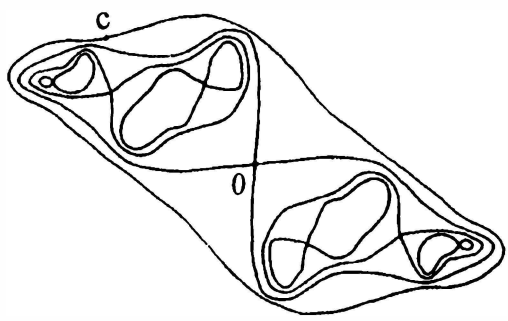


FIG. 3.49 – *Graphe critique de* $f(z) = z^2 + c$. *D'après [19].*

qui conjugue f à $f_0 = z^2$:

$$\phi_f \circ f = f \circ \phi_f$$

définie par :

$$g_f(z) = \log |\phi_f(z)|.$$

La courbe :

$$U(r) = \phi_f^{-1}(re^{i2\pi\theta}), \quad r = \text{ const. } > 1, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

est la *ligne équipotentielle* et la courbe :

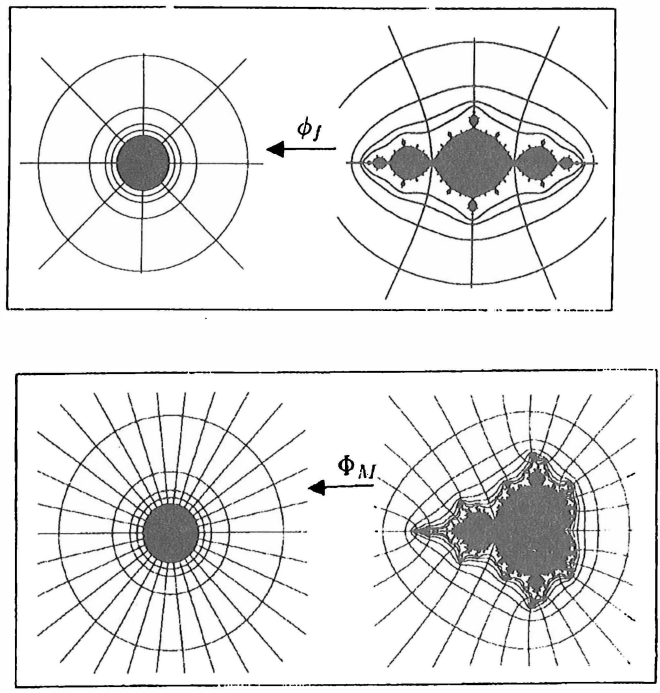


FIG. 3.50 – *Les applications ϕ_f et Φ_M. D'après [132].*

$$R(\theta) = \phi_f^{-1}(re^{i2\pi\theta}), \quad \theta = \text{ const. }, \quad r > 1$$

est la *ligne de champs* ou *rayon externe* de K_c. L'angle θ est l'*angle externe.* La figure 3.50 (haut) présente l'application ϕ_f.

$g_f(z)$ est très facile à calculer. Il est donné pour $z \in \mathbb{C} - K_c$ par :

$$g_f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \log|z_n| = \log|z| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log\left|1 + \frac{c}{z_{n-1}^2}\right|$$

où l'on a posé $z_n = f^n(z)$ et utilisé la relation $z_n = z_{n-1}^2(1 + c/z_{n-1}^2)$. Cette série converge très vite et permet de calculer les lignes équipotentielles. La fonction ϕ_f conjugue f à $f_0 = z^2$, ce qui permet d'avoir des développements à l'infini de ϕ_f et ϕ_f^{-1}. La figure 3.49 montre quelques lignes équipotentielles d'un polynôme quadratique avec un point critique $z = 0$ s'échappant à l'infini. La ligne équipotentielle qui passe par le point critique s'appelle *graphe critique* (voir aussi l'exercice 3.7).

La fonction :

$$g_M(c) = g_f(c) = \log|\Phi_M(c)|, \quad \Phi_M(c) = \phi_f(c) \tag{3.115}$$

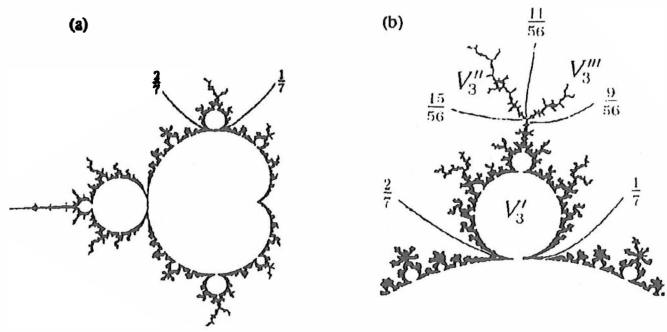


FIG. 3.51 – *(a) Rayons externes atterrissant à la racine de la composante* 1/3 *(b) Agrandissement de la composante* 1/3.

est la fonction de Green de l'ensemble de Mandelbrot. La courbe:

$$U_M(r) = \Phi_M^{-1}(re^{i2\pi\theta}), \quad r = \text{ const. } > 1, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

est la *ligne équipotentielle* de M et la courbe

$$R_M(\theta) = \Phi_f^{-1}(re^{i2\pi\theta}), \quad \theta = \text{ const. }, \quad r > 1 \tag{3.116}$$

est la *ligne de champs* ou *rayon externe* de M. La figure 3.50 (bas) présente l'application Φ_M. Douady et Hubbard ont montré que:

$$\lim_{r\to 1} \Phi_M^{-1}(re^{2\pi i\theta}) \tag{3.117}$$

existe quand θ est un rationnel. Autrement dit, si $\theta = p/q$, le rayon externe (3.116) atterrit sur M. De plus:

- si q est pair, le point d'atterrissage est un point de Misiurewicz,
- si q est impair, le point d'atterrissage est la racine $c_{p/q}$ d'une composante hyperbolique de M. Pour les composantes connexes $M_{p/q}$ (ou simplement p/q) qui touchent la cardioïde d'équation (3.99), on a:

$$c_{p/q} = \frac{1}{2}e^{i2\pi p/q} - \frac{1}{4}e^{i4\pi p/q}.$$

Les polynômes $f(z) = z^2 + c$ avec $c \in M_{p/q}$ sont ceux qui ont un point fixe α répulsif (car c est situé en dehors de la cardioïde). Les deux rayons externes qui atterrissent sur $c_{p/q}$ ont pour argument $\theta^{\pm}$. Les $\theta^{\pm}$ peuvent être calculés, soit par l'arbre de Hubbard [46] soit par l'algorithme de Schleicher (voir la section suivante). La figure 3.51a présente les rayons externes qui atterrissent sur $c_{1/3}$.

b) Puzzles d'Yoccoz

Soit, par exemple, $c \in M_{p/q}$ et soient $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{q-1}$, les angles externes définis par (3.102). Les rayons externes $R(\theta_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, q-1$ atterrissent sur un point fixe répulsif α, d'après le théorème d'atterrissage de Douady et Hubbard [46], [19].

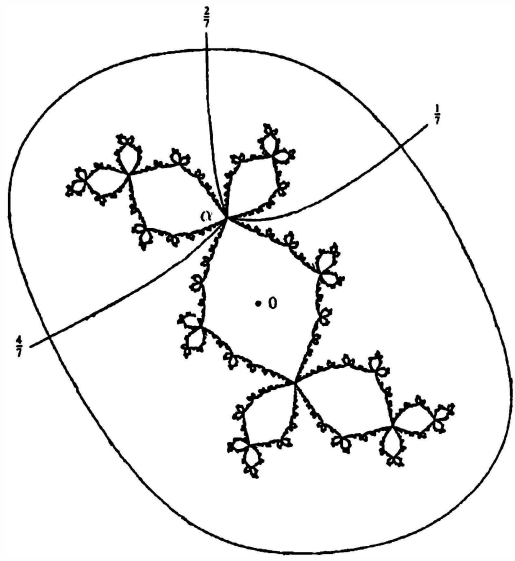


FIG. 3.52 – *Puzzle de niveau* 0 *du lapin de Douady.*

Choisissons une constante $K > 1$. Soit U_0 la région :

$$U_0 = \{z | g_f(z) < K\}$$

et soit Γ_0 le graphe formé des portions de $R(\theta_0), R(\theta_1), R(\theta_2), \ldots, R(\theta_q)$ qui sont dans U_0 :

$$\Gamma_0 = \bigcup_{i=0}^{q-1} \Big(R(\theta_i) \cap U_0 \Big).$$

L'ensemble (U_0, Γ_0) est appelé *puzzle de niveau* 0 (Cf. figure 3.52).

Posons :

$$U_n = f^{-1}(U_{n-1}), \quad \Gamma_n = f^{-1}(\Gamma_{n-1}).$$

La séquence

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \cdots \supset U_n$$

et les graphes Γ_n forment un *puzzle de niveau n.*

Exemple 3.6.3 Prenons l'exemple du lapin de Douady : $c = -0.122561 + 0.744861i$ appartient à la composante $M_{1/3}$ de l'ensemble de Mandelbrot. D'après l'exemple 3.6.2, il y a trois rayons externes $R(\frac{1}{7})$, $R(\frac{2}{7})$ et $R(\frac{4}{7})$ qui atterrissent au point fixe α. Le puzzle de niveau 0 a donc la forme de la figure 3.52.

Les puzzles de niveau 1 et 2 sont présentés sur la figure 3.53.

Les pièces de puzzle de niveau n sont les fermetures des composantes de $U_n - \Gamma_n$. Nous les désignons par P_n. On montre, par induction sur n, que si K_c est connexe, l'intersection $K_c \cap P_n$ est connexe [93]. Nous désignons par $P_n(z)$ la pièce de puzzle de niveau n contenant le point z. Parmi les pièces de puzzle de niveau n, deux sont particulières :

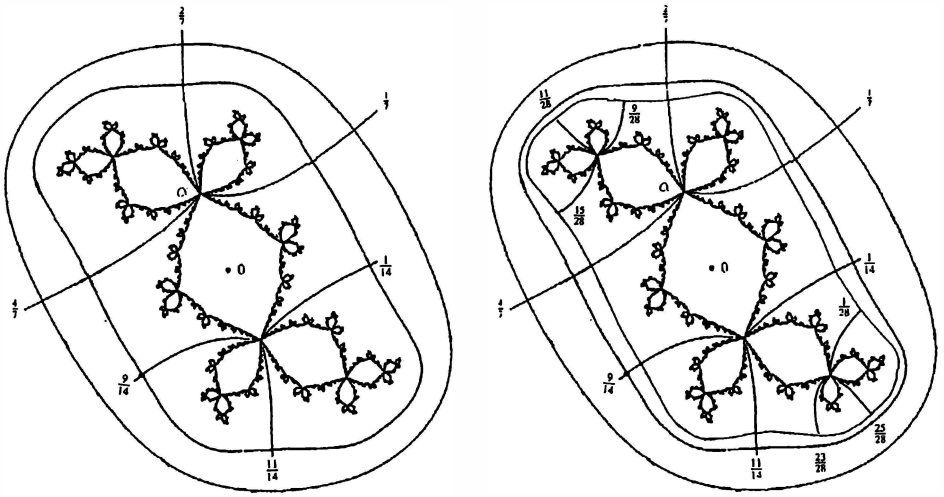


FIG. 3.53 – *Puzzles de niveau* 1 *et* 2 *du lapin de Douady.*

1) la pièce de puzzle contenant le point critique 0 : $C_n = P_n(0)$ avec

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$$

2) la pièce de puzzle contenant la valeur critique $c = f(0)$: $B_n = P_n(c)$ avec

$$B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$$

Pour $c \in M_{1/3}$, les puzzles de niveau $0, 1, 2, 3$ sont homéomorphes (Cf. figure 3.55). Dans le puzzle de niveau 3, le graphe Γ_3 découpe la pièce de puzzle B_2 en trois pièces : B_3', B_3'', B_3''' (voir la figure 3.55)[1]. Dans ce cas, la composante $M_{1/3}$ est divisée en trois parties : V_3', V_3'' et V_3''' (voir la figure 3.51). Si $c \in V_3'$, on a $c \in B_3'$, donc on choisit $B_3 = B_3'$ et le puzzle de niveau 4 est homéomorphe à la figure 3.56a. Si $c \in V_3''$, on a $c \in B_3''$, donc on choisit $B_3 = B_3''$ et le puzzle de niveau 4 est homéomorphe à la figure 3.56b. Si $c \in V_3'''$, on a $c \in B_3'''$, donc on choisit $B_3 = B_3'''$ et le puzzle de niveau 4 est homéomorphe à la figure 3.56c. Dans le cas du lapin de Douady, $c \in V_3'$, le puzzle de niveau 4 est donc homéomorphe à la figure 3.56a.

Le but des puzzles est de prouver la connexité locale des ensembles de Julia J_c[2]. En particulier, on a [93] :

Théorème 3.6.6 *Si pour toute séquence*

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \cdots$$

1. Pour $c \in M_{p/q}$ les puzzles de niveau $0, 1, 2, \ldots, q$ sont homéomorphes, avec

$$B_0 \cap K_c = B_1 \cap K_c = \cdots = B_{q-1} \cap K_c$$

et le graphe Γ_q découpe B_{q-1} en q pièces.

2. Un ensemble X d'un espace topologique est localement connexe lorsque tout point de X possède un système fondamental de voisinages connexes (Dans notre cas, les voisinages sont des pièces de puzzle). L'ensemble X peut être connexe mais non localement connexe. Inversement X peut être localement connexe mais non connexe car il peut être formé de plusieurs composantes localement connexes.

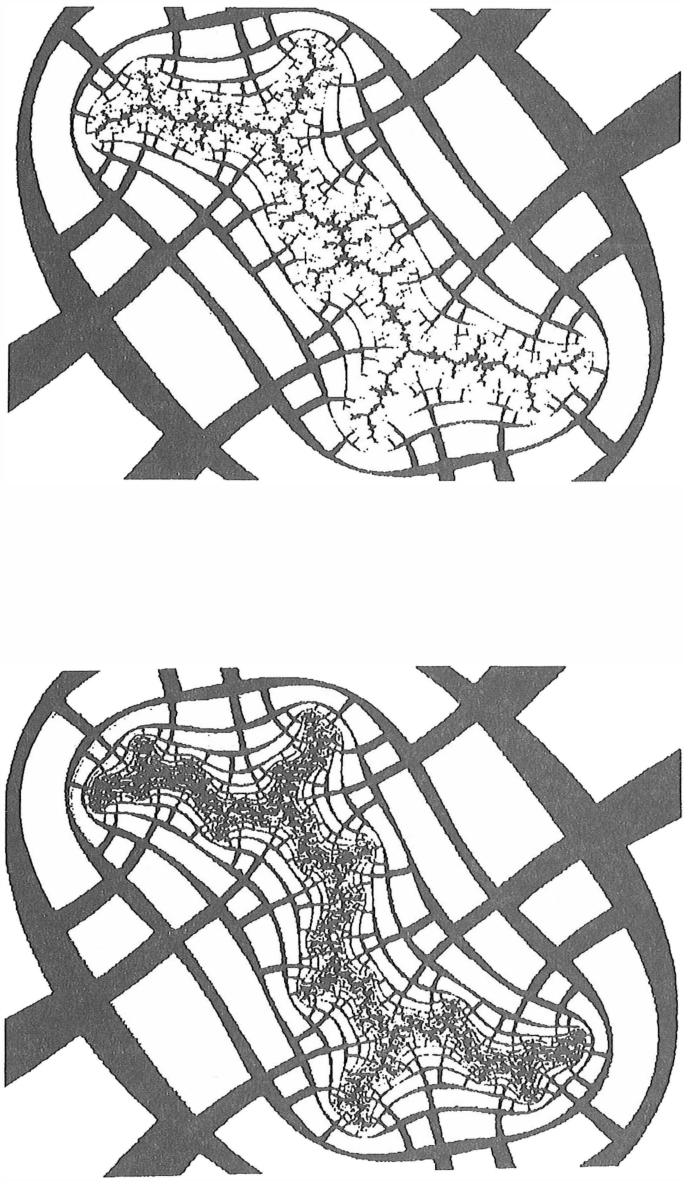


FIG. 3.54 – *Deux puzzles d'Yoccoz : $c \in V_3''$ (haut) et $c \in V_3'''$ (bas). D'après [93].*

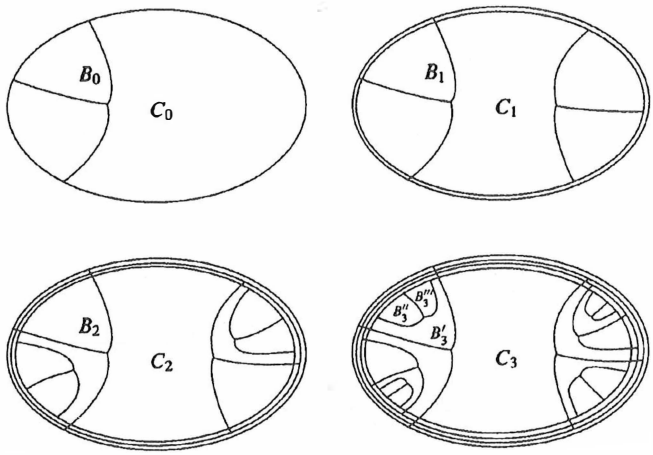


FIG. 3.55 – *Puzzles de niveau* $0, 1, 2, 3$ *pour* $p/q = 1/3$. *D'après [93].*

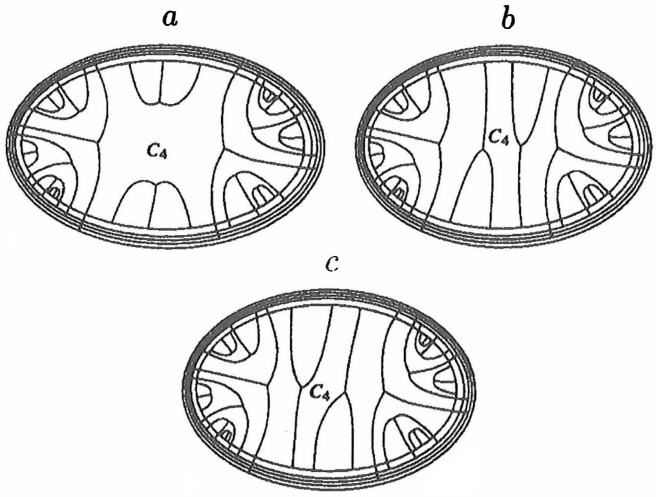


FIG. 3.56 – *Les trois puzzles de niveau* 4 *possibles pour* $p/q = 1/3$. *D'après [93].*

de pièces de puzzle, l'ensemble

$$\bigcap_n P_n$$

est un point $z \in J_c$, *alors* J_c *est localement connexe.*

3.6.5 Algorithme de Schleicher

Soit $\theta = p/q$, $0 < \theta < 1$ et soit :

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k = 0 \text{ ou } 1,$$

l'expansion binaire de θ. On écrit alors $B(\theta) = a_1 a_2 a_3 \ldots$ Par exemple :

$$B(1/3) = 010101\ldots = \overline{01}, \quad B(2/3) = 101010\ldots = \overline{10}$$

$\overline{01}$ signifie qu'on répète 01 indéfiniment.

Pour initier l'algorithme de Schleicher [45], remarquons que les rayons externes $R_M(0) = R_M(\bar{0}) = R_M(\bar{1})$ atterrissent au point de rebroussement de la grande cardioïde (Cf. figure 3.57) qu'on appelle composante $p/q = 0/1$.

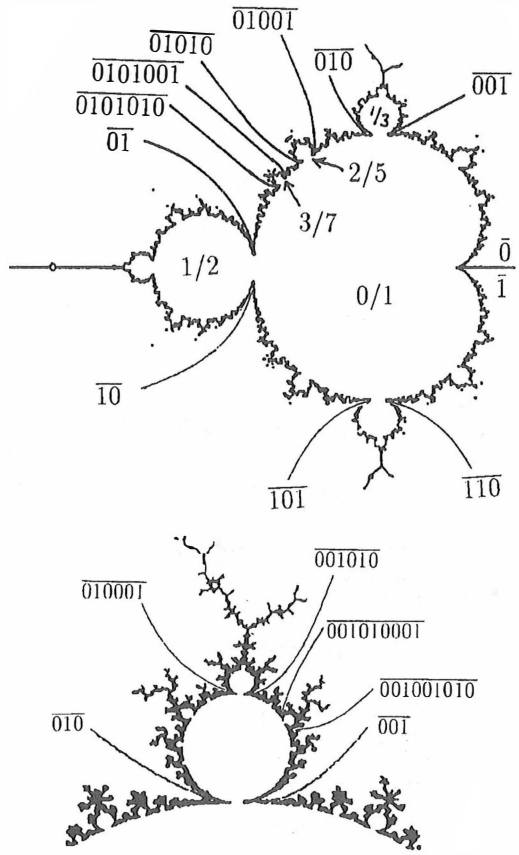


FIG. 3.57 – *L'algorithme de Schleicher. D'après [45].*

La plus grande composante hyperbolique attachée à la cardioïde est la composante $p/q = 1/2$. Pour déterminer les rayons externes atterrissant à la racine $c_{1/2} = -0.75$, notons que le rayon de dessus est plus près de $\bar{0}$ que $\bar{1}$. Nous écrivons donc $\bar{0}$ puis $\bar{1}$; cela donne $\overline{01}$. Pour l'autre rayon, nous écrivons $\bar{1}$ puis $\bar{0}$; cela donne $\overline{10}$.

La plus grande composante entre la composante 0/1 et la composante 1/2 est donnée par l'addition de Farey (formule (3.77)) :

$$\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Déterminons les deux rayons externes qui atterrissent à la racine $c_{1/3}$ de la composante 1/3. Pour le rayon de droite : les rayons les plus proches sont, dans l'ordre, $R_M(\bar{0})$ (attaché à la composante 0/1) et $R_M(\overline{01})$ (attaché à la composante 1/2). Nous

écrivons donc $\bar{0}$ puis $\overline{01}$; cela donne $\overline{001}$. Pour le rayon de gauche, nous écrivons $\overline{01}$ puis $\bar{0}$; cela donne $\overline{010}$.

En général, l'algorithme permet de trouver les deux rayons externes attachés à la plus grande composante entre les deux composantes p/q et r/s.

Etape 1 : Déterminer la plus grande composante entre les composantes p/q et r/s par l'addition de Farey :

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s},$$

Etape 2 : Supposons que les rayons externes les plus près de $(p+r)/(q+s)$ sont $\overline{s_1 \dots s_n}$ (attaché à la composante p/q) et $\overline{t_1 \dots t_m}$ (attaché à la composante r/s).

Détermination des deux rayons attachés à la composantes $(p+r)/(q+s)$: celui qui est près de la composante p/q est $\overline{s_1 \dots s_n t_1 \dots t_m}$; celui qui est près de la composante r/s est $\overline{t_1 \dots t_m s_1 \dots s_n}$.

De cette façon on peut déterminer les rayons attachés à toutes les composantes attachées à la cardioïde principale (Cf. figure 3.57).

L'algorithme de Schleicher s'applique également aux composantes hyperboliques attachées à M. Prenons l'exemple de la composante $1/3$. Les rayons externes qui atterrissent à sa racine ont pour arguments $\overline{001}$ et $\overline{010}$. L'application de l'algorithme de Schleicher donne la figure 3.57 (bas).

3.7 Programmes

Programme 3.1 *L'attracteur de Hénon :*

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax^2, \quad y_n = bx_n.$$

Programme écrit en Turbo Pascal.

```
PROGRAM Henon1;

{Application de Henon :
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;
}

USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,j,k,l,Ni,Ux,Uy,tx,ty : integer;
       i,iter : longint;
    a,b,x,y,x1,y1 : real ;
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;

BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=-1.5;   Xmax:=1.5; Ymin:=-0.5;   Ymax:=0.5;
      a0 := MaxX div 2;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0);   (* axe des x *)
      line (a0,0,a0,maxY);   (* axe des y  *)
```

```
        (* Unites des axes : *)
   Ux := round((maxX - 20)/(Xmax - Xmin));
   Uy := round((maxY - 20)/(Ymax - Ymin));
a:=1.4 ; b:=0.3 ;
(* Valeurs initiales de l'application de Henon : *)
x:=0.0 ; y:=0.0 ;(* Nombre d'iterations : *)iter:=10000 ;
For i:=1 to iter do
Begin
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;   x:=x1 ; y:=y1 ;
   k:=round(Ux*x);   l:=round(Uy*y);
   Putpixel(a0+k,b0-l,4);
End;
 OutTextXY(100,10, ' Application de Henon ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 3.3.

Programme 3.2

```
PROGRAM DELAY;
USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,j,k,l,Ni,Ux,Uy,tx,ty : integer;
    i,iter : longint;
    r,x,y,x1,y1,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
    maxX,maxY : word;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=-1.0;   Xmax:=1.0;   Ymin:=-1.0;   Ymax:=1.0;
      a0 := MaxX div 2;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0); line (a0,0,a0,maxY);   (* axes *)
        (* Unites des axes : *)
   Ux := round((maxX - 20)/(Xmax - Xmin));
   Uy := round((maxY - 20)/(Ymax - Ymin));
r:=2.1 ; x:=0.5 ; y:=0.5 ;
(* Nombre d'iterations : *) iter :=1000 ;
For i:=1 to iter do
Begin
   x1:=r*x*(1-y) ; y1:=x ;   x:=x1 ; y:=y1 ;
   k:=round(Ux*x);
   l:=round(Uy*y);
   Putpixel(a0+k,b0-l,4);
End;
 OutTextXY(100,30, ' Application logistique retardee ');
  readln;  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 3.12

Programme 3.3

```
PROGRAM Bifurcation;
USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,i,j,l,n,Ni : integer;
    r,hx,hy,x,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,xx,yy : real ;
  maxX,maxY : word;
Function f (x:real) : real;
    BEGIN    f := r*x*(1-x) ;    END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=2.9;   Xmax:=4.0;   Ymin:=0.0;   Ymax:=1.0;
   a0 := 0;  b0 := MaxY - 50 ; (* Origine *)
   line (0,b0,maxX,b0);
   line (a0,0,a0,maxY); (* axes  *)
   hx:=(Xmax - Xmin)/(MaxX - a0);hy:=(Ymax - Ymin)/b0;
   Ni:=300; n:=200;   r:=Xmin;
   For i:=a0 to MaxX do
   Begin     x:=0.5;
     For j:=1 to Ni do x:=f(x);
     For j:=1 to n do
       Begin   x:=f(x);
       l:=round(x/hy);   Putpixel(i,b0-l,4);
          xx := i*hx+Xmin; yy := x;
       End;     r:=r+hx;   End;
 OutTextXY(50,10, ' f(x)=r*x(1-x) : ');
  readln;  CloseGraph;END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 3.17

Programme 3.4

```
PROGRAM Bifurcation;
(* Diagramme de Bifurcation de l'application de Henon
               avec b=0.3 *)
USES dos,crt,graph;
var a0,b0,i,j,l,n,Ni : integer;
    a,b,hx,hy,x,y,x1,y : real ;1
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,xx,yy : real ;
  maxX,maxY : word;
  fs:text;
BEGIN    (* Programme principal  *)
      Assign(fs,'bifur1.dat');
      rewrite(fs);
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=0.3;   Xmax:=1.1;   Ymin:=-2;   Ymax:=2;
      a0 := 0;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0);
      line (a0,0,a0,maxY); (* axes  *)
```

```
   hx:=(Xmax - Xmin)/(MaxX - a0);
   hy:=(Ymax - Ymin)/maxY;
   b:=0.3;   Ni:=100; n:=200;   a:=Xmin;
   For i:=0 to MaxX do
   Begin     x:=0; y:=0;
     For j:=1 to Ni do
        begin
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;   x:=x1 ; y:=y1 ;
        end;
     For j:=1 to n do
       Begin
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;   x:=x1 ; y:=y1 ;
         l:=round(x/hy);   Putpixel(i,b0-l,4);
          xx := i*hx+Xmin; yy := x;
          writeln(fs,xx,' ',yy);
      End;     a:=a+hx;   End;
OutTextXY(50,10, ' L''application de Henon : ');
 readln;  Close(fs);  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 3.18

Programme 3.5

```
In[1]:=
SuperAttractiveSeries[mapr_,xcrit_, sinit_List, nmax_] /;
    Length[sinit] > 1 :=
   Module[{s = sinit, r, workingprec = Precision[sinit], unit,
           n, delta, s0, iter, gnest, gr, grp, corr},
        DefineIterator[rr_] :=
         Module[{xi, xpi, x, r},
           Function @ {{xi, xpi},
              Simplify[{mapr[r][xi],
               Dt[mapr[r][x], r]/. {x -> xi, Dt[x, r] -> xpi}
                       } /. r -> rr]
                       }
    ];
   unit = 10.0^-(workingprec-1);
   Block[{$MinPrecision = workingprec},
    While[Length[s] < nmax,
      n = Length[s];
      If[ n == 2, delta = 4,
         delta = (s[[-2]] - s[[-3]])/(s[[-1]] - s[[-2]])];
      s0 = s[[-1]] + (s[[-1]] - s[[-2]])/delta;
      iter = 2^n;
      While[True,
        gnest = DefineIterator[s0];
        {gr, grp} = Nest[gnest @ # &, {xcrit,0}, iter] -
                    {xcrit, 0};
        corr = gr/grp;
        If[Abs[corr/s0] < unit, Break[] ]; (*converged *)
```

```
        s0 -= corr;
      ];
      AppendTo[s, s0];
    ]];
   s
]

In[2]:=
DeltaEstimates[s_List/; Length[s] > 2] :=
    With[{sn = Take[s, {3, -1}],
          sn1 = Take[s, {2, -2}],
          sn2 = Take[s, {1, -3}]},
        (sn1 - sn2)/(sn - sn1)
    ]

In[3]:=
LogisticsMap[r_] := Function[x, r x (1-x)]

In[4]:=
SuperAttractiveSeries[LogisticsMap, 1/2,
    {2, 3.2360679774997896964091736687 3},16]//
    TableForm
Out[4]//TableForm=
2
3.23606797749978969640917366873
3.49856169932770151999894538194
3.55464086276882486536608185195
3.56666737985626851397263115746
3.56924353163711033780824951091
3.56979529374994462051535252961
3.56991346542234851484097351967
3.56993877423330548779344606756
3.56994419460806493324363334387
3.56994535548646858089280238231
3.56994560411107843813411726138
3.56994565735885649972960761457
3.56994566876289996834709766981
3.56994567120529685452891409409
3.56994567172838347420506901923
In[5]:=
DeltaEstimates[%] // TableForm
Out[5]//TableForm=
4.70894301354050331317654831 77
4.68077099801069538163085065 3
4.66295961111410258401024021
4.66840392591840023782173976
4.66895374096762278100225 7
4.66915718132884348231784 9
4.66919100248509615088863 8
4.66919947054772577468605
```

```
4.669201134601042235 4103
4.66920150951355232 7347
4.66920158752238550 7575
4.66920160451218518597
4.66920160811593522258
4.66920160889206909 72
```

Programme 3.6

```
PROGRAM ITERATION;
(* avec FICHIER pour GNUPLOT  *)
USES dos,crt,graph;
var    N,i,j,k,l : integer;
    a,r,x,y,h,hx,hy : real ;
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
  fs:text;
Function f (x:real) : real;
    BEGIN
    f := r*x*(1-x) ;
    END;
Function g (x:real) : real;
    BEGIN
    g := a*sin(Pi *x) ;
    END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
      Assign(fs,'logis.dat');
      rewrite(fs);
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=0.0;   Xmax:=1.0;  Ymin:=0.0;   Ymax:=2.0;
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
   r := 3.5699;  a:=0.86539 ;
   N:=500 ; h:=(Xmax - Xmin)/N;
   x:=0; y:=0;
         k:=round((x-Xmin)/hx) ; l:=round((y-Ymin)/hy) ;
         moveto(k,maxY-l);
   FOR i:=1 TO N DO
   BEGIN
   x:=x+h;
(* 8e iteree de f(x) : *)
(*   y:=f(x);
   FOR j:=1 TO 7 DO y:=f(y) ; *)
(* 8e iteree de g(x) : *)
   y:=g(x);
   FOR j:=1 TO 7 DO y:=g(y) ;
         k:=round((x-Xmin)/hx) ; l:=round((y-Ymin)/hy) ;
         lineto(k,maxY-l);  writeln(fs,x,' ',y);
   END;
 OutTextXY(50,10, '  f(x)=r*x(1-x) : ');
```

```
  readln;  Close(fs);  CloseGraph;
END.
```

Programme 3.7

```
PROGRAM Bifurcation;
{Diagramme de bifurcation de l'endomorphisme du cercle
   f:=x+a-K*sin(2*pi*x)/(2*pi) ; d'apres P. Manneville p. 202}
USES dos,crt,graph;
var i,j,l,n,Ni,Ux,Uy : integer;
  K,a,h,x : real ;
  graphpilote,graphmode,ErrorCode: integer;
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,xx,yy : real ;
Function f(x:real):real;
begin   f:=x+a-K*sin(2*pi*x)/(2*pi) ; end;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
      initialize;
   Xmin:=0.0;   Xmax:=1.0; Ymin:=0.0;   Ymax:=1.0;
   Ux:=round(maxX/(Xmax - Xmin));Uy:=round(MaxY/(Ymax - Ymin));
   Ni:=300; n:=200; h:=(Xmax - Xmin)/MaxX ;
   a:=Xmin;  K:=1.0; {   a:=Xmin;  K:=0.5; }
   For i:=0 to MaxX  do
   Begin     x:=0.5;
     For j:=1 to Ni do
     Begin     x:=f(x);
         If x<0 then x:=x-int(x)+1;
         If x>1 then x:=x-int(x);     End;
     For j:=1 to n do
       Begin
         x:=f(x);
         If x<0 then x:=x-int(x)+1;
         If x>1 then x:=x-int(x);
         l:=round(MaxY*x);  Putpixel(i,MaxY-l,4);
          xx := i*h+Xmin; yy := x;
       End;     a:=a+h;   End;
 OutTextXY(50,10, ' Diagramme de Bifurcation ');
  readln;  CloseGraph;     END.
```

Programme 3.8 *Pour K et Ω donnés, W sera donné par (3.71). On prend comme valeur initiale $\theta_0 = 0.5$. Après un transitoire de 300 itérations on applique la formule (3.71) avec $n = 200$. On fera varier Ω de 0 à 1. Les dessins ont été faits avec $K = 0.5$ et $K = 1$.*

```
PROGRAM Escalier_du_diable;
USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,i,j,l,N,Ni,Ux,Uy,tx,ty : integer;
  K,a,h,x,x0 : real ;
```

```
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
Function f(x:real):real;
begin
   f:=x+a-K*sin(2*pi*x)/(2*pi) ;
end;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=0.0;   Xmax:=1.0;
   Ymin:=0.0;   Ymax:=1.0;
      a0 := 50;  b0 := MaxY - a0 ; (* Origine *)
      line (a0,b0,maxX - a0,b0);   (* axe des x *)
      line (a0,a0,a0,b0);   (* axe des y  *)
      line (maxX - a0,a0,maxX - a0,b0);
      line (a0,a0,MaxX - a0,a0);
        (* Unites des axes : *)
   Ux := round((maxX-2*a0)/(Xmax - Xmin));
   Uy:=round((b0 - a0)/(Ymax - Ymin));
   Ni:=300; n:=200;
   h:=(Xmax - Xmin)/(MaxX - a0-50);
{   a:=Xmin;  K:=1.0; }
   a:=Xmin;  K:=0.5;
   For i:=a0 to MaxX - 50 do
   Begin
     x:=0.5; (* Valeur initiale *)
     For j:=1 to Ni do    (* Transitoire *)
     x:=f(x);
     x0 := x;
     For j:=1 to n do
         x:=f(x);
         l:=round((b0-50)*(x-x0)/n); Putpixel(i,b0-l,4);
     a:=a+h;
   End;
 OutTextXY(50,10, ' Escalier du Diable ');
  readln;  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 3.33

Programme 3.9

```
Program ensemble_de_julia_rempli ;
(* Ensemble de Julia de  z*z + c
    FICHIER JULIA.DAT                *)
uses
  Crt, Dos, Graph;
const G = 2.5 ; N0 = 200 ;
var
  maxX,maxY : word;
```

```
  cx,cy,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
  fs:text;
PROCEDURE JULIA_REMPLI;
(* Pour quitter le graphe taper sur ENTER *)
var
  k,i,j : integer;
  x,y,x1,y1,x2,y2,r2,hx,hy : real ;
   begin
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
FOR i:=0 TO maxX DO
FOR j:=0 TO maxY DO
   BEGIN
      x:=Xmin+hx*i ; y:=Ymin+hy*j ;
      x2 := x ; y2 := y ;
         k:=0 ;
         REPEAT
            k:=k+1 ;
            x1:=x*x-y*y+cx ;  y1:=2*x*y+cy ;
            r2:=x1*x1+y1*y1 ;
            x:=x1 ; y:=y1 ;
         UNTIL (r2 > G) OR (k=N0) ;
         IF r2 < G THEN
         Begin
         PUTPIXEL(i,maxY-j,4); writeln(fs,x2,' ',y2);
         end;
   END ;
end; (* JULIA_REMPLI *)

begin { program body }
      Assign(fs,'julia.dat');
      rewrite(fs);
Clrscr ; cx:=-0.122561; cy:=0.744861 ;
Xmin :=-2;Xmax := 2; Ymin:=-2;Ymax :=2;
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
  JULIA_REMPLI;
     Close(fs);
OutTextXY(50,10, ' Ensemble de Julia rempli :  ');
  readln;  CloseGraph;
end.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 3.34

Programme 3.10

```
program ensemble_de_julia2 ;
(* Ensembles de Julia de
          f(z)=z*z-0.13+0.16i et f(z)=z*z-1   *)
uses
  Crt, Dos, Graph;
const Max=2500 ;
     cx = -0.13 ; cy = 0.16 ;
```

```
(*      cx = -1 ; cy = 0 ; *)
type table=array[1..Max] of real;
var    a0,b0,i,j,k,l,p,Ni,Ux,Uy : integer;
    x,y,x1,y1 :table ;
    xi,yi,xi1,yi1,Gx,Gy : real ;
    maxX,maxY : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
PROCEDURE RACINES(x,y :real ;VAR a,b:real);
Var r,phi:real;
Begin
  r:=sqrt(x*x+y*y); r:=sqrt(r);
  phi :=arctan (y/x) ; If x<0 then phi:=phi+Pi;
  If phi < 0 then phi := phi+2*Pi ;
  phi := phi/2 ;
  a:=r*cos(phi) ; b:=r*sin(phi) ;
  Randomize;
  If (Random(2) = 1) then
    Begin      a:=-a ; b:=-b ;    End ;
End ;
begin { program body }    Ni:=10;
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=-2;   Xmax:=2;   Ymin:=-2;   Ymax:=2;
      a0 := MaxX div 2;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
  (* Unites des Axes : *)
   Ux := round((maxX - 20)/(Xmax - Xmin));
   Uy := round((maxY - 20)/(Ymax - Ymin));
   (* On part d'un nombre complexe G=2 : *) Gx:=2; Gy:=0;
   (* Transitoire : *)
      xi:=Gx-cx ; yi:=Gy-cy ;
    For i:=1 to Ni do
      Begin
        Racines(xi,yi,xi1,yi1); xi:=xi1-cx ; yi:=yi1-cy ;
      End;
  (* Debut du Dessin : *) i:=0; p:=1; x[1]:=xi; y[1]:=yi;
       REPEAT
            i:=i+1 ;   For j:=1 to p do
            Begin
              Racines(x[j],y[j],x1[j],y1[j]);
              k:=round(Ux*x1[j]);  l:=round(Uy*y1[j]);
              Putpixel(a0+k,b0-l,4);
              k:=-k;   l:=-l; Putpixel(a0+k,b0-l,4);
            End;
            For j:=1 to p do
            Begin
              x[j]:=x1[j]-cx ; x[p+j]:=-x1[j]-cx;
              y[j]:=y1[j]-cy ; y[p+j]:=-y1[j]-cy;
            End;     p:=2*p ;
       until i>10 ;
        (* Fin du dessin : *)
```

```
OutTextXY(50,10, ' Ensemble de Julia  : ');
  readln;  CloseGraph; end.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 3.35.

Programme 3.11 `program ensemble_de_Mandelbrot ;`

```
(* Ensemble de Mandelbrot de
z*z + c, -2.25< Cx <0.75, -1.5< Cy <1.5     *)
USES dos,crt,graph;
const M = 4 ; N = 100 ;
var    i,j,k,Ux,Uy,color : integer;
       cx,cy,hx,hy,x0,y0,x,y,r2: real ;
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;

BEGIN    (* Programme principal  *)
Clrscr ;
Writeln(' Ensemble de Mandelbrot de f(z)=z*z+c ');
Writeln(' Definition du rectangle du plan complexe c : ');
Writeln(' Exemple : -1.23<=Re c<=-1.1 ; 0.25<=Im c<=0.34 ');
Writeln(' min et max de Re c ? Exemple : -2.25 0.75  ');
Readln(Xmin,Xmax);
Writeln(' min et max de Im c ? Exemple : -1.25 1.25  ');
Readln(Ymin,Ymax);

{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
(* Unites des axes : *)
   Ux := round(maxX/(Xmax - Xmin));
   Uy := round(Ymax/(Ymax - Ymin));
   hx:=(Xmax - Xmin)/MaxX ;
   hy:=(Ymax - Ymin)/MaxY ;
   For i:=0 to MaxX do
   Begin   cx:=Xmin + i*hx ;
     For j:=0 to MaxY do
     Begin
     cy:=Ymin+j*hy;  x0:=0; y0:=0; r2:=0; k:=0;
     While (r2<M ) and (k<N) do
     Begin
       x:=x0*x0-y0*y0+cx;  y:=2*x0*y0+cy ;  r2:=x*x+y*y ;
       k:=k+1;   x0:=x ; y0:=y ;
     End;
        (* Dessiner : *)  color :=k mod 10 +1 ;
       If k<= 20 then color :=9 ; If k>20 then color :=11 ;
       If k>25 then color :=10 ;  If k>30 then color :=4 ;
       If k>40 then color := 14   If k>80 then color := 2 ;
       If k=N then color := 0 ;
       PUTPIXEL(i,MaxY-j,color);
     End;
  End;
OutTextXY(50,10, ' Ensemble de Mandelbrot : ');
```

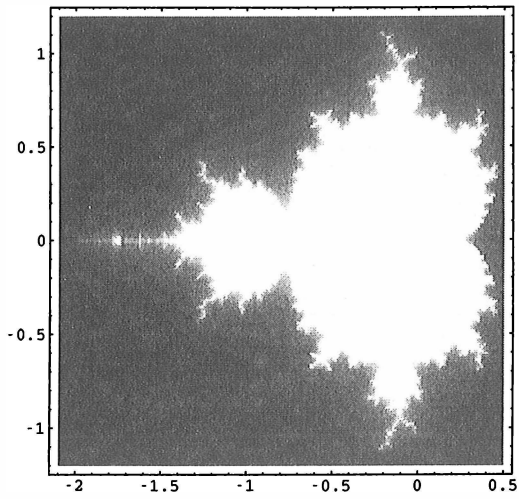


FIG. 3.58 – *L'ensemble de Mandelbrot par Mathematica.*

```
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Pour $-2.25 \leq \Re c \leq 0.75$, $-1.25 \leq \Im c \leq 1.25$ *le dessin est sur la figure 3.38). Pour* $-1.23 \leq \Re c \leq -1.1$, $0.25 \leq \Im c \leq 0.34$ *(agrandissement) le dessin est sur la figure 3.39. Pour* $-1.8 \leq \Re c \leq -1.73$, $0.025 \leq \Im c \leq 0.025$ *(agrandissement de la composante contenant le point* $c_3 = -1.75487766$*) le dessin est sur la figure 3.37.*

Programme 3.12 *Le programme Mathematica suivant dessine l'ensemble de Mandelbrot [161]:*

```
In[1]:=
  mandelbrot =
  Compile[{{k, _Complex}},
    Module[{val = 0+0I, cnt = 0},
      While[Re[val]^2+Im[val]^2 < 50 && cnt < 20,
            val = val^2 + k;
            cnt++] ;
      cnt]];
In[2]:=
  DensityPlot[mandelbrot[x + I y], {x,-2.1,0.5}, {y,-1.2,1.2},
        PlotPoints -> 200, Mesh -> False]
```

Le résultat est présenté sur la figure 3.58.

Programme 3.13 *Calcul des points critiques* $z = \pm\sqrt{-p/3}$ *: posons* $p = p_1 + ip_2$, $z = x + iy$. *Nous avons*

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -\frac{p_1 + ip_2}{3}$$

D'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{r_p - p_1}{6}}, \quad y = -\frac{p_2}{6x}, \text{ avec } r_p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

D'autre part, on a, en posant $q = q_1 + iq_2$,

$$\begin{aligned} P(z) &= (x+iy)^3 + (p_1+ip_2)(x+iy) + q_1 + iq_2 \\ &= x^3 - 3xy^2 + xp_1 - yp_2 + q_1 + i(3x^2y - y^3 + xp_2 + yp_1 + q_2). \end{aligned}$$

```
program ensemble_de_Mandelbrot ;
(* Ensemble de Mandelbrot CUBIQUE :  z*z*z +pz +q  *)
USES dos,crt,graph;
const M = 10 ; N = 100 ;
var    i,j,k,Ux,Uy,color : integer;
       p1,p2,q1,q2,hx,hy,rp: real ;
       x10,y10,x20,y20,x1,y1,x2,y2,r1,r2: real ;
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
BEGIN    (* Programme principal  *)
Clrscr ;
Writeln(' Ensemble de Mandelbrot de f(z)=z*z*z+pz+q ');
Writeln(' Entrez q1 et q2 Exemple : 0.5 0  ');
Readln(q1,q2);
Writeln(' Definition du rectangle du plan complexe p : ');
Writeln(' min et max Re p ? Exemple : -3 3');
Readln(Xmin,Xmax);
Writeln(' min et max Im p ? Exemple : -2 2');
Readln(Ymin,Ymax);
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
(* Unites des axes : *)
   Ux := round(maxX/(Xmax - Xmin));
   Uy := round(Ymax/(Ymax - Ymin));
   hx:=(Xmax - Xmin)/MaxX ; hy:=(Ymax - Ymin)/MaxY ;
   For i:=0 to MaxX do
   Begin
     p1:=Xmin + i*hx ;
   For j:=0 to MaxY do
   Begin
     p2 := Ymin + j*hy ;
     (* Calcul des points critiques  : *)
     rp:=p1*p1+p2*p2; rp:=sqrt(rp);
     x10:=sqrt((rp-p1)/6);y10:=-p2/6/x10;
     x20:=-sqrt((rp-p1)/6);y20:=-p2/6/x20;
     r1 := 0 ; r2 := 0 ; k := 0 ;
         While (r1<M) and (r2<M ) and (k<N) do
         Begin
            x1:=x10*x10*x10-3*x10*y10*y10+x10*p1-y10*p2+q1 ;
            y1:=3*x10*x10*y10-y10*y10*y10+x10*p2+y10*p1+q2 ;
```

```
            x2:=x20*x20*x20-3*x20*y20*y20+x20*p1-y20*p2+q1 ;
            y2:=3*x20*x20*y20-y20*y20*y20+x20*p2+y20*p1+q2 ;
            r1:=x1*x1+y1*y1 ;  r2:=x2*x2+y2*y2 ;
            k:=k+1;
            x10:=x1 ; y10:=y1 ; x20:=x2 ; y20:=y2 ;
         End;
        (* Dessiner : *)   color :=k mod 10 +1 ;
         If k<= 20 then color :=9; If k>20 then color :=11 ;
         If k>25 then color :=10 ; If k>30 then color :=4 ;
         If k>40 then color := 14;If k>80 then color := 2 ;
            PUTPIXEL(i,MaxY-j,color);
    End;
 End;
 OutTextXY(50,10, ' Ensemble de Mandelbrot : ');
  readln;    CloseGraph;
END.
```

Programme 3.14

```
Program ensemble_de_julia_rempli ;
(* Ensemble de Julia rempli de  (z*z*z+pz+q)   *)
uses
  Crt, Dos, Graph;
const G = 30 ; N0 = 200 ;
var
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,p1,p2,q1,q2 : real ;
PROCEDURE JULIA_REMPLI;
(* Pour quitter le graphe taper sur ENTER *)
var
  k,i,j : integer;
  x,y,x1,y1,r2,hx,hy : real ;
   begin
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
FOR i:=0 TO maxX DO
FOR j:=0 TO maxY DO
   BEGIN  x:=Xmin+hx*i ; y:=Ymin+hy*j ; k:=0 ;
          REPEAT
             k:=k+1 ;
             x1:=x*x*x-3*x*y*y+x*p1-y*p2+q1 ;
             y1:=3*x*x*y-y*y*y+x*p2+y*p1+q2 ;
             r2:=x1*x1+y1*y1 ;  x:=x1 ; y:=y1 ;
          UNTIL (r2 > G) OR (k=N0) ;
          IF r2 < G THEN PUTPIXEL(i,maxY-j,4);
   END ;
end; (* JULIA_REMPLI *)
begin { program body }
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin := -2 ; Xmax := 2 ; Ymin := -2 ; Ymax := 2 ;
```

```
(*
   p1:=1.8 ; p2:=0.5 ; q1:=0 ; q2:=0 ;
   p1:=2.14 ; p2:=0 ; q1:=0 ; q2:=0 ;
   p1:=-1.5 ; p2:=0 ; q1:=0.5 ; q2:=0 ;  *)
   p1:=-0.14 ; p2:=0.7 ; q1:=0.5 ; q2:=0 ;
  JULIA_REMPLI;
OutTextXY(50,10, ' Ensemble de Julia rempli :  ');
  readln;    CloseGraph;   end.
```

3.8 Exercices

(Les réponses sont données à l'Annexe A)

Exercice 3.1 On considère l'automorphisme d'Anosov du tore T^2 [7], [8] :

$$\phi(x,y) = (x+y, x+2y), \quad \text{mod } 1. \tag{3.118}$$

1) Montrer que la transformation ϕ est conservative.

2) Trouver les points fixes et les 2-cycles de ϕ. Plus généralement, soit $p \in T^2$ tel que $p = (\frac{r}{m}, \frac{s}{n})$, où r, s, m, n sont des entiers avec $0 \leq \frac{r}{m}, \frac{s}{n} < 1$ et soit k le ppcm de m, n ; montrer que p est un point périodique de période $\leq k^2$. En déduire que les points périodiques sont denses sur T^2.

3) Montrer que les points homoclines, intersections des variétés stable et instable de l'origine, sont aussi denses sur T^2.

Exercice 3.2 Soit un polynôme réel [64] :

$$P(x) = -x^3 + \frac{2}{3}x + q, \quad q, x \in \mathbb{R}$$

On considère l'application itérée :

$$x_{n+1} = P(x_n).$$

1) Pour quelles valeurs de q, y a-t-il un point fixe superstable , une bifurcation de doublement de période, un point fixe stable?

2) Dessiner les diagrammes de bifurcation pour $-1.25 \leq q \leq 0$ et $0 \leq q \leq 1.25$.

Exercice 3.3 *Application de Hénon-Heiles [81], [97], [11].* On considère l'application itérée $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$T : \quad x_1 = x + a(y - y^3), \quad y_1 = y - a(x_1 - x_1^3), \quad a > 0 \tag{3.119}$$

1) Ecrire l'application inverse T^{-1}.

2a) Calculer la matrice jacobienne de (3.119). En déduire que la transformation (3.119) conserve les aires.

2b) Montrer que, si $0 < a < 2$ le point fixe $(0,0)$ est elliptique, si $a > 2$, il devient hyperbolique.

3a) Montrer que l'application T^6 possède 6 points fixes :

$$\begin{aligned} e_0 &= (t,0),\ e_1 = (t,-t),\ e_2 = (0,-t), \\ e_3 &= (-t,0),\ e_4 = (-t,t),\ e_5 = (0,t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.120}$$

pour certaine valeur de t que l'on calculera. Quelle est la condition sur a pour que t existe?

3b) Montrer que l'application T^6 possède aussi 6 points fixes :

$$\begin{aligned} h_0 &= (r,-s),\ h_1 = (s,-r),\ h_2 = (-s,-s), \\ h_3 &= (-r,s),\ h_4 = (-s,r),\ h_5 = (s,s), \quad s,r > 0, \end{aligned} \tag{3.121}$$

pour certaines valeurs de s et r. Calculer s et r pour $a = 1.6$.

3c) Calculer les matrices jacobiennes de T^6 aux points e_i, h_i, pour $a = 1.6$. En déduire que e_i est un point fixe elliptique et que h_i est un point fixe hyperbolique.

4) On suppose toujours que $a = 1.6$.

a) Ecrire un programme Pascal qui dessine les courbes fermées entourant l'origine et les 6 ovales entourant les 6 points elliptiques e_i.

b) Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres de la matrice jacobienne de T^6 au point fixe h_0 et v_1, v_2 les vecteurs propres correspondants. Soit P_1 (resp. P_2) un groupe de points appartenant au voisinage de h_0 et situés dans la direction v_1 (resp. v_2). Ecrire un programme qui itère les points de P_1 (resp. P_2) par l'application T (resp. T^{-1}). Que constate-t-on?

Exercice 3.4 On considère l'application itérée T définie par [72], [79] :

$$x_{n+1} = x_n \cos a - (y_n - x_n^2) \sin a, \quad y_{n+1} = x_n \sin a + (y_n - x_n^2) \cos a$$

avec $0 < a < \pi$

1) Montrer que l'application T préserve les aires et calculer T^{-1}.

2) Trouver les points fixes de T, T^2, T^3, T^4 et étudier leur stabilité.

Exercice 3.5 Soit $p(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe, $S = \mathbb{C} \cup \infty$ la sphère de Riemann. Si $p'(z) \neq 0$, la fonction :

$$f(z) : S \to S, \quad f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)} \tag{3.122}$$

est la fonction itérative de la méthode de Newton pour trouver une racine α du polynôme $p(z)$. Montrer que α est un point super attractif de f. En déduire l'ensemble de Julia $J(f)$. Application $p(z) = z^3 - 1$.

Exercice 3.6 On considère un polynôme complexe $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$, de degré $d > 1$.

1) Soit α un point fixe de l'application itérée :

$$z_{n+1} = P(z_n). \tag{3.123}$$

Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que α soit racine multiple de l'équation $z = P(z)$ est que $P'(\alpha) = 1$.

2) On suppose que l'application itérée (3.123) possède d points fixes distincts: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_d$. Montrer que:

$$\frac{1}{P'(\alpha_1)-1} + \frac{1}{P'(\alpha_2)-1} + \cdots + \frac{1}{P'(\alpha_d)-1} = 0. \tag{3.124}$$

En déduire qu'il existe au moins un point fixe α_k avec $|P'(\alpha_k)| > 1$.

3) Que devient (3.124) lorsque, pour certains k, on a $P'(\alpha_k) = 1$, $P''(\alpha_k) \neq 0$?

Exercice 3.7 1) Montrer que l'ensemble de Julia de $p_{-2}(z) = z^2 - 2$ est $K = [-2, 2]$.

2) Soit D le disque de rayon 1. Montrer que l'application:

$$\phi : \mathbb{C} - K \to \mathbb{C} - D, \quad z = \phi(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4})$$

conjugue $p_{-2}(x)$ à $p_0(z) = z^2$. Calculer $x = \phi^{-1}(z)$.

3) Soit $z = re^{i2\pi\alpha} \in \mathbb{C} - D$. Calculer les lignes équipotentielles $\phi^{-1}(z)$, $r = \text{const.}$ et les lignes de champs $\phi^{-1}(z)$, $\alpha = \text{const.}$ [23], [131].

Exercice 3.8 On considère un polynôme cubique réel [64]:

$$P(x) = x^3 + px + q, \quad x, p, q \in \mathbb{R}. \tag{3.125}$$

1) Trouver les courbes des points (p, q) correspondant aux bifurcations nœud-col $(P'(x) = 1)$, de doublement de période $(P'(x) = -1)$ et aux points fixes superstables $(P'(x) = 0)$.

2) Trouver la courbe C des paramètres p, q où le point critique $a = \sqrt{-p/3}$ est tel que l'image de a soit un point fixe (c'est-à-dire $P(a)$ est un point fixe, appelé *point fixe critique*). Dessiner dans le même plan (p, q) la courbe C et l'ensemble:

$$M = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : P^k(+a) \not\to \infty, P^k(-a) \not\to \infty\}.$$

En déduire l'ensemble des polynômes $P(x)$ qui ont les mêmes propriétés que (3.113).

Exercice 3.9 Soit $P(z) = z^3 + pz$, $p \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que:

a) si $|p| > 3$, l'ensemble de Julia J_P est un ensemble de Cantor,

b) si $|p| \leq 3$, l'ensemble de Julia J_P est connexe,

c) si $p = -3$, $J_P = [-2, 2]$ et si $p = 3$, $J_P = [-2i, 2i]$.

Chapitre 4

Mesures et structures du chaos

Ce chapitre débute par l'exposé de la méthode de Lindstedt-Poincaré qui permet de calculer, de façon approchée, par voie analytique, la solution périodique d'équations différentielles du second ordre et la période correspondante.

Prouver l'existence de solutions périodiques ou chaotiques par la théorie des bifurcations est souvent impossible (ou très coûteux) lorque l'espace des phases est de dimension élevée. On fait alors appel à des méthodes que nous qualifierons d'indirectes, souvent complémentaires entre elles, qui sont la série temporelle, le spectre de Fourier et la section de Poincaré qui est facilement calculable par la méthode de Hénon.

Les sections de Poincaré peuvent présenter des structures d'archipels très particulières qui sont expliquées par la théorie KAM.

L'attracteur étrange (systèmes dissipatifs) est, entre autres, caractérisé par sa dimension fractale. Nous donnons la définition de plusieurs dimensions fratales couramment utilisées ; dimension de Kolmogorov, de Hausdorff et de Lyapunov. Cette dernière est fonction des exposants de Lyapunov qui renseignent directement sur la dynamique d'un système. S'il y a chaos, certains exposants sont positifs, leur nombre étant égal au nombre de degrés de liberté déstabilisants. Nous donnons l'algorithme de calcul des exposants proposé par Wolf, Swift, Swinney et Vastano.

L'ensemble de Cantor du fer à cheval de Smale est l'analogue, en dimension 2, des poussières de Fatou. On le rencontre au voisinage des points homoclines et dans les sections de Poincaré transverses aux orbites de Silnikov. La méthode de Melnikov permet de prouver analytiquement son existence.

Le chapitre se termine par l'exposé de la route vers le chaos par intermittences.

4.1 Méthode de Lindstedt-Poincaré

Dans le chapitre 3, nous avons vu qu'une solution stationnaire pouvait bifurquer vers une solution périodique (bifurcation de Hopf). Pour calculer cette solution et sa période, on peut utiliser la méthode de Lindstedt-Poincaré.

Tout étudiant de premier cycle peut montrer que la solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = a\cos kt, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

est :

$$x(t) = A\cos t + B\sin t + \frac{a}{1-k^2}\cos kt \quad \text{si } k \neq 1$$

et

$$x(t) = A\cos t + B\sin t + \frac{at}{2}\sin t \quad \text{si } k = 1.$$

Dans le premier cas, la solution de l'équation (4.1) est périodique ; dans le second cas, elle ne l'est pas. Par conséquent, si l'on veut absolument que (4.1) ait une solution *périodique*, il faut que $k \neq 1$ ou $a = 0$ (si $k = 1$). Cette idée va être exploitée par Lindstedt et Poincaré [135]. Pour des raisons historiques, lorsque $k = 1$ le second membre de (4.1) est appelé terme séculaire. Nous allons illustrer la méthode de Lindstedt-Poincaré par les deux exemples suivants.

Exemple 4.1.1 Chercher une solution *périodique* approchée de l'équation de Duffing :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \epsilon x^3, \quad \epsilon \text{ petit}, \tag{4.2}$$

avec

$$x(0) = A, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0.$$

On peut écrire (4.2) sous forme de système :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \epsilon x^3. \tag{4.3}$$

Le point d'équilibre $(x, y) = (0, 0)$ est un centre (sa matrice jacobienne a pour valeurs propres $\lambda_{1,2} = \pm i$). Le système (4.3) possède donc des solutions périodiques lorsque ϵ est petit. L'idée est d'écrire la solution périodique de (4.2) sous la forme d'un développement en série de ϵ. Mais comme la période change également nous posons :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

et introduisons le changement de variables :

$$\tau = t\omega \quad \text{avec } \omega = 1 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \cdots.$$

Posons :

$$\begin{aligned} x(t) &= z(\tau) = z_0(\tau) + \epsilon z_1(\tau) + \epsilon^2 z_2(\tau) + \cdots, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{dz}{d\tau}(1 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \cdots), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2z}{d\tau^2}(1 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \cdots)^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.2) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2z_0}{d\tau^2} + \epsilon\frac{d^2z_1}{d\tau^2} + \epsilon^2\frac{d^2z_2}{d\tau^2} + \cdots\right)(1 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \cdots)^2 \\ &+(z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \cdots) \\ &= \epsilon(z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \cdots)^3. \end{aligned}$$

Nous comparons d'abord les coefficients de ϵ^0 et obtenons :

$$\frac{d^2 z_0}{d\tau^2} + z_0 = 0, \tag{4.5}$$

d'où, en tenant compte des conditions initiales :

$$z_0 = A\cos\tau. \tag{4.6}$$

Les coefficients de ϵ donnent :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 &= z_0^3 - 2\omega_1 \frac{d^2 z_0}{d\tau^2} \\ &= A^3\cos^3\tau + 2\omega_1 A\cos\tau \\ &= \left(\frac{3A^3}{4} + 2\omega_1 A\right)\cos\tau + \frac{A^3}{4}\cos 3\tau \end{aligned} \tag{4.7}$$

où nous avons utilisé la relation :

$$\cos^3\tau = \frac{1}{4}(\cos 3\tau + 3\cos\tau).$$

Comme nous cherchons une solution *périodique*, le terme en $\cos\tau$ (terme séculaire) du second membre doit disparaître. D'où :

$$\omega_1 = -\frac{3A^2}{8}.$$

(4.7) s'écrit donc :

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + z_1 = \frac{A^3}{4}\cos 3\tau. \tag{4.8}$$

La solution de (4.8), avec $z_1(0) = dz_1(0)/d\tau = 0$, est :

$$z_1 = \frac{A^3}{32}(\cos\tau - \cos 3\tau). \tag{4.9}$$

Nous continuons en identifiant les coefficients de ϵ^2 et en tenant compte de (4.6) et (4.9) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_2}{d\tau^2} + z_2 &= 3z_0^2 z_1 - 2\omega_1 \frac{d^2 z_1}{d\tau^2} - (\omega_1^2 + 2\omega_2)\frac{d^2 z_0}{d\tau^2} \\ &= \left(\frac{21A^4}{128} + 2\omega_2\right)A\cos\tau + \frac{3A^5}{16}\cos 3\tau - \frac{3A^5}{128}\cos 5\tau, \end{aligned} \tag{4.10}$$

où nous avons utilisé les relations :

$$\cos^2\tau = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\tau),$$

$$\cos 2\tau\cos 3\tau = \frac{1}{2}(\cos 5\tau + \cos\tau).$$

Pour faire disparaître le terme séculaire, nous devons poser :

$$\omega_2 = -\frac{21A^4}{256},$$

(4.10) s'écrit donc :

$$\frac{d^2z_2}{d\tau^2} + z_2 = \frac{3A^5}{16}\cos 3\tau - \frac{3A^5}{128}\cos 5\tau. \tag{4.11}$$

La solution de (4.11) avec $z_2(0) = dz_2(0)/d\tau = 0$, est :

$$z_2 = \frac{A^5}{1024}(23\cos\tau - 24\cos 3\tau + \cos 5\tau)$$

et ainsi de suite jusqu'à la précision voulue. Ainsi la solution périodique de l'équation de Duffing (4.2), pour ϵ petit, est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t + \frac{\epsilon A^3}{32}(\cos\omega t - \cos 3\omega t) \\ &+ \frac{\epsilon^2 A^5}{1024}(23\cos\omega t - 24\cos 3\omega t + \cos 5\omega t) + \cdots \end{aligned}$$

avec

$$\omega = 1 - \frac{3\epsilon A^2}{8} - \frac{21\epsilon^2 A^4}{256} + \cdots$$

et est de période $T = 2\pi/\omega$.

Exemple 4.1.2 Chercher une solution *périodique* approchée de l'équation de van der Pol :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \epsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt}, \quad \epsilon \text{ petit}, \tag{4.12}$$

avec

$$x(0) = A, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0.$$

On peut montrer, par le théorème de Poincaré-Bendixson, que l'équation (4.12) possède des solutions périodiques. Comme dans l'exemple précédent, portons (4.4) dans (4.12) nous obtenons :

$$\begin{aligned} &(\frac{d^2z_0}{d\tau^2} + \epsilon\frac{d^2z_1}{d\tau^2} + \epsilon^2\frac{d^2z_2}{d\tau^2} + \cdots)(1 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \cdots)^2 \\ &+(z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \cdots) \\ = \;& \epsilon[1 - (z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \cdots)^2] \\ &(\frac{dz_0}{d\tau} + \epsilon\frac{dz_1}{d\tau} + \epsilon^2\frac{dz_2}{d\tau} + \cdots)(1 + \omega_1\epsilon + \omega_2\epsilon^2 + \cdots). \end{aligned}$$

Identifiant les termes en ϵ^0, nous obtenons :

$$\frac{d^2z_0}{d\tau^2} + z_0 = 0. \tag{4.13}$$

D'où, en tenant compte des conditions initiales :

$$z_0 = A\cos\tau. \tag{4.14}$$

Le terme en ϵ donne :

$$\begin{aligned}\frac{d^2z_1}{d\tau^2} + z_1 &= (1 - z_0^2)\frac{dz_0}{d\tau} - 2\omega_1\frac{d^2z_0}{d\tau^2} \\ &= 2\omega_1 A\cos\tau + \left(\frac{A^3}{4} - A\right)\sin\tau + \frac{A^3}{4}\sin 3\tau.\end{aligned} \tag{4.15}$$

D'où, en annulant les termes séculaires :

$$\omega_1 = 0, \quad A = 2.$$

La solution de (4.15) avec $dz_1(0)/d\tau$ est alors :

$$z_1 = B\cos\tau + \frac{3}{4}\sin\tau - \frac{1}{4}\sin 3\tau. \tag{4.16}$$

Le terme en ϵ^2 s'écrit, après l'insertion de (4.16) et simplification :

$$\begin{aligned}\frac{d^2z_2}{d\tau^2} + z_2 &= \left(4\omega_2 + \frac{1}{4}\right)\cos\tau + 2B\sin\tau + 3B\sin 3\tau \\ &- \frac{3}{2}\cos 3\tau + \frac{5}{4}\cos 5\tau.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Pour faire disparaître le terme séculaire, nous devons poser :

$$\omega_2 = -\frac{1}{16}, \quad B = 0$$

et obtenons :

$$z_2 = C\cos\tau + \frac{3}{16}\cos 3\tau - \frac{5}{96}\cos 5\tau.$$

Au tour suivant, on obtient $C = -13/96$, d'où :

$$\begin{aligned}x(t) &= 2\cos\omega t + \frac{\epsilon}{4}(3\sin\omega t - \sin 3\omega t) \\ &- \frac{\epsilon^2}{96}(13\cos\omega t - 18\cos 3\omega t + 5\cos 5\omega t) + \cdots\end{aligned}$$

avec

$$\omega = 1 - \frac{\epsilon^2}{16} + \cdots, \quad T = 2\pi/\omega.$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode de Lindstedt-Poincaré au calcul du cycle limite dans la bifurcation de Hopf. Pour illustrer ceci, nous prenons l'exemple suivant.

Exemple 4.1.3 Considérons le système [48] :

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax + xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay - x^2. \tag{4.18}$$

L'origine est un point d'équilibre et on peut montrer, par la méthode du chapitre 2, que le système possède une bifurcation de Hopf à $a = 0$ (la matrice jacobienne à l'origine a pour valeurs propres $\pm i$ dans ce cas).

Pour déterminer le cycle limite lorsque $a \to 0$, on pose $\tau = \omega t$ avec $\omega \to 1$ lorsque $a \to 0$. Le système (4.18) s'écrit alors :

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\omega}(-y + ax + xy^2), \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\omega}(x + ay - x^2). \tag{4.19}$$

Comme le système est autonome, on peut, par une translation de l'origine de τ, supposer que :

$$x'(0, a) = 0, \quad (') = d/d\tau. \tag{4.20}$$

On pose ensuite :

$$\begin{aligned} x(\tau, a) &= a^{1/2}x_{1/2}(\tau) + ax_1(\tau) + a^{3/2}x_{3/2}(\tau) + \cdots, \\ y(\tau, a) &= a^{1/2}y_{1/2}(\tau) + ay_1(\tau) + a^{3/2}y_{3/2}(\tau) + \cdots, \\ \omega(a) &= 1 + a^{1/2}\omega_{1/2} + a\omega_1 + a^{3/2}\omega_{3/2} + \cdots \end{aligned} \tag{4.21}$$

pour $a \to 0$. Portant (4.21) dans (4.19) et égalisant les coefficients de $a^{1/2}, a, a^{3/2}, \ldots$:

- coefficients de $a^{1/2}$:

$$\begin{aligned} x'_{1/2} + y_{1/2} &= 0, \\ y'_{1/2} - x_{1/2} &= 0, \quad x'_{1/2}(0) = 0. \end{aligned}$$

Eliminant $y_{1/2}$, on obtient :

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)x_{1/2} = 0, \quad x'_{1/2}(0) = 0.$$

On en déduit :

$$x_{1/2} = A_{1/2}\cos\tau, \quad A_{1/2} = \text{ constante}$$

et

$$y_{1/2} = -x'_{1/2}(\tau) = A_{1/2}\sin\tau.$$

La constante $A_{1/2}$ sera déterminée après.

- coefficients de a :

$$\begin{aligned} x'_1 + y_1 &= -\omega_{1/2}x'_{1/2}, \quad y'_1 - x_1 = \omega_{1/2}y'_{1/2} - x^2_{1/2}, \\ x'_1(0) &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right)x_1 &= \omega_{1/2}(y'_{1/2} - x''_{1/2}) + x^2_{1/2} \\ &= 2\omega_{1/2}A_{1/2}\cos\tau + \frac{1}{2}A^2_{1/2}(1 + \cos 2\tau). \end{aligned}$$

La périodicité implique que le terme séculaire disparaisse, d'où :

$$\omega_{1/2} = 0.$$

On obtient alors, en tenant compte de (4.20) :

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= A_1 \cos\tau + A_{1/2}^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2\tau), \\ y_1(\tau) &= -x_1'(\tau) = A_1 \sin\tau - \frac{1}{3}A_{1/2}^2 \sin 2\tau. \end{aligned}$$

- coefficients de $a^{3/2}$:

$$\begin{aligned} x_{3/2}' + y_{3/2} &= -\omega_1 x_{1/2}' + x_{1/2} + x_{1/2}y_{1/2}^2, \\ y_{3/2}' - x_{3/2} &= -\omega_1 y_{1/2}' + y_{1/2} + 2x_{1/2}x_1, \\ x_{3/2}'(0) &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + 1\right) x_{3/2} \\ &= \omega_1(y_{1/2}' + x_{1/2}'') + x_{1/2}' - y_{1/2} + x_{1/2}'y_{1/2}^2 + 2x_{1/2}y_{1/2}y_{1/2}' + 2x_{1/2}x_1 \\ &= 2A_{1/2}(\omega_1 \cos\tau - \sin\tau) + A_{1/2}A_1(1 + \cos 2\tau) \\ &\quad + A_{1/2}^3(-\frac{1}{4}\sin\tau + \frac{3}{4}\sin 3\tau + \frac{5}{6}\cos\tau - \frac{1}{6}\cos 3\tau). \end{aligned}$$

Pour qu'il n'y ait pas de termes séculaires au second membre, il faut que les coefficients de $\sin\tau$ et $\cos\tau$ soient nuls, c'est-à-dire :

$$-2A_{1/2} - \frac{1}{4}A_{1/2}^3 = 0, \quad 2A_{1/2}\omega_1 + \frac{5}{6}A_{1/2}^3 = 0,$$

d'où :

$$A_{1/2}^2 = -8, \quad \omega_1 = \frac{10}{3}.$$

Puisque $A_{1/2}^2 < 0$, la solution ne sera réelle que si $a < 0$. On a alors :

$$x(t,a) \sim \sqrt{-8a}\cos\omega t, \quad y(t,a) \sim \sqrt{-8a}\sin\omega t, \quad a \to 0$$

avec

$$\omega(a) = 1 + \frac{10}{3}a + O(a^{3/2}), \quad a \to 0.$$

La bifurcation de Hopf est donc sous-critique.

4.2 Séries temporelles et spectre de puissance

Prouver l'existence d'une solution périodique d'un système dynamique au voisinage d'un point fixe, demande de calculer les valeurs propres de la jacobienne ou du moins, celles dont la partie réelle est dominante (voir chapitre 3). Ceci est très coûteux en temps de calcul dans le cas de systèmes de dimension importante (ce qui est couramment le cas pour les systèmes issus d'une discrétisation des équations de Navier-Stokes) et demande d'avoir une estimation des valeurs des paramètres pour lesquelles il y a bifurcation de Hopf. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées

pour cela : l'analyse de l'évolution temporelle d'une variable conjointement avec une analyse de son spectre de Fourier ou le calcul de la section de Poincaré que nous étudions dans la section suivante.

L'évolution temporelle d'un système dynamique est souvent représentée par la valeur d'une de ses variables à intervalle régulier : c'est ce qu'on appelle sa série temporelle.

Exemple 4.2.1 La figure 4.1 donne les séries temporelles de la vitesse angulaire $x(t) = d\theta/dt$ du pendule amorti (Cf. Chapitre 1) et entretenu dont le mouvement est régi par l'équation :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = A\cos(\omega_D t) \tag{4.22}$$

avec $\gamma = 0.5$, $\omega_D = 2/3$, $A = 0.95$ et $A = 1.5$ respectivement. Lorsque $A = 0.95$, le mouvement semble être périodique ; $A = 1.5$ conduit à un mouvement que l'on peut, à priori, qualifier de chaotique. La figure 4.1 a été dessinée par le programme 4.1. Pour vérifier ceci, on analyse le spectre de Fourier de $x(t)$. Soit

$$x(t) = a(t) + ib(t)$$

une fonction à valeurs complexes, de la variable réelle t. *La transformation de Fourier* de $x(t)$ est définie par :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift}\,dt = R(f) + iI(f). \tag{4.23}$$

La quantité :

$$S(f) = |X(f)|^2 = R^2(f) + I^2(f)$$

est appelée le *spectre de Fourier* ou *spectre de puissance* (power spectrum, en anglais) de $x(t)$. La transformation inverse de (4.23) est :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi ift}\,df. \tag{4.24}$$

Exemple 4.2.2 Calculons le spectre de puissance de :

$$x(t) = e^{-t}, \quad \text{si } t > 0, \quad x(t) = 0, \quad \text{si } t < 0. \tag{4.25}$$

On a :

$$X(f) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\pi if)t} = \frac{1}{1+2\pi if}.$$

On en déduit :

$$S(f) \equiv |X(f)|^2 = \frac{1}{1+4\pi^2 f^2}. \tag{4.26}$$

Le graphe de $S(f)$ est donné sur la figure 4.2.

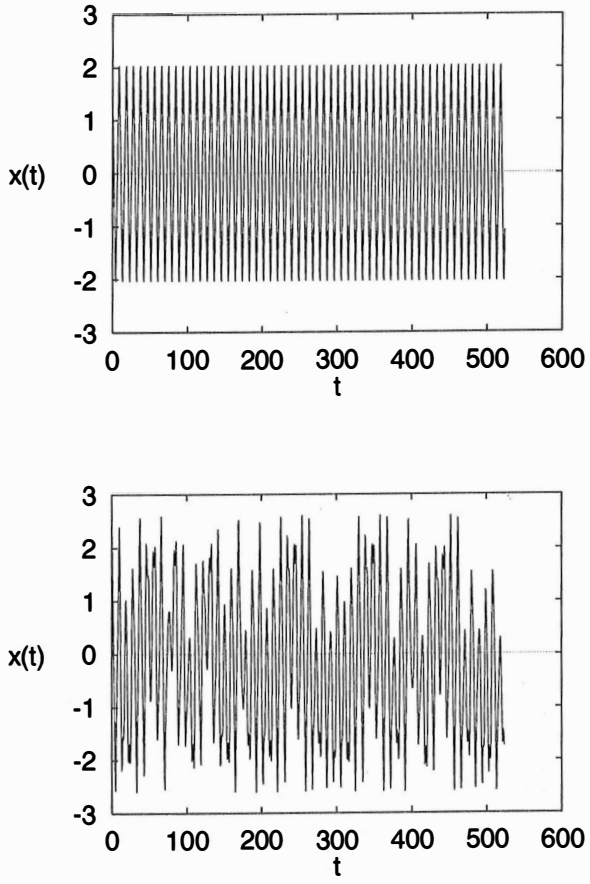


FIG. 4.1 – *Séries temporelles du pendule amorti et entretenu avec* $A = 0.95$ *(en haut) et* $A = 1.5$ *(en bas).*

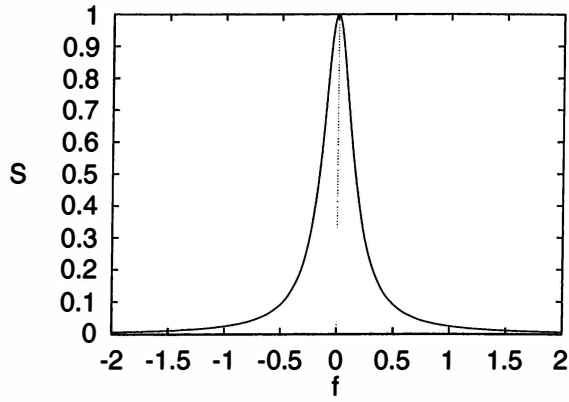


FIG. 4.2 – *Le spectre de puissance de* $x(t) = e^{-t}$

Si $x(t)$ est intégrable dans le sens :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty,$$

alors sa transformation de Fourier $X(f)$ existe et satisfait la transformation inverse (4.24) [21].

Dans les problèmes numériques, on remplace la transformation de Fourier (4.23) par une *transformation de Fourier discrète* :

$$X(n\Delta f) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) e^{-i2\pi nk/N} \tag{4.27}$$

$$\text{avec : } \Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \qquad \text{et : } n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.28}$$

La transformation de Fourier discrète inverse est :

$$x(k\Delta t) = \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} X(n\Delta f) e^{i2\pi nk/N} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.29}$$

Le spectre de puissance est alors donné par :

$$S(n\Delta f) = |X(n\Delta f)|^2 = [\Re X(n\Delta f)]^2 + [\Im X(n\Delta f)]^2 \tag{4.30}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

Pour réaliser une transformation de Fourier discrète de $x(t)$, on doit donc se donner N et Δt. Pour la fonction (4.25), on peut prendre par exemple $N = 2^{10} = 1024$, $\Delta t = 2^{-7} = 1/128$, on aura alors $\Delta f = 1/8$. La somme (4.27) sera calculée par l'algorithme FFT (Cf. Programme 4.2). Dans les problèmes de ce livre $x(t)$ est une variable de l'espace des phases (sa partie imaginaire est donc nulle) et les $x(k\Delta t)$, $k = 0, 2, \ldots, N-1$ seront calculés par la méthode de Runge-Kutta.

Exemple 4.2.3 Le programme 4.2 calcule le spectre de puissance S de $x(t) = d\theta/dt$ de l'exemple 4.2.1 par les formules (4.27) et (4.30) en choisissant $N = 2^{12}$, $\Delta t = 0.1$

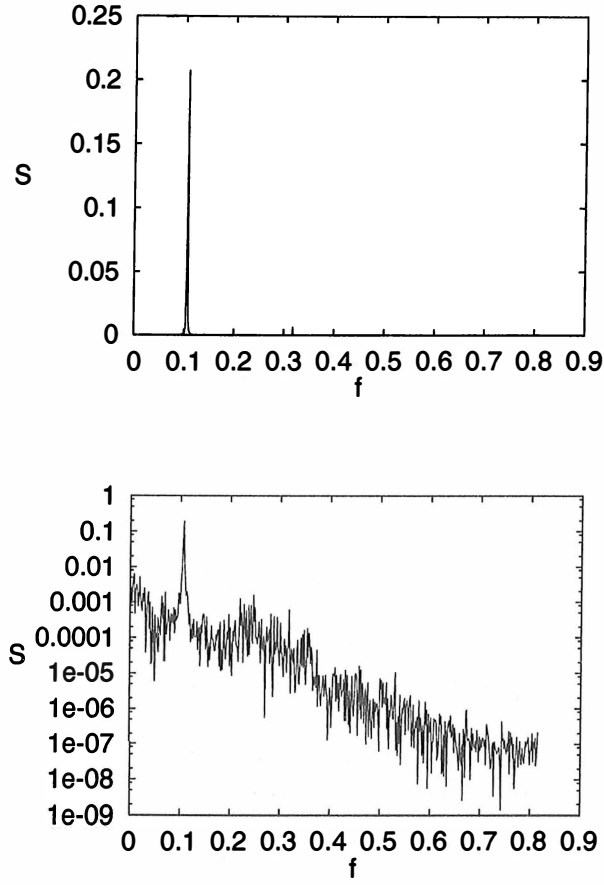


FIG. 4.3 – *Spectres de puissance du pendule amorti et entretenu avec $A = 0.95$ (en haut) et $A = 1.5$ (en bas).*

(à ne pas confondre avec le pas de temps h de la méthode de Runge-Kutta, qui est ici $h = 0.001$). Les constantes sont les mêmes que dans l'exemple 4.2.1. Les résultats sont portés sur la figure 4.3. Les 200 premières itérations n'ont pas été prises en compte afin de s'abstraire de tout régime transitoire. On peut noter le pic à la fréquence 0.1 : c'est la fréquence de la force d'entraînement. En effet, pour $\omega_D = 2/3$ la période de la force d'entraînement est $T_D = 2\pi/\omega_D = 3\pi$, d'où $f_D = 1/T_D \approx 0.1$. Le premier spectre présente un nombre limité de fréquences, la fréquence f_D et une de ses harmoniques : le mouvement est périodique. Le spectre correspondant à l'amplitude $A = 1.5$ est dense : c'est, en général, la signature d'un mouvement chaotique.

Un signal peut posséder r fréquences de base et le spectre comporte toutes les fréquences $|n_1 f_1 + n_2 f_2 + \cdots + n_r f_r|$, les n_i étant des entiers de signe quelconque. La trajectoire dans l'espace des phases s'inscrit sur un tore de dimension r.

Prenons, pour simplifier l'exposé, $r = 2$. Deux cas sont à considérer :

- f_1/f_2 est un nombre irrationnel, $|n_1 f_1 + n_2 f_2|$ forment un ensemble dense sur les réels positifs. Le spectre est donc dense mais non-continu : le mouvement est quasi-périodique.

- $|f_1/f_2|$ est un nombre rationnel irréductible, $|n_2/n_1|$. Le spectre présente des raies qui sont les harmoniques de la fréquence $f_0 = |f_1/n_2| = |f_2/n_1|$, le mouvement est périodique.

Dans le cas général, le mouvement est quasi-périodique si $\sum_1^r n_i f_i \neq 0$ pour $n_i \in \mathbb{Z}$. Lorsqu'un signal n'est ni périodique, ni quasi-périodique, il est dit apériodique. Le spectre de Fourier est alors continu.

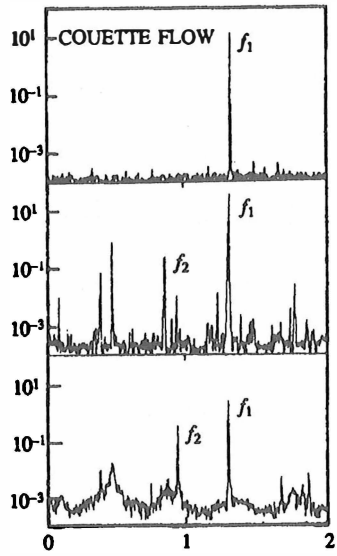


FIG. 4.4 – *Spectres d'un écoulement de Couette : spectre périodique, spectre quasipériodique et spectre apériodique (de haut en bas). D'après Fenstermacher, Gollub et Swinney [143].*

Les spectres de la figure 4.4 ont été mesurés par R. Fenstermacher, H. L. Swinney et J. P. Gollub (voir [143]) dans le cas d'un écoulement de Couette : il s'agit de l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux, le cylindre intérieur tournant à une vitesse constante. Les spectres de la figure 4.4 (de haut en bas) correspondent à des vitesses croissantes du cylindre intérieur et à des écoulements respectivement périodique (1 pic de fréquence), quasi-périodique (plusieurs fréquences indépendantes), et apériodique (l'élargissement des pics et la croissance du niveau du bruit à basse fréquence suggèrent l'existence d'un attracteur étrange).

Remarque 4.2.1 En pratique, dans le cas d'un signal quasi-périodique, on n'observe qu'un nombre limité de fréquences dont l'amplitude soit significative car, les fréquences qui correspondent à des valeurs de n_i supérieures à quelques unités, ont une amplitude trop faible pour être détectées.

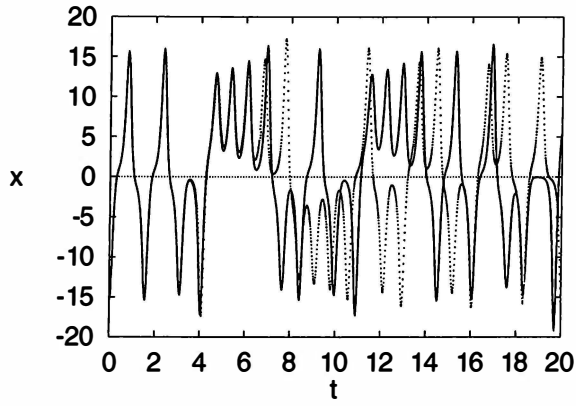


FIG. 4.5 – *Deux séries temporelles du système de Lorenz.*

Remarque 4.2.2 La figure 4.5 donne les résultats d'un programme analogue à 4.1. Dans ce programme on intègre le système de Lorenz par la méthode de Runge-Kutta. Partant de deux conditions initiales voisines, l'une, $x(0) = -15.00$, $y(0) = -17.0$, $z(0) = 35.0$, l'autre, $x(0) = -15.01$ et les mêmes $y(0)$, $z(0)$, on aboutit à deux séries temporelles différentes. C'est l'exemple de la sensibilité aux conditions initiales des attracteurs étranges (voir section 1.6.3).

4.3 La section de Poincaré et la méthode de Hénon

4.3.1 Les applications de Poincaré

Considérons un système autonome défini par n équations :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{4.31}$$

ou sous forme vectorielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{4.32}$$

Supposons que l'équation (4.32) ait une solution $x(x_0, t_0; t) \equiv \phi_t(x_0)$ de période T : $\phi_{t+T}(x_0) = \phi_t(x_0)$. On appelle section de Poincaré, une hypersurface Σ de dimension $n-1$, transverse au champ de vecteurs f en x_0 (c'est-à-dire $f(x_0).n(x_0) \neq 0$ où "." désigne le produit scalaire et $n(x_0)$ est la normale à Σ en x_0). Soit x un point du voisinage $V \subseteq \Sigma$ de x_0, l'application de Poincaré ou l'application de premier retour $P : V \to \Sigma$ est définie par :

$$x_1 = P(x) = \phi_\tau(x) \tag{4.33}$$

où $\tau = \tau(x)$ est le temps mis par la trajectoire avec point initial x pour retourner à Σ pour la première fois (voir figure 4.6). Il est à remarquer que le temps $\tau(x)$ est proche de T et par construction on a $\tau(x_0) = T$, $P(x_0) = x_0$ (point fixe de P).

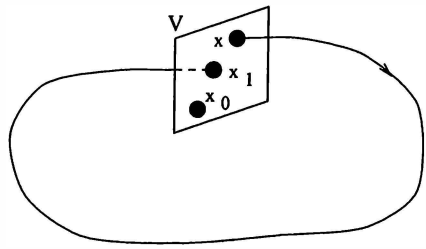


FIG. 4.6 – *L'application de premier retour (ou de Poincaré).*

L'application de Poincaré est donc un cas particulier des applications itérées étudiées au chapitre précédent. La stabilité du point fixe x_0, donc de la solution périodique, est décrite au premier ordre par la matrice jacobienne $M = DP(x_0)$.

Théorème 4.3.1 *(i) si toutes les valeurs propres de M ont leur module < 1, alors le point fixe x_0 est attractif (ou stable).*

(ii) si une valeur propre de M a son module > 1, alors le point fixe x_0 est répulsif (ou instable).

(iii) si M n'a pas de valeurs propres avec module > 1 mais au moins une des valeurs propres a un module $= 1$, alors x_0 est un point indifférent (stable ou instable).

Exemple 4.3.1 Considérons le système suivant [138]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + \mu x - \mu x\sqrt{x^2+y^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= x + \mu y - \mu y\sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

En passant aux coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, le système devient:

$$\frac{dr}{dt} = \mu r(1-r), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1. \tag{4.34}$$

Par un calcul élémentaire, on obtient la solution:

$$\phi_t(r_0,\theta_0) = \left(\frac{r_0}{r_0 - (r_0-1)e^{-\mu t}}, t + \theta_0\right).$$

Le cercle $r = 1$ est un cycle limite de période 2π (Cf. figure 4.7). Comme section de Poincaré, nous prenons la demi-droite Δ d'équation $y = 0$, $x > 0$ (ou $\theta = 0$). L'application de Poincaré $P : \Delta \to \Delta$ est définie par:

$$P(x) = \frac{x}{x - (x-1)e^{-2\pi\mu}}. \tag{4.35}$$

La linéarisation de P au point $x_0 = 1$ est:

$$DP(1) = \left.\frac{dP}{dx}\right|_{x=1} = e^{-2\pi\mu} \begin{cases} < 1 & \text{pour } \mu > 0, \\ > 1 & \text{pour } \mu < 0, \\ = 1 & \text{pour } \mu = 0. \end{cases} \tag{4.36}$$

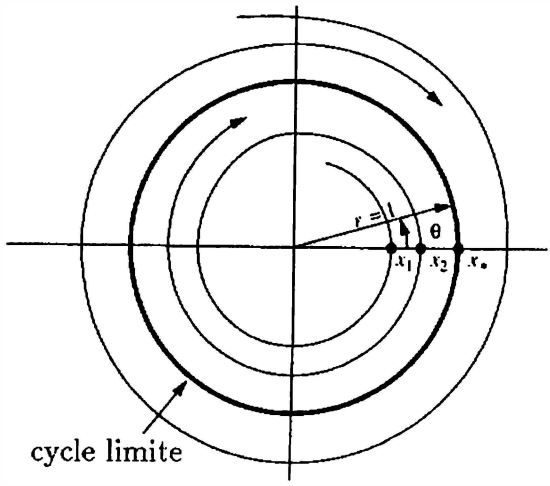


FIG. 4.7 – *Stabilité du cycle limite. D'après [138].*

On en déduit :

- si $\mu > 0$, le point fixe x_0 est stable (donc la solution périodique est aussi stable),
- si $\mu < 0$, le point fixe x_0 est instable (donc la solution périodique est aussi instable),
- si $\mu = 0$, le point fixe x_0 est stable (la solution de (4.34) est un cercle).

Exemple 4.3.2 Considérons l'équation de van der Pol [72] :

$$\ddot{x} - (2\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{4.37}$$

ou sous forme de système :

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + (2\epsilon - x^2)y. \tag{4.38}$$

(4.38) s'écrit en coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$, $y = -r\sin\theta$:

$$\dot{r} = 2\epsilon \sin^2\theta - r^3\cos^2\theta\sin^2\theta, \quad \dot{\theta} = 1 + 2\epsilon\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^3\theta\sin\theta.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{2\epsilon\sin^2\theta - r^3\cos^2\theta\sin^2\theta}{1 + 2\epsilon\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^3\theta\sin\theta} \\ &= [\epsilon(1 - \cos 2\theta) + O(\epsilon^2)]r \\ &\quad -\frac{1}{8}[(1 - \cos 4\theta + O(\epsilon)]r^3 + O(r^4) \end{aligned} \tag{4.39}$$

où l'on a fait un développement de Taylor en supposant que r et ϵ sont petits et en utilisant la formule $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + O(z^4)$ pour $|z| < 1$.

Pour trouver l'application de Poincaré de (4.39), on va rendre (4.39) indépendant de θ jusqu'au terme cubique. Pour le terme linéaire, on fait le changement de variables :

$$r = \rho e^{-(\epsilon/2)\sin(2\theta)}.$$

(4.39) devient alors :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \epsilon\rho - \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta)\rho^3 + \cdots \tag{4.40}$$

où le terme linéaire est maintenant indépendant de θ. Pour le terme cubique, on fait le remplacement :

$$\rho \to \rho + a(\theta)\rho^3$$

où $a(\theta)$ est défini de façon à rendre le terme cubique indépendant de θ, d'où :

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{1}{8}\cos 4\theta.$$

On obtient :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \epsilon\rho - \frac{1}{8}\rho^3 + \cdots. \tag{4.41}$$

L'application de Poincaré de (4.41) est alors :

$$P(\rho) = \rho + \epsilon\rho - \frac{1}{8}\rho^3 + \cdots. \tag{4.42}$$

Les points fixes de (4.42) sont donnés par l'équation $\epsilon\rho - \frac{1}{8}\rho^3 = 0$. D'où :

$$\rho = 0 \text{ et } \rho = \sqrt{8\epsilon} \text{ si } \epsilon > 0. \tag{4.43}$$

On déduit de (4.42) :

$$\frac{dP}{d\rho} = 1 + \epsilon - \frac{3}{8}\rho^2 + \cdots.$$

D'où :

$$\left.\frac{dP}{d\rho}\right|_{\rho=0} = 1 + \epsilon \begin{cases} < 1 & \text{si } \epsilon < 0 \ (O \text{ est stable}), \\ > 1 & \text{si } \epsilon > 0 \ (O \text{ est instable}), \end{cases}$$

$$\left.\frac{dP}{d\rho}\right|_{\rho=\sqrt{8\epsilon}} = 1 - 2\epsilon \text{ stable pour } \epsilon > 0 \ ).$$

Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure 4.8.

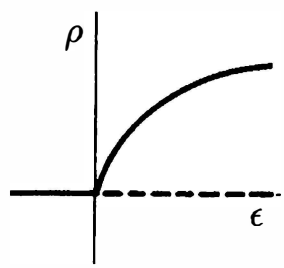


FIG. 4.8 – *Diagramme de bifurcation de l'équation de van der Pol.*

4.3.2 La méthode de Hénon

Sauf dans des cas exceptionnels, comme l'exemple 4.3.1, le calcul analytique de l'application de premier retour est souvent impossible et on a recours dans ce cas aux méthodes numériques. Nous présentons ici la méthode de Hénon (*the Hénon trick* en anglais) :

Premier cas: Considérons d'abord le cas simple où l'application de Poincaré est définie par :

$$P(x_0) = x(x_0, t_0; t_0 + T),$$

$x(x_0, t_0; t)$ désigne la solution de (4.32) qui passe par le point x_0 au temps $t = t_0$. Les points x_0, $P(x_0)$, $P^2(x_0)\ldots$ correspondent aux intersections de la trajectoire $x(x_0, t_0; t)$ avec les plans $t = t_0, t_0+T, t_0+2T, \ldots$ respectivement (Cf. figure 4.9). Ces

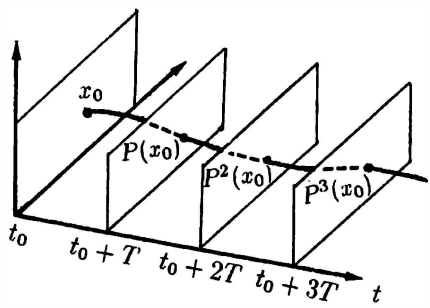


FIG. 4.9 – *Images stroboscopiques.*

points forment une séquence d'images stroboscopiques de la solution à intervalles de temps réguliers $\Delta t = T$ [69]. Dans ce cas, il suffit de choisir le pas de temps d'intégration $h = T/N_0$ pour un certain entier N_0 et on retombe sur la section de Poincaré à tous les intervalles de temps $N_0 h$.

Remarque 4.3.1 Il faut se placer au-dela d'éventuels régimes transitoires car une trajectoire arbitraire pourrait rencontrer un nombre fini de fois la section de Poincaré durant le transitoire et conduire à une mauvaise interprétation.

Exemple 4.3.3 (Un attracteur étrange japonais) *[160]*

Considérons l'équation de Duffing :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + x^3 = B\cos t \tag{4.44}$$

ou sous forme de système :

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -ky - x^3 + B\cos t. \tag{4.45}$$

Le programme 4.3 dessine, dans le plan (x, y), une séquence d'images stroboscopiques de la solution à intervalles de temps réguliers $t = 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ avec $k = 0.05$, $B = 7.5$ (Cf. figure 4.10).

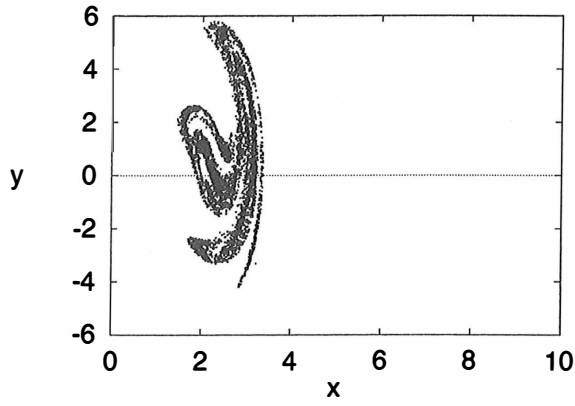


FIG. 4.10 – *L'attracteur étrange de Y. Ueda.*

Deuxième cas: Si la section de Poincaré Σ est définie par l'équation:

$$x_i - a = 0 \tag{4.46}$$

pour un certain i. Par une permutation de coordonnées, on peut ramener (4.46) à la forme:

$$x_n - a = 0 \tag{4.47}$$

et prendre x_n comme variable indépendante de telle sorte que (4.31) devienne:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_n} &= \frac{f_1}{f_n}, \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} &= \frac{f_{n-1}}{f_n}, \\ \frac{dt}{dx_n} &= \frac{1}{f_n}, \end{aligned} \tag{4.48}$$

t devient une variable dépendante et x_n une variable indépendante. L'algorithme est alors le suivant: on intègre le système (4.31) jusqu'au moment où la quantité $S = x_n - a$ change de signe; on prend alors ce dernier point (resp. le point précédent) comme point initial et on intègre (4.48) pour *un seul pas* en prenant comme pas d'intégration $\Delta x_n = -S$ (resp. $\Delta x_n = S$). Ce qui nous amène exactement à la section de Poincaré!

Exemple 4.3.4 Considérons le modèle de Hénon-Heiles [81] :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x, \\
\dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y, \\
\dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - 2xy, \\
\dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -y - x^2 + y^2,
\end{aligned}$$

avec

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3.$$

L'espace des phases est à quatre dimensions, mais la trajectoire évolue sur une

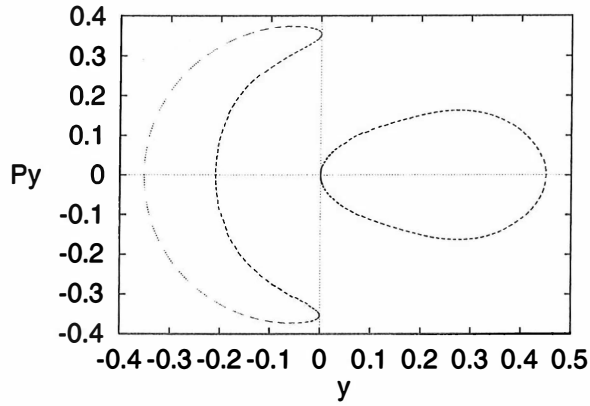


FIG. 4.11 – *Une section de Poincaré du modèle de Hénon-Heiles.*

hypersurface $H = E =$ Cte à trois dimensions de l'espace des phases. Le programme Pascal 4.4 calcule la section de Poincaré (y, p_y) correspondant à $x = 0$, $E = 1/12$ et les conditions initiales sont $p_y = 0$, $y = 0$, $p_x = 0.3$, $x = (2E - p_x^2)^{1/2}$. Le résultat est donné sur la figure 4.11. Les deux courbes fermées représentent l'intersection de la surface du tore à deux dimensions avec le plan de Poincaré.

Remarque 4.3.2 On serait tenté d'abandonner le système (4.31) et d'utiliser le système équivalent (4.48) uniquement. En fait cela ne se peut car le système (4.48) est singulier pour les zéros de f_n et il existe au moins un tel zéro entre deux points d'intersections.

Troisième cas : Si la section de Poincaré Σ est définie par l'équation :

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

on introduit une variable additionnelle :

$$x_{n+1} = S(x_1, \ldots, x_n) \tag{4.49}$$

et une équation additionnelle à (4.31) :

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n),$$

avec :

$$f_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial S}{\partial x_i}.$$

On est ainsi ramené au cas 2 avec la section de Poincaré définie par :

$$x_{n+1} = 0.$$

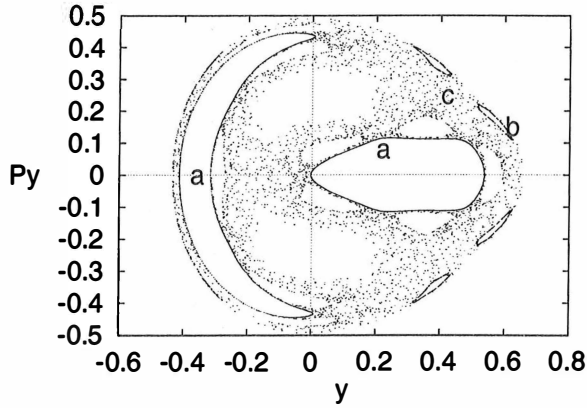


FIG. 4.12 – *Sections de Poincaré du modèle Hénon-Heiles dans le plan* (y, p_y) *à* $E = 1/8$. *Conditions initiales :* $y = p_y = 0$ *et a)* $p_x = 0.45$, *b)* $p_x = 0.4$, *c)* $p_x = 0.3$, $x = (2E - p_x^2)^{1/2}$.

4.4 Introduction à la théorie KAM

Dans le calcul des sections de Poincaré du modèle de Hénon-Heiles, on constate que lorsqu'on augmente l'énergie, le tore est détruit et l'on voit apparaître une structure d'archipels (Cf. figure 4.12). La figure montre également la coexistence de mouvements apériodiques (tores) et chaotiques. Ceci est expliqué par la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser).

4.4.1 Tore KAM et points de Poincaré-Birkhoff

Considérons un hamiltonien à deux degrés de liberté[1], intégrable, indépendant du temps. En variables d'action et angulaires il s'écrit :

$$H(J_1, J_2) = E = \text{ const.} \tag{4.50}$$

1. Nous nous limitons seulement au cas des hamiltoniens à deux degrés de liberté

Les solutions des équations hamiltoniennes sont (voir (1.99)) :

$$\theta_i = \omega_i(J_1, J_2)t + \theta_i(0), \quad J_i = \text{ const.}, \quad i = 1, 2. \tag{4.51}$$

On en déduit que les trajectoires sont sur un tore T^2, périodiques, de période q si $\alpha(J_1, J_2) = \omega_1(J_i)/\omega_2(J_i) = p/q$ et denses sur T^2 si $\alpha(J_1, J_2)$ est irrationnel (Cf. fig. 1.21). $\alpha(J_1, J_2)$ est appelé nombre de rotation. La relation (4.50) permet de calculer J_2 en fonction de J_1: $J_2 = J_2(J_1, E)$.

Coupons les trajectoires (4.51) par la section de Poincaré $\theta_2 = 0$ (Cf. fig. 4.13). Les deux sections de Poincaré successives sont séparées par un intervalle de temps $\Delta t = 2\pi/\omega_2$. Pendant ce laps de temps, θ_1 est augmenté de $\Delta\theta_1 = \omega_1 \Delta t = 2\pi\alpha(J_1)$. Posons, pour simplfier la notation, $J_1 = J$, $\theta_1 = \theta$ et supposons, avec Moser, que l'application de Poincaré soit de la forme (appelée *twist map*) :

$$P_0 : \quad J_{n+1} = J_n, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}), \quad \alpha'(J) \neq 0. \tag{4.52}$$

L'application (4.52) conserve les aires car

$$\frac{\partial(J_{n+1}, \theta_{n+1})}{\partial(J_n, \theta_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi\alpha'(J_n) & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{4.53}$$

Supposons que le hamiltonien intégrable $H(J)$ subisse une petite perturbation

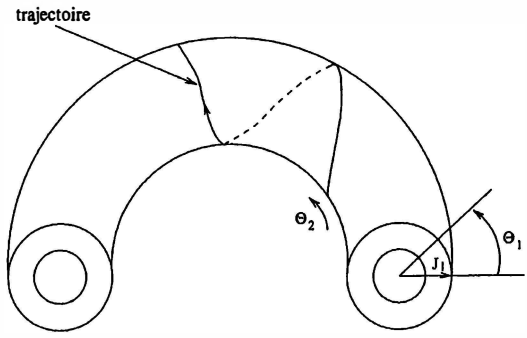


FIG. 4.13 – *Le tore T^2 du système intégrable.*

dépendante de J et de θ et que le nouvel hamiltonien soit de la forme :

$$H(\theta, J) = H(J) + \epsilon H_1(\theta, J) \tag{4.54}$$

avec ϵ petit. L'application (4.52) perturbée sera alors :

$$P_\epsilon : \quad J_{n+1} = J_n + \epsilon f(J_{n+1}, \theta_n), \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + \epsilon g(J_{n+1}, \theta_n) \tag{4.55}$$

où les fonctions $f(J, \theta)$ et $g(J, \theta)$ sont supposées *périodiques* en θ, de période 2π. L'application (4.55) doit aussi conserver les aires, c'est-à-dire :

$$|\partial(J_{n+1}, \theta_{n+1})/\partial(J_n, \theta_n)| = 1.$$

En première approximation, $f(J, \theta)$, $g(J, \theta)$ doivent donc satisfaire la condition suivante

$$\frac{\partial f}{\partial J} + \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0. \tag{4.56}$$

Nombre de rotation irrationnel: tore KAM

Pour simplifier, nous supposons que $f(J,\theta) = f(\theta)$, $g(J,\theta) = 0$ et la condition (4.56) est automatiquement satisfaite. Dans ce cas (4.55) s'écrit:

$$J_{n+1} = J_n + \epsilon f(\theta_n), \quad \theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}). \tag{4.57}$$

(La généralisation au cas $f = f(J,\theta)\, g \neq 0$ ne présente pas de difficulté particulière).

Cherchons maintenant dans quelles conditions l'application (4.57) admet une courbe *invariante*:

$$J = J(\theta). \tag{4.58}$$

Dans ce cas, la trajectoire perturbée évoluera sur un tore déformé, appelé *tore KAM*. L'application induite par (4.57) sur la courbe invariante (4.58) (appelée aussi courbe KAM) s'écrit:

$$J(\theta + 2\pi\alpha) = J(\theta) + \epsilon f(\theta). \tag{4.59}$$

Nous essaierons de résoudre (4.59) par le développement de Fourier:

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta}, \quad J(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k e^{ik\theta}. \tag{4.60}$$

L'équation (4.59) s'écrit alors:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} b_k e^{ik(\theta+2\pi\alpha)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_k e^{ik\theta} + \epsilon \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\theta}. \tag{4.61}$$

On en déduit, en égalisant les coefficients de $e^{ik\theta}$:

$$b_k = \frac{\epsilon a_k}{e^{i2\pi k\alpha} - 1}, \quad k \neq 0 \tag{4.62}$$

et la courbe invariante (4.58) est donnée par:

$$J(\theta) = b_0 + \sum_{k\neq 0} \frac{\epsilon a_k e^{ik\theta}}{e^{i2\pi k\alpha} - 1}. \tag{4.63}$$

Cherchons maintenant la condition pour que la série de Fourier(4.63) soit uniformément convergente (Problème des petits dénominateurs).

Nous rappelons que la fonction $f(\theta)$ est de période 2π. Supposons qu'elle soit de classe C^N, avec $|d^N f/d\theta^N| \leq M$. Alors, d'après un théorème de Weierstrass, on a :

$$|a_k| \leq \frac{M}{|k|^N}. \tag{4.64}$$

Evidemment la somme (4.63) n'a de sens que si $\alpha(J)$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $c > 0$ et $m \geq 2$ telles que:

$$\left|\alpha - \frac{l}{k}\right| \geq \frac{c}{k^m} \quad \text{ou} \quad |k\alpha - l| \geq \frac{c}{k^{m-1}} \tag{4.65}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}^+$ et $l \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

$$|e^{i2\pi k\alpha} - 1| = 2|\sin \pi k\alpha| = 2|\sin \pi(k\alpha - l)| \geq 4|k\alpha - l| \geq \frac{4c}{k^{m-1}}. \tag{4.66}$$

Dans l'avant dernière inégalité, on a utilisé la relation élémentaire suivante : $\sin x \geq 2x/\pi$ pour $0 \leq x \leq \pi/2$ (la courbe $y = \sin x$ est au-dessus de la droite $y = 2x/\pi$ si $0 \leq x \leq \pi/2$). On déduit de (4.62), (4.64) et (4.66) que :

$$|b_k| \leq \frac{M\epsilon}{4c|k|^{N-m+1}} \text{ pour } k \neq 0. \tag{4.67}$$

Par conséquent, la série (4.63) converge uniformément et absolument si $N - m > 0$. Comme $m \geq 2$, il faut donc que $N > 2$ pour que la courbe KAM existe.

Lorsque la condition (4.65) n'est plus satisfaite, le tore se dissout. Le dernier tore à être détruit est celui correspondant à :

$$\alpha = \omega_1(J)/\omega_2(J) = (\sqrt{5} - 1)/2$$

car c'est l'irrationnel le moins bien approché par un rationnel.

Remarque 4.4.1 Liouville a montré que si α est un nombre algébrique, c'est-à-dire s'il est solution de l'équation :

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_m$ sont des entiers relatifs[1], il existe un nombre c tel que :

$$\left|\alpha - \frac{l}{k}\right| > \frac{c}{k^m}, \quad \forall l, k \in \mathbb{Z}.$$

Donc la condition (4.65) sera satisfaite et le tore T^2 survit.

Nombre de rotation rationnel : points de Poincaré-Birkhoff

Examinons maintenant le cas de résonance $p : q$, c'est-à-dire le cas $\alpha(J) = p/q$, où p et q sont des entiers premiers entre eux. Dans ce cas, pour l'application P_0 non-perturbée de (4.52), tout point du cercle $\alpha(J) = p/q$ est un point fixe de P_0^q. Supposons, pour fixer les idées, que $\alpha(J)$ soit une fonction croissante et considérons 2 cercles C_1, C_2 avec nombres de rotation irrationnels α_1, α_2 tels que $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ (Cf. figure 4.14). Sous l'action de P_0^q, tout point situé sur C_2 fait un angle plus grand que 2π et tout point situé sur C_1 fait un angle plus petit que 2π. Si ϵ est suffisamment petit, cette propriété persiste pour l'application P_ϵ^q de (4.55). Les courbes C_1, C_2 sont alors légèrement déformées et deviennent des courbes KAM (non représentées sur la figure 4.14). Entre ces 2 courbes KAM, il existe donc une courbe Γ, qui n'est pas une courbe KAM, telle que, sous l'action de P_ϵ^q, tout point de Γ fait un angle 2π et se déplace donc radialement (le déplacement radial est représenté sur

1. Par exemple $(\sqrt{5}-1)/2$ et $\sqrt{2}$ sont des nombres algébriques car ils sont solutions des équations $x^2 + x - 1 = 0$ et $x^2 - 2 = 0$ respectivement.

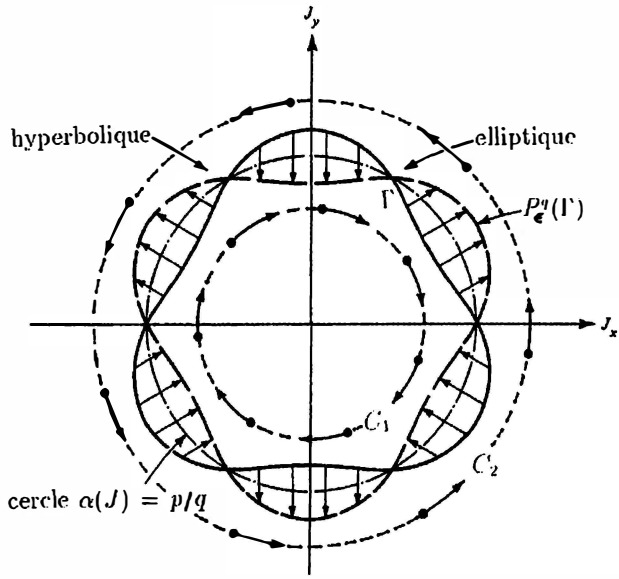


FIG. 4.14 – *Points de Poincaré-Birkhoff avec* $q = 3$, $k = 1$. *D'après [108].*

la figure 4.14 par des petites flèches)). Comme P_ϵ^q conserve les aires, les courbes Γ et $P_\epsilon^q(\Gamma)$ entourent des aires égales. Ceci n'est possible que si ces deux courbes se coupent en un nombre pair de points. Chaque point d'intersection est un point fixe de P_ϵ^q. Poincaré [135] a montré qu'il existe $2kq$ de ces points fixes, appelés *points de Poincaré-Birkhoff*. A ces points fixes, les valeurs propres de la matrice jacobienne DP_ϵ^q doivent satisfaire la relation :

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det |DP_\epsilon^q| = 1.$$

On en déduit que les points de Poincaré-Birkhoff sont soit *elliptiques* ($|\lambda_1| = 1$) soit *hyperboliques* ($|\lambda_1| < 1$ ou $|\lambda_1| > 1$). En fait ils sont alternativement elliptiques et hyperboliques [7], [108], comme dans le cas du pendule simple. Lorsque l'énergie augmente k augmente. Pour $k = 1, 2, 4, 8, \ldots$, on obtient une cascade de doublements de périodes. Sur la section de Poincaré on voit apparaître q ellipses, puis $2q$ ellipses, $4q$ ellipses etc. Entre les points elliptiques se trouvent des points hyperboliques. C'est la structure d'archipels. Les constantes de Feigenbaum pour ces bifurcations de doublage sont [83] :

$$\delta_H = 8.721097..., \quad \alpha_H = -4.01807...$$

où l'indice H indique que ces constantes s'appliquent aux systèmes hamiltoniens.

Exemple 4.4.1 (voir aussi l'exercice 4.1). Considérons le hamiltonien [139] :

$$H(J, \theta) = \frac{J^2}{2} - k \cos\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n) \tag{4.68}$$

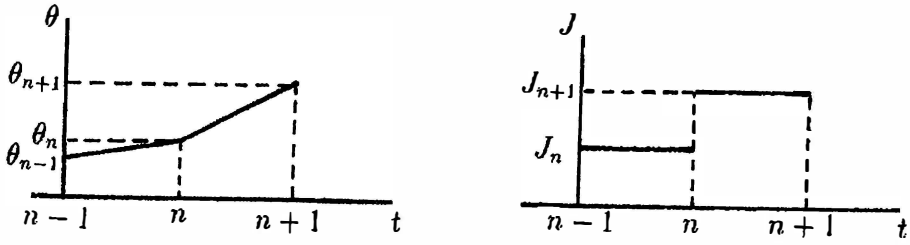


FIG. 4.15 – *Dépendance en temps de θ (à gauche) et J (à droite).*

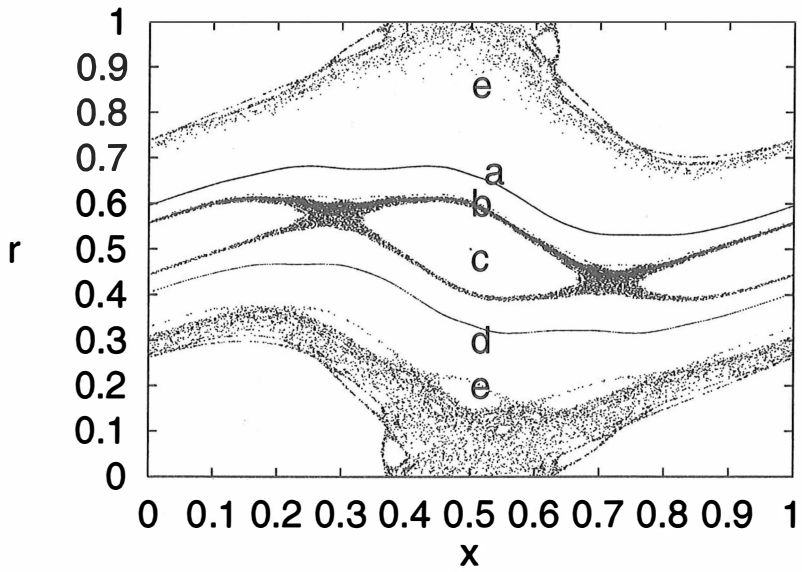


FIG. 4.16 – *L'application de Chirikov par le programme 4.5 avec $k = 0.95$ et 5 orbites types correspondant à 5 conditions initiales : $x_0 = 0$ et a) $r_0 = 0.5953...$, tore KAM, b) $r_0 = 0.554...$, orbite chaotique, c) $r_0 = 0.5$, orbite périodique (2 points minuscules de coordonnées $(0, 0.5)$ et $(0.5, 0.5)$), d) $r_0 = 0.40395...$, tore KAM, e) $r = 0.27...$, orbite chaotique.*

le deuxième terme étant une perturbation du hamiltonien intégrable indépendant du temps $H_0 = J^2/2$. Les équations hamiltoniennes s'écrivent :

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -k \sin\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n), \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial J} = J. \tag{4.69}$$

Les solutions de ce système sont présentées sur la figure 4.15. Pour former une séquence d'images stroboscopiques à intervalles de temps réguliers $t_n = n$, on intègre (4.69) entre n^- et $(n+1)^-$:

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_{n^-}^{(n+1)^-} \dot{J}\, dt \\ &= -\int_{n^-}^{(n+1)^-} k \sin\theta \delta(t-n)\, dt = -k \sin\theta_n \\ \theta_{n+1} - \theta_n & \\ &= \int_{n^-}^{(n+1)^-} \dot{\theta}\, dt = J_{n+1}. \end{aligned}$$

On effectue ensuite le changement de variables :

$$J_n = 2\pi r_n, \quad \theta_n = 2\pi x_n$$

et on obtient l'application :

$$r_{n+1} = r_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_n, \quad x_{n+1} = x_n + r_{n+1} \tag{4.70}$$

appelée *application de Chirikov* (voir l'exemple 3.1.2). Il est facile de vérifier que x et r sont périodiques de période 1. Le domaine $0 \leq r < 1$, $0 \leq x < 1$ peut être considéré comme un tore. Pour $k = 0$, r est une constante et on obtient une orbite périodique si r est rationnel, ergodique si r est irrationnel. La figure 4.16 montre 5 orbites types dans le cas $k \neq 0$. Cette figure est dessinée par le programme 4.5.

Remarque 4.4.2 On peut aussi écrire (4.52) en coordonnées cartésiennes :

$$x_{n+1} = x_n \cos a - y_n \sin a, \quad y_{n+1} = x_n \sin a + y_n \cos a \tag{4.71}$$

avec $a = 2\pi\alpha$. Une perturbation quadratique de (4.71) a été proposée par Hénon [79] :

$$x_1 = x \cos a - (y - x^2) \sin a, \quad y_1 = x \sin a + (y - x^2) \cos a. \tag{4.72}$$

Près de l'origine (point fixe elliptique), la perturbation quadratique reste faible. La figure 4.17 montre un résultat numérique de Hénon pour $a = \frac{2\pi}{5} + \epsilon$ avec $\epsilon = 0.07$, c'est-à-dire $\cos a = 0.24$. On reconnaît sur la figure les points de Poincaré-Birkhoff (les cinq points elliptiques et les cinq points hyperboliques) et des courbes KAM entourant l'origine (voir aussi l'exercice 3.4).

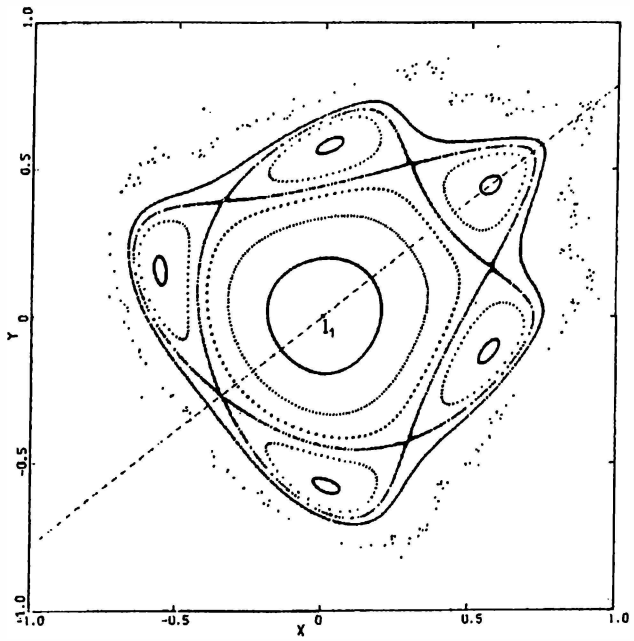


FIG. 4.17 – *Quelques orbites à* $a = \frac{2\pi}{5} + 0.07$ *ou* $\cos a = 0.24$. *D'après [79].*

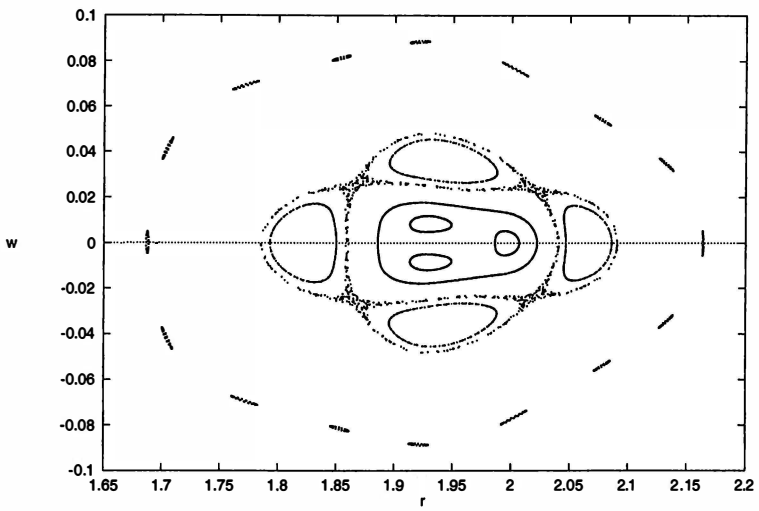


FIG. 4.18 – *Section de Poincaré* $v = 0$, $v' < 0$ *à* $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\theta_1 = \theta_1^* + \epsilon$, $\theta_2 = \theta_2^* + \epsilon$ *avec* $\epsilon = 0.02$.

Remarque 4.4.3 On trouve aussi les tores KAM et les points de Poincaré-Birkhoff dans des problèmes non-hamiltoniens. H. Dang-Vu et C. Delcarte [41] ont étudié le système suivant :

$$\begin{aligned} r' &= 2rv, \\ v' &= w^2 - v^2 + \rho_1 \cos\theta_1 - r\rho_2 \cos\theta_2, \\ w' &= -2vw + \rho_1 \sin\theta_1 - r\rho_2 \sin\theta_2. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Ce système provient d'une équation de Ginzburg-Landau. La figure 4.18 présente quelques résultats numériques au voisinage de $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\theta_1 = \theta_1^* = \pi/8$, $\theta_2 = \theta_2^* = 0.295479....$ On voit, sur la figure, les quatre points elliptiques et les quatre points hyperboliques entourant une courbe KAM.

4.4.2 La diffusion d'Arnold

Dans le cas des systèmes hamiltoniens à deux degrés de liberté indépendant du temps (comme le système Hénon-Heiles), la trajectoire évolue sur une hypersurface $H = E = \text{Cte}$, à trois dimension (appelée *variété d'énergie*) et les surfaces KAM sont des tores à deux dimensions. Ces tores séparent l'hypersurface en deux régions distinctes. Il n'y a pas de communication entre l'intérieur et l'extérieur du tore, sauf quand le tore est détruit, c'est-à-dire lorsqu'il est devenu un cantor.

Dans le cas d'un système hamiltonien à n ($n > 2$) degrés de liberté, la variété d'énergie est à $2n-1$ dimensions. Les tores KAM sont à n dimensions et ne séparent plus la variété d'énergie en deux régions distinctes. Les différentes régions chaotiques de la variété d'énergie peuvent communiquer malgré la présence des tores KAM. Ce phénomène s'appelle la diffusion d'Arnold [6], [7].

Exemple 4.4.2 G. Contopoulos [33] a trouvé la diffusion d'Arnold dans le hamiltonien à trois degrés de liberté suivant :

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2) - \epsilon x z^2 - \eta y z^2 = h. \tag{4.74}$$

Ce hamiltonien représente une galaxie elliptique déformée. (Le terme quadratique représente la galaxie elliptique, ϵ et η sont des paramètres de déformation). Les équations hamiltoniennes pour ce système sont :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y, \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -Ax + \epsilon z^2, \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -By + \eta z^2, \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -Cz + 2z(\epsilon x + \eta y). \end{aligned}$$

La figure 4.19 représente la section de Poincaré dans le plan (x, p_x). La figure 4.19a contient 14 000 points d'itération, alors que la figure 4.19b contient 50 000 points d'itération. En fait à partir de 13 700 points on commence à avoir la diffusion d'Arnold

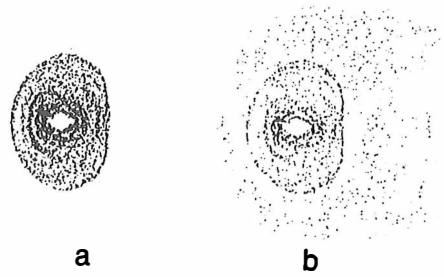


FIG. 4.19 – *La diffusion d'Arnold. D'après [33].*

4.5 Dimensions fractales

Un attacteur étrange (Cf. Chapitre 1) est caractérisé, entre autres, par sa dimension fractale. Nous allons, dans cette section, expliquer ce qu'est une dimension fractale. Nous définirons dans la section suivante les exposants de Lyapunov, nous expliquerons leur mode de calcul et exposerons la conjecture de Kaplan-Yorke qui relie la dimension fractale aux exposants de Lyapunov.

Selon Benoît Mandelbrot [113], un ensemble A est fractal si sa dimension de Hausdorff n'est pas entière. Il existe aussi d'autres dimensions non entières ou fractales comme la dimension de Kolmogorov ou de capacité (voir ci-dessous), la dimension de corrélation (ou de Grassberger et Procaccia [66]), la dimension de Lyapunov (voir la formule (4.103)) etc. Toutes ces dimensions sont très proches l'une de l'autre et satisfont les propriétés suivantes :

1) si $A \subset B$, alors $d(A) \leq d(B)$,
2) si $A = \emptyset$ (vide), alors $d(A) = 0$,
3)

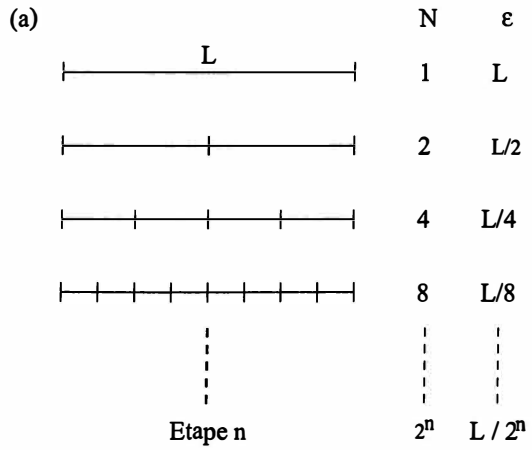
$$d(A \times B) = d(A) + d(B), \tag{4.75}$$

4) si f est une application différentiable sur A, alors $d(f(A)) = d(A)$.

4.5.1 Dimension de Kolmogorov ou de capacité

Considérons un segment de longueur L (Cf. figure 4.20a). Ce segment peut être "recouvert" par 2 segments de longueur $L/2$ ou par 4 segments de longueur $L/4$ ou plus généralement par [9] :

$$N(\epsilon) = \frac{L}{\epsilon}$$



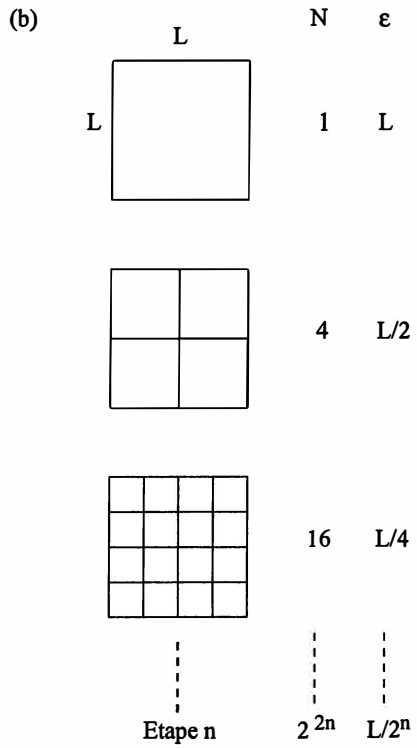


FIG. 4.20 – *Recouvrement d'un segment de longueur L (a) et d'un carré de côté L (b). D'après [9].*

petits segments de longueur ϵ. De même, un carré de côté L (Cf. figure 4.20b) peut être recouvert par :

$$N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^2$$

petits carrés de côté ϵ.

Dans le cas général on a :

$$N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^d. \tag{4.76}$$

D'où en prenant le logarithme des deux membres, on obtient :

$$d = \frac{\log N(\epsilon)}{\log L - \log \epsilon}. \tag{4.77}$$

A la limite lorsque $\epsilon \to 0$, le terme $\log L$ devient négligeable devant $-\log \epsilon$. La *dimension de Kolmogorov* ou *de capacité* sera définie par :

$$d_c = -\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}. \tag{4.78}$$

Exemple 4.5.1 L'ensemble (triadique) de Cantor est obtenu en enlevant au segment unité son tiers central, puis on répète cette opération sur les deux segments restants et on réitère indéfiniment ce processus (voir figure 4.21). L'ensemble K des points restants s'appelle l'*ensemble (triadique) de Cantor*. Pour définir K on définit d'abord une séquence de sous-ensembles K_n :

$$\begin{aligned} K_0 &= [0,1], K_1 = [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1], K_2 = [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1], \ldots \\ K_n &= [0,(1/3)^n] \cup [2(1/3)^n,(1/3)^{n-1}] \cup \cdots \cup [1-(1/3)^n,1], \ldots \end{aligned}$$

K_n est la réunion de 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} avec

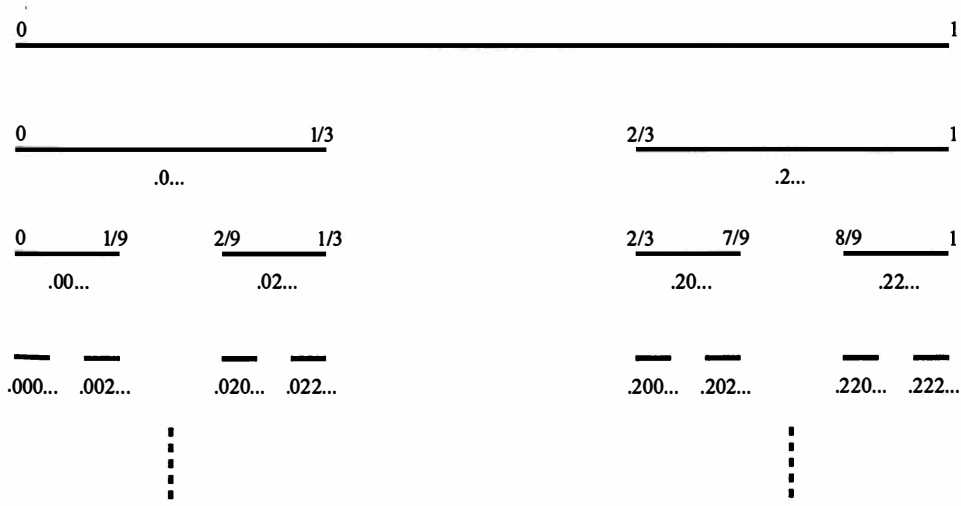


FIG. 4.21 – *Construction de l'ensemble de Cantor. D'après [92].*

$$\ldots \subset K_{n+1} \subset K_n \subset \ldots K_2 \subset K_1 \subset K_0 = [0,1].$$

Chaque ensemble K_n est obtenu en appliquant les fonctions w_i, $i = 1, 2$ définies par :

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \tag{4.79}$$

sur l'ensemble K_{n-1} :

$$K_n = \bigcup_{i=1}^{2} w_i(K_{n-1}).$$

L'ensemble de Cantor est :

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n.$$

On peut aussi définir K comme l'ensemble des nombres qui peuvent être écrits dans la base 3 sous la forme :

$$0.x_1x_2x_3\ldots = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \cdots.$$

Par exemple un point $x \in [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ s'écrira sous la forme $0.02x_3x_4\ldots$ (Cf. fig. 4.21).

La longueur L de l'ensemble de Cantor est nulle car

$$\begin{aligned} L &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{1-2/3} = 0. \end{aligned}$$

La dimension de capacité de l'ensemble de Cantor est obtenue en appliquant la formule (4.78). On a :

n	$N(\epsilon)$	ϵ
0	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$
2	2^2	$\frac{1}{3^2}$
3	2^3	$\frac{1}{3^3}$
n	2^n	$\frac{1}{3^n}$

D'où

$$\begin{aligned} d_c &= -\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309 < 1. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Exemple 4.5.2 Le triangle de Sierpinski.

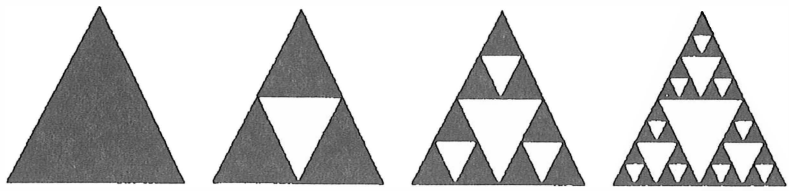


FIG. 4.22 – *Le triangle de Sierpinski dessiné par le programme 4.6.*

Soit Δ_0 un triangle ayant pour sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0.5,1)$. On partage Δ_0 en 4 triangles égaux et on enlève le triangle central. On obtient ainsi un ensemble Δ_1 de 3 triangles (Cf. figure 4.22). Puis on répète cette opération sur chacun des triangles de Δ_1 et on obtient un ensemble Δ_2 de 3^2 triangles etc. Chaque ensemble Δ_n est obtenu en appliquant les similitudes w_i, $i = 1,2,3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définies par :

$$\begin{aligned} w_1(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), \\ w_2(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right), \\ w_3(x,y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \tag{4.81}$$

sur l'ensemble Δ_{n-1} et en définissant ensuite :

$$\Delta_n = \bigcup_{i=1}^{3} w_i(\Delta_{n-1})$$

(voir le programme 4.6). Le triangle de Sierpinski est :

$$\Delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Delta_n.$$

Sa dimension de capacité est donnée par la formule (4.78). On a le tableau suivant :

n	$N(\epsilon)$	ϵ
0	1	1
1	3	$\frac{1}{2}$
2	3^2	$\frac{1}{2^2}$
n	3^n	$\frac{1}{2^n}$

D'où

$$d_c = -\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3^n)}{\log(1/2^n)} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.5849.$$

4.5.2 Système de fonctions itérées

Un *système de fonctions itérées* (en anglais : *iterated functions system* ou IFS), est un système de transformations contractantes, définies sur un espace métrique. Nous nous limitons ici aux transformations affines du plan euclidien :

$$w_i(x) = A_i x + B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad x, B_i \in \mathbb{R}^2. \tag{4.82}$$

N est le nombre de transformations du système, les B_i sont des vecteurs de translation, les A_i sont des matrices 2×2 possédant des valeurs propres s_i avec $|s_i| < 1$ (appelées *facteurs de contraction*). L'ensemble invariant :

$$K = \bigcup_{i=1}^{2} w_i(K)$$

est appelé *l'attracteur* du système.

Exemple 4.5.3 Le système (4.81) est un système de fonctions itérées avec facteur de contraction $s_i = 1/2$. On peut écrire (4.81) sous la forme :

$$w_i(x, y) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.83}$$

où les $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ sont donnés par le tableau suivant.

Tableau 4.1 : Code IFS du triangle de Sierpinski

w	a	b	c	d	e	f
1	0.5	0	0	0.5	0	0
2	0.5	0	0	0.5	0.5	0
3	0.5	0	0	0.5	0.25	0.5

L'ensemble de Sierpinski Δ :

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{3} w_i(\Delta)$$

est l'*attracteur* de (4.83). La figure 4.22 a été dessinée par le programme 4.6, d'après l'algorithme de Barnsley [10].

Nous donnons ci-dessous quelques autres exemples de systèmes de fonctions itérées (Noter que le système (3.84) est aussi un système de fonctions itérées dont l'attracteur est l'ensemble de Julia).

a) Système de fonctions itérées de la courbe de Peano

Le terme "Courbe de Peano" s'applique génériquement à toute une famille de courbes remplissant l'espace (*space filling curves*, en anglais). L'exemple suivant est donné par Barnsley [10] .

On considère le système de fonctions itérées : $\omega_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$w_i(x,y) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3,4$$

où les $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ sont donnés par le tableau suivant.

Tableau 4.2 : Code IFS de la courbe de Peano

w	a	b	c	d	e	f
1	0	0.5	0.5	0	0	0
2	0.5	0	0	0.5	0	0.5
3	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5
4	0	−0.5	−0.5	0	1	0.5

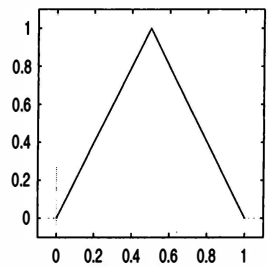


FIG. 4.23 – *L'ensemble* A_0.

Les w_i ont été choisis de façon que :

$$w_i(x_0,y_0) = (x_{i-1}, y_{i-1}), \quad w_i(x_4,y_4) = (x_i,y_i), \quad i = 1,2,3,4$$

où l'on a posé $(x_0,y_0) = (0,0)$, $(x_1,y_1) = (0,0.5)$, $(x_2,y_2) = (0.5,0.5)$, $(x_3,y_3) = (1,0.5)$, $(x_4,y_4) = (1,0)$.

Soit A_0 une courbe joingnant les points $(0,0)$, $(0.5,1)$ et $(1,0)$ (voir figure 4.23). Le programme 4.6 dessine les courbes :

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{4} w_i(A_{n-1}). \quad n = 1,2,3,4,5.$$

Le résultat est présenté sur la figure 4.24. On voit que lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, la courbe remplit tout le carré. Cela suggère que la dimension

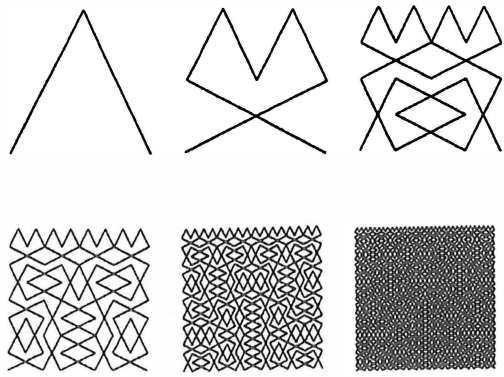


FIG. 4.24 – *Courbe de Peano : les ensembles A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 (dessinés par le programme 4.6).*

de la courbe de Peano est 2. On peut le montrer en utilisant la formule (4.78). En effet, les w_i sont des applications contractantes, avec facteur de contraction $s = 1/2$. Soit L la longueur de la courbe A_0. Alors la courbe $A_1 = \cup_{i=1}^{4} w_i(A_0)$ est composée de 4 éléments similaires à A_0, de longueur $L/2$ (Cf. figure 4.24). La courbe $A_n = \cup_{i=1}^{4} w_i(A_{n-1})$ est composée de 4^n éléments similaires à A_0, de longueur $L/2^n$. D'où la dimension de l'attracteur du système des w_i :

$$d = -\lim_{n\to\infty} \frac{\log 4^n}{\log(L/2^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 4}{n \log 2 - \log L} = 2.$$

Noter que la courbe possède une infinité de points doubles.

b) Système de fonctions itérées de la courbe de Hilbert

Un an après l'article de Peano [130], David Hilbert présenta [82] une courbe remplissant l'espace qui ne se touche jamais (i. e. sans point double).

Le système de fonctions itérées : $w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de la courbe de Hilbert est :

$$w_i(x, y) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

où les $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ sont donnés par le tableau suivant.

Tableau 4.3 : Code IFS de la courbe de Hilbert

w	a	b	c	d	e	f
1	0	0.5	−0.5	0	0	0.5
2	−0.5	0	0	0.5	0.5	0.5
3	0	−0.5	−0.5	0	1	0.5
4	0.5	0	0	0.5	0.5	0.5

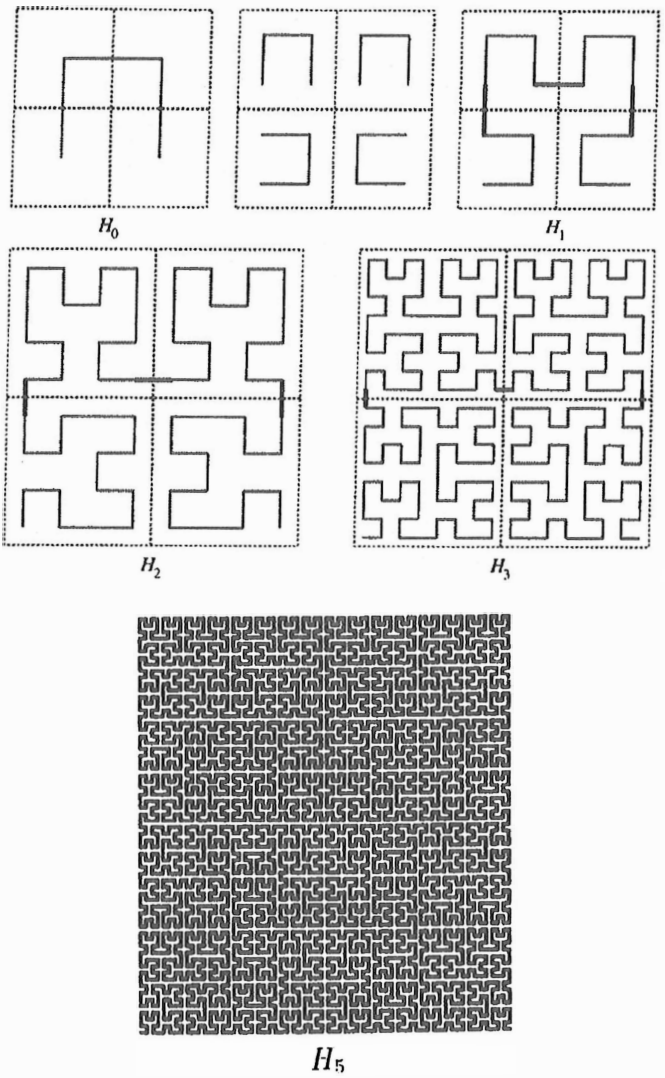


FIG. 4.25 – *Construction de la courbe de Hilbert. D'après [132].*

A l'étape 0, considérons la courbe H_0 (figure 4.25). Les quatre copies de H_0 par les w_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sont présentées sur la figure 4.25. Nous les relions ensembles par trois segments et obtenons la courbe H_1. A l'étape 1, nous appliquons les w_i à H_1 et relions de nouveau les quatre courbes $w_i(H_1)$, $i = 1, 2, 3, 4$ par trois segments et obtenons la courbe H_2 etc. La courbe de Hilbert est de dimension 2, car les w_i ont pour facteur de contraction $s_i = 1/2$, $i = 1, 2, 3, 4$. On en déduit, d'après le théorème 4.5.1 de la section 4.5.3, que l'équation :

$$s_1^d + s_2^d + s_3^d + s_4^d = 1$$

a pour unique solution $d = 2$.

c) Système de fonctions itérées de la courbe dragon

On part à l'étape 1 par une courbe en équerre : $(1,0), (0,0), (0,1)$ (Cf. figure 4.26). A l'étape 2 on reproduit deux copies de cette courbe (réduites d'un facteur $1/\sqrt{2}$) en faisant tourner la courbe, dans le sens des aiguilles d'une montre, autour du point a_1, d'un angle de 45^0 et 135^0 respectivement. Si la procédure est répétée indéfiniment, les centres de rotation étant $a_1, a_2, a_3, \ldots$, on obtient une courbe qui remplit une aire à frontière fractale.

Le tableau suivant permet de calculer la dimension de capacité de la courbe dragon.

n	$N(\epsilon)$	ϵ
1	2^1	1
2	2^2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
3	2^3	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
n	2^n	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

D'où

$$d_c = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(2^n)}{(n-1)\log\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\log 2}{(n-1)\log\sqrt{2}} = 2.$$

Les transformations de la courbe dragon sont présentées sur la figure 4.27. Ce sont des similitudes du plan. Le système de fonctions itérées : $w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de la courbe dragon est donc de la forme :

$$w_i(x,y) = \begin{pmatrix} r_i\cos\phi_i & -r_i\sin\phi_i \\ r_i\sin\phi_i & r_i\cos\phi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

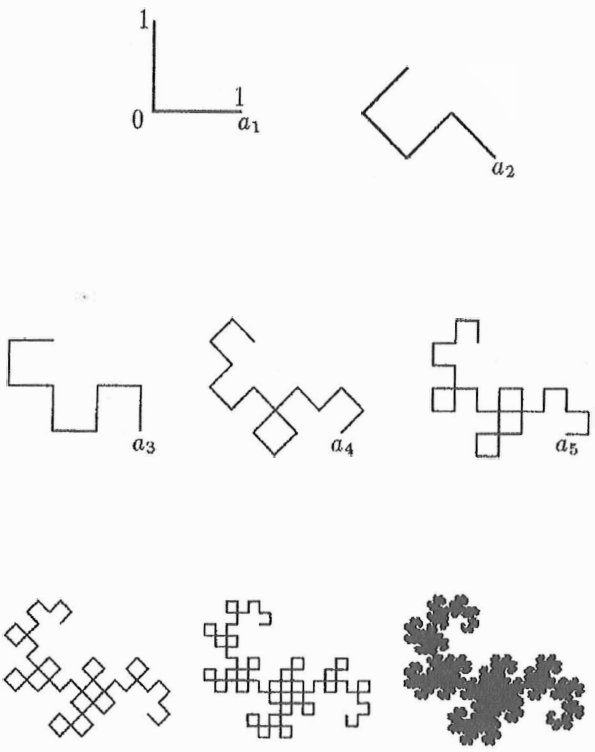


FIG. 4.26 – *Construction de la courbe "dragon". $a_1, a_2, a_3 \ldots$ sont des centres de rotation. D'après [132].*

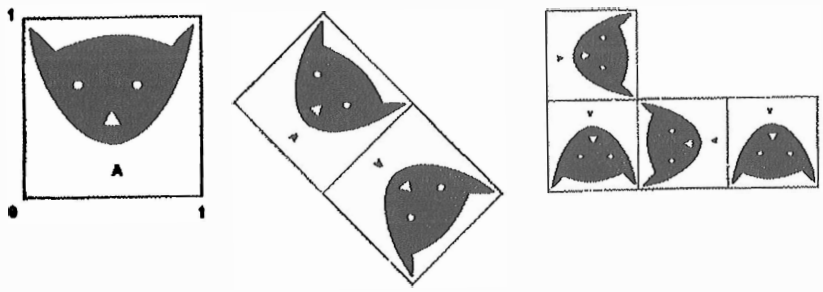


FIG. 4.27 – *Courbe "dragon" : images successives d'un carré, après l'étape 1 et l'étape 2.*

où les r_i, ϕ_i, e_i, f_i sont donnés par le tableau suivant (les angles sont en degrés).

Tableau 4.4 : Code IFS de la courbe dragon

w	r	ϕ	e	f
1	$1/\sqrt{2}$	-45^0	1	0
2	$1/\sqrt{2}$	-134^0	1	0

Noter que lorsque les paramètres r_i, ϕ_i, e_i, f_i changent, on obtient d'autres courbes de type "dragon".

d) Système de fonctions itérées de la fougère de Barnsley

On peut dire que la fougère de Barnsley [10] [132] est une généralisation de la courbe dragon. Le système de fonctions itérées: $w_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de la fougère de Barnsley est de la forme [132] :

$$w_i(x,y) = \begin{pmatrix} r_i \cos\phi_i & -s_i \sin\psi_i \\ r_i \sin\phi_i & s_i \cos\psi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,3,4$$

où les $r_i, s_i, \phi_i, \psi_i, e_i, f_i$ sont donnés par le tableau suivant (les angles sont en degrés).

Tableau 4.5 : Code IFS de la fougère de Barnsley

w	r	s	ϕ	ψ	e	f
1	0.85	0.85	-2.5^0	-2.5^0	0.0	1.6
2	0.3	0.34	49^0	49^0	0.0	1.6
3	0.3	0.37	120^0	-50^0	0.0	0.44
4	0.0	0.16	0^0	0^0	0.0	0.0

La figure 4.28 (gauche) montre l'application du système sur un rectangle (première étape de l'itération). Remarquer que dans la contraction w_3 il y a aussi une réflexion (pour générer le côté droit de la feuille). On avance dans trois directions et le rôle de w_4 est de réduire le rectangle en une tige. La figure 4.28 (droite) présente l'attracteur à l'état final. Une petite modification dans le code IFS permet de transformer un dragon en une feuille de fougère. Cette duplication par les systèmes de fonctions itérées présente donc quelques analogies avec la duplication des cellules et ses codes génétiques.

Remarque 4.5.1 L'image initiale n'a pas d'importance. Dans [132] on prend comme image initiale une courbe de von Koch (Cf. figure 4.29).

Les systèmes de fonctions itérées jouent aussi un rôle important dans la théorie des ondelettes [117].

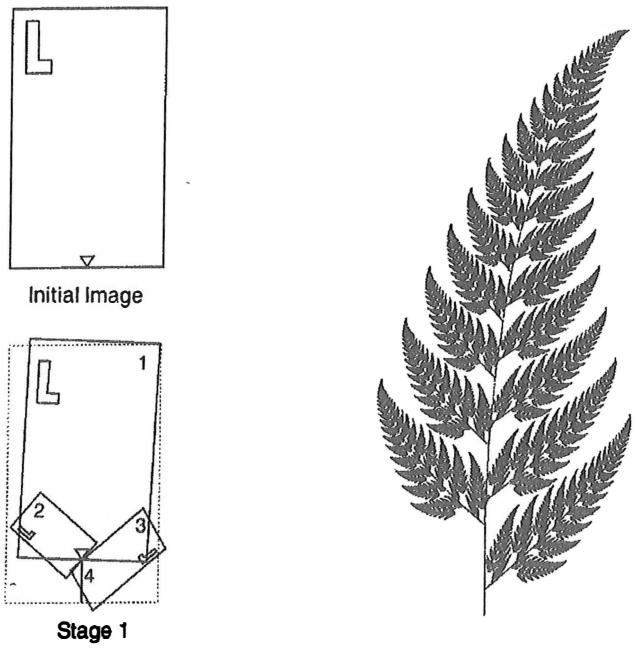


FIG. 4.28 – *La fougère de Barnsley : A gauche : 1ère étape (le petit triangle de l'image initiale et sa première copie indiquent l'endroit où est implantée la tige). A droite : l'attracteur à l'état final. D'après [132].*

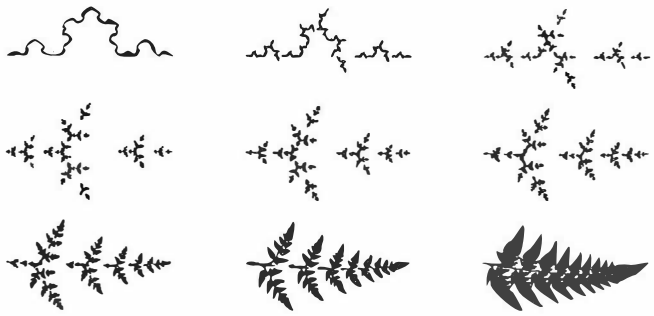


FIG. 4.29 – *La métamorphose de la courbe de von Koch en une feuille de fougère. D'après [132].*

4.5.3 Dimension de Hausdorff

Si U est un ensemble de $\mathbb{R}^n$, le diamètre de U est défini par :

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}.$$

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Considérons un recouvrement fini de A par des ensembles U_i de diamètre plus petit qu'un ϵ donné, i. e. $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$, $0 < |U_i| \leq \epsilon$. Soit :

$$\mu_d(A, \epsilon) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^d\}, \quad |U_i| \leq \epsilon. \tag{4.84}$$

Dans la pratique les U_i sont des boules de diamètre ϵ.

La *mesure de Hausdorff d-dimensionnelle* est définie par :

$$\mu_d(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mu_d(A, \epsilon).$$

Hausdorff a montré qu'il existe un réel d_H, unique, tel que :

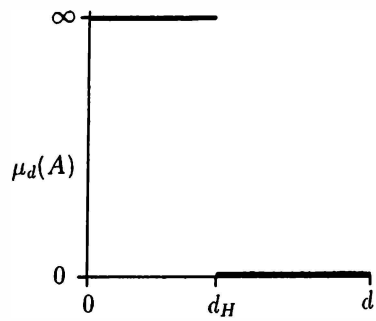


FIG. 4.30 – *Graphe de la mesure de Hausdorff* $\mu_d(A)$.

$$\mu_d(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > d_H \\ \infty & \text{si } d < d_H \end{cases} \tag{4.85}$$

(Cf. fig. 4.30). d_H est appelé la *dimension de Hausdorff* de l'ensemble A. La dimension de Hausdorff est, en général, très difficile à calculer. Cependant dans beaucoup de cas, elle est égale à la dimension de capacité, car on a le théorème suivant.

Théorème 4.5.1 (Hutchinson) *Si l'ensemble A est l'attracteur d'un système de fonctions itérées $\{w_i\}$, $i = 1, 2, \ldots N$ avec facteur de contraction s_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, et si les images des w_i sont déconnectées ou seulement juxtaposées, alors $d_H = d_c = D$, où D est l'unique solution de*

$$|s_1|^D + |s_2|^D + \cdots + |s_N|^D = 1.$$

Si $d_H > 0$, alors $\mu_{d_H}(A)$ est un réel positif.

Connaissant d_H, on peut alors obtenir une estimation de $\mu_{d_H}(A)$ par la formule (4.84) en choisissant un recouvrement fini $\{U_i\}$ de A.

Exemple 4.5.4 Ensemble de Cantor K : on choisit comme recouvrement fini de K, les 2^i intervalles de K_i, de diamètre $\epsilon = 3^{-i}$. Sachant que $d_H = d_c = \log 2/\log 3$, on en déduit :

$$\mu_{d_H}(K) \leq \lim_{i\to\infty} 2^i (3^{-i})^{d_H} = 1.$$

En fait, on montre, avec beaucoup d'efforts (voir [51]), que $\mu_{d_H}(K) = 1$ (alors que la mesure de Lebesgue de l'ensemble de Cantor est 0).

Exemple 4.5.5 Considérons l'exemple du triangle de Sierpinski et prenons comme recouvrement de Δ les 3^i disques de rayon $\sqrt{2}/2^i$. De plus, on sait, par le théorème 4.5.1, que $d_H = d_c = \log 3/\log 2$. On en déduit :

$$\mu_{d_H}(\Delta) \leq \lim_{i\to\infty} \{3^i (\sqrt{2})^d / 2^{id}\} = (\sqrt{2})^{\log 2/\log 3}.$$

Si l'on choisit Δ_0 avec comme sommets $(0,0)$, $(0,1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2},0)$, on aura une meilleure estimation de $\mu_{d_H}(\Delta)$ avec $\mu_{d_H}(\Delta) \leq 1$.

En général, ce sont les limites inférieures de $\mu_{d_H}(A)$ qui sont les plus difficiles à calculer.

4.6 Exposants et dimension de Lyapunov

4.6.1 Calcul des exposants de Lyapunov

Exposant de Lyapunov d'une application mono-dimensionnelle

Considérons à nouveau l'application logistique :

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ avec } f(x) = rx(1-x). \tag{4.86}$$

Nous avons vu au chapitre précédent que pour $r \geq 4$ la trajectoire (i. e. la séquence x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$) est devenue chaotique. La figure 3.2 montre deux trajectoires initialement voisines qui s'écartent après seulement trois itérations. L'exposant de Lyapunov $\lambda(x_0)$ mesure cet écartement de la façon suivante.

Considérons deux points initiaux voisins x_0 et $x_0 + \epsilon$. Après n itérations, l'exposant de Lyapunov $\lambda(x_0)$ est défini par l'équation :

$$\epsilon e^{n\lambda(x_0)} = |f^n(x_0+\epsilon) - f^n(x_0)|.$$

A la limite $\epsilon \to 0$ et $n \to \infty$, on obtient l'expression suivante pour λ :

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{n} \log \left| \frac{f^n(x_0+\epsilon) - f^n(x_0)}{\epsilon} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right|. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Notons $x_i \equiv f^i(x_0)$ et rappelons que $f^n(x_0) = f(f^{n-1}(x_0))$, nous en déduisons, par

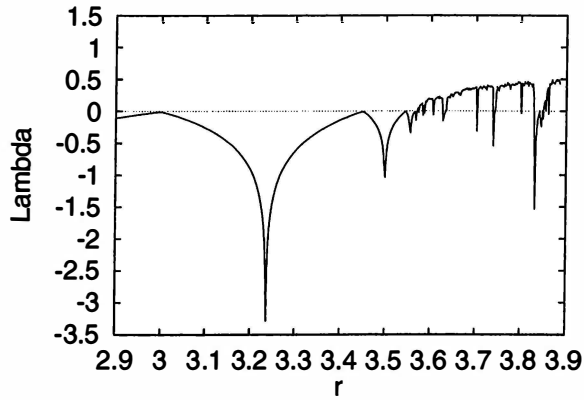


FIG. 4.31 – *Application logistique : l'exposant de Lyapunov.*

la règle de la chaîne,

$$\frac{df^n(x_0)}{dx} = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\cdots f'(x_1)f'(x_0).$$

Par conséquent, l'équation (4.87) s'écrit :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)|. \tag{4.88}$$

Le programme 4.7 calcule l'exposant de Lyapunov de l'application logistique par la formule (4.88). Le résultat du programme est présenté sur la figure 4.31 (voir aussi l'exercice 4.7).

Cas d'une application à n dimensions

Considérons une application itérée à n dimensions :

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.89}$$

avec $x_k \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Soient $J(x)$ la matrice jacobienne de f, $q_1(f^k(x)), \ldots q_n(f^k(x))$, les valeurs propres de $J(f^k(x))$, ordonnées dans l'ordre décroissant suivant leur module. Alors les n exposants de Lyapunov d'une orbite $\{f^k(x)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ sont définies par :

$$\lambda_i = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \log |q_i(f^N(x))| \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.90}$$

Exemple 4.6.1 Soit $E = [0,1] \times [0,1]$. On appelle *transformation du boulanger* une application $f : E \to E$ définie par

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n \bmod 1, \\ y_{n+1} &= \begin{cases} \frac{1}{2} a y_n \text{ pour } 0 \le x_n < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(a y_n + 1) \text{ pour } \frac{1}{2} \le x_n < 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{4.91}$$

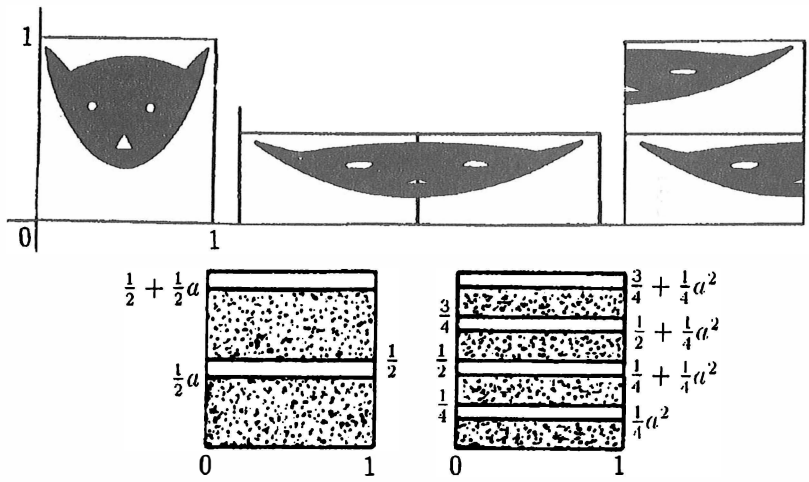


FIG. 4.32 – *$f(E)$ pour $a = 1$ (en haut) [7]; $f(E)$ et $f^2(E)$ pour $0 < a < 1$ (en bas). D'après [7] et [48].*

avec $0 < a \leq 1$.

$(0,0)$ est le seul point fixe de f dont la matrice jacobienne est :

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a \end{bmatrix}.$$

D'où $\det J = a$. On en déduit que f conserve les aires si $a = 1$ (Cf. Remarque 3.1.2). La figure 4.32 montre $f(E)$ lorsque $a = 1$ (en haut) et $f(E)$, $f^2(E)$ lorsque $a < 1$ (en bas). On en déduit, par généralisation, que l'ensemble $E_k = f^k(E)$ compte $N_k = 2^k$ bandes horizontales de hauteur $h_k = (a/2)^k$ (comme un mille-feuille, d'où le nom de la transformation). On a :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \log 2 = \log 2, \\ \lambda_2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \log(a/2) = \log(a/2). \end{aligned} \tag{4.92}$$

Algorithme de Wolf, Swinney et Vastano

Considérons l'application (4.89). A $k = 0$, considérons dans l'espace des phases une n-sphère. Lorsque $k \to \infty$ la n-sphère évolue vers un n-ellipsoïde. Supposons que les axes principaux de l'ellipsoïde aient été ordonnés du plus grand au plus petit. Le i-ème exposant de Lyapunov est défini en fonction du taux de croissance du i-ème axe principal v_i par la formule :

$$\lambda_i = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \frac{\|v_i(N)\|}{\|v_i(0)\|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.93}$$

Ce qui est équivalent à dire que, dans l'itération (4.89), la longueur du premier axe principal croît comme $e^{\lambda_1 k}$, l'aire définie par les deux premiers axes principaux croît

comme $e^{(\lambda_1+\lambda_2)k}$, le volume défini par les trois premiers axes principaux croît comme $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)k}$ etc. Dans l'itération (4.89), les vecteurs $v_i(k)$ se transforment d'après la formule :

$$v_i(k+1) = J(k)v_i(k) \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.94}$$

où $J(k)$ est la jacobienne de f au point x_k. La formule (4.93) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\lambda_i = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log\left(\frac{\|v_i(1)\|}{\|v_i(0)\|}.\frac{\|v_i(2)\|}{\|v_i(1)\|}\cdots\frac{\|v_i(N)\|}{\|v_i(N-1)\|}\right) \tag{4.95}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

A $k = 0$, les vecteurs v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sont définis par :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0,0,\ldots,0), \\ v_2 &= (0,1,0,0,\ldots,0), \\ &\cdots \\ v_n &= (0,0,0,0,\ldots,1). \end{aligned} \tag{4.96}$$

Pour éviter la divergence, à chaque itération, les vecteurs $v_1(k), v_2(k), \ldots, v_n(k)$ seront orthonormés par le procédé de Gram-Schmidt :

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{v_1}{\|v_1\|}, \\ v_2' &= \frac{v_2 - (v_2, v_1')v_1'}{\|v_2 - (v_2, v_1')v_1'\|}, \\ &\cdots \\ v_n' &= \frac{v_n - (v_n, v_{n-1}')v_{n-1}' - \cdots - v_n - (v_n, v_1')v_1'}{\|v_n - (v_n, v_{n-1}')v_{n-1}' - \cdots - v_n - (v_n, v_1')v_1'\|}. \end{aligned}$$

Remarque 6.2. Dans les définitions des exposants de Lyapunov (formules (4.88), (4.93) ainsi que la formule (4.99) du paragraphe suivant), on peut remplacer log par $\log_2$. Ce qui revient à remplacer, dans le raisonnement précédent, $e^{\lambda_1 k}$, $e^{(\lambda_1+\lambda_2)k}$, $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)k}$ ... par $2^{\lambda_1 k}$, $2^{(\lambda_1+\lambda_2)k}$, $2^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)k}$ ... (voir Wolf *et al.* [168]). Les deux définitions diffèrent par un facteur $\log 2$ et ceci n'a pas d'incidence sur le calcul de la dimension de Lyapunov définie plus loin.

Exemple 4.6.2 Prenons l'exemple de l'application de Hénon :

$$x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k, \quad y_{k+1} = bx_k.$$

La jacobienne $J(k)$ s'écrit :

$$J(k) = \begin{pmatrix} -2ax_k & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Le programme Turbo-Pascal 4.8 calcule les exposants de Lyapunov pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$. Le résultat est :

$$\lambda_1 = 0.604, \quad \lambda_2 = -2.341. \tag{4.97}$$

A comparer avec les valeurs $\lambda_1 = 0.603$, $\lambda_2 = -2.34$ données par Wolf *et al.* [168] (voir aussi l'exercice 4.5).

Cas d'un système différentiel

Le calcul des exposants de Lyapunov du système d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{4.98}$$

se fait de façon analogue. Les équations (4.93) et (4.94) seront remplacées par :

$$\lambda_i = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|v_i(t)\|}{\|v_i(t_0)\|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.99}$$

et

$$\dot{v}_i(t) = J(x)v_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.100}$$

respectivement. (4.98)-(4.100) est un système de $n + n^2$ équations à résoudre ensemble. A chaque pas de temps, les n vecteurs v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, définis à $t = 0$ par (4.96), seront calculés par (4.100) et orthonormés par le procédé de Gram-Schmidt.

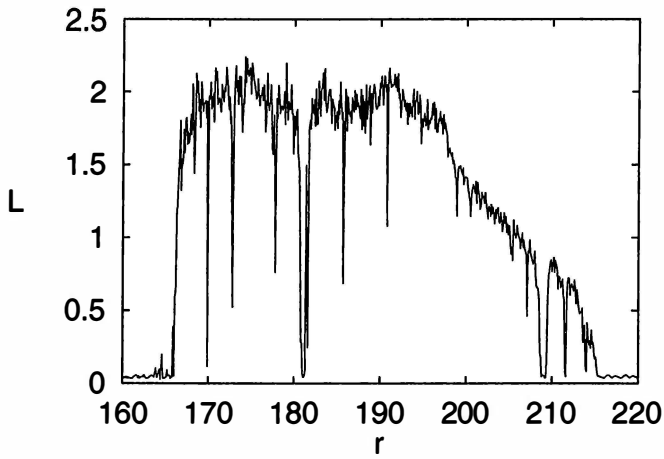


FIG. 4.33 – *Système de Lorenz: le plus grand exposant de Lyapunov.*

Exemple 4.6.3 Le programme 4.9, adapté du programme de Wolf et al [168], calcule les trois exposants de Lyapunov du système de Lorenz :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{x} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{4.101}$$

pour $\sigma = 16.0$, $r = 45.92$, $b = 4.0$.

Le résultat est :

$$\lambda_1 = 2.11, \quad \lambda_2 = 0.00, \quad \lambda_3 = -32.40 \tag{4.102}$$

(avec pas de temps $dt = 0.01$, nombre de pas 20000), à comparer avec les valeurs données par Wolf et al : $\lambda_1 = 2.16$, $\lambda_2 = 0.00$, $\lambda_3 = -32.40$.

Le programme 4.10 calcule $L = \lambda_1$, le plus grand exposant de Lyapunov, en fonction de r. Le résultat du programme est présenté sur la figure 4.33.

4.6.2 Formule de Kaplan-Yorke et dimension de Lyapunov

Considérons, dans l'espace des phases à deux dimensions, un carré C de côté L. Supposons que le système possède un exposant de Lyapunov $\lambda_1 > 0$ et un exposant de Lyapunov $\lambda_2 < 0$. Dans ce cas, une direction sera rétrécie d'un facteur $e^{\lambda_2 t}$ et l'autre direction sera allongée d'un facteur $e^{\lambda_1 t}$. L'aire de C varie comme $C(t) = Ce^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$ (voir fig. 4.34) [9]. Soit $N(t)$ le nombre de carrés de côté :

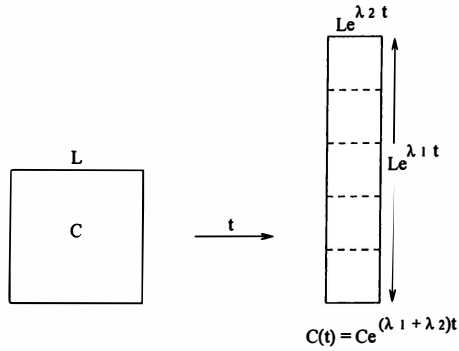


FIG. 4.34 – *Exposants de Lyapunov.*

$$\epsilon(t) = Le^{\lambda_2 t}$$

qui recouvrent $C(t)$. On a :

$$N(t) = \frac{C(t)}{\epsilon^2(t)} = \frac{Ce^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}{Ce^{2\lambda_2 t}} = e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}.$$

On définit la dimension de Lyapunov d_L, par analogie avec la dimension de capacité, comme :

$$d_L = -\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{\log(N(\epsilon))}{\log(\epsilon(t))}\right]. \tag{4.103}$$

On en déduit :

$$d_L = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{4.104}$$

Exemple 4.6.4 Par exemple, pour la transformation du Boulanger, on a d'après (4.92) :

$$d_L = 1 + \frac{\log 2}{\log 2 - \log a}.$$

Cette dimension est égale à la dimension fractale calculée d'après les formules (4.77) et (4.75). En effet, pour la transformation du boulanger, la dimension suivant la direction x est $d_x = 1$ et, suivant la direction y, on a le tableau suivant.

n	$N(\epsilon)$	ϵ
0	1	a
1	2	$a/2$
2	2^2	$a^2/2^2$
3	2^3	$a^3/2^3$
n	2^n	$a^n/2^n$

On en déduit, d'après (4.77), la dimension fractale suivant la direction y :

$$d_y = -\lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log(a^n/2^n)} = \frac{\log 2}{\log 2 - \log a}.$$

D'où, d'après (4.75) :

$$d = d_x + d_y = 1 + \frac{\log 2}{\log 2 - \log a} = d_L.$$

Exemple 4.6.5 Pour l'application de Hénon, on a d'après (4.97) :

$$d_L = 1 + \frac{0.604}{2.341} \approx 1.26.$$

Pour les espaces de phase de dimension plus grand que 2, Kaplan et Yorke [100] ont proposé de généraliser (4.104). La formule devient :

$$d_L = j - \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{\lambda_{j+1}} \tag{4.105}$$

où les λ_i ont été classés dans l'ordre décroissant :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$$

et j est défini par les conditions :

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0. \tag{4.106}$$

Exemple 4.6.6 Pour le système de Lorenz, on a d'après (4.102) :

$$d_L = 2 + \frac{2.11}{32.4} \approx 2.06. \tag{4.107}$$

4.7 Le fer à cheval de Smale

Le fer à cheval de Smale est l'analogue en dimension 2 des poussières de Fatou (Section 3.3). On le rencontre au voisinage des points homoclines. La méthode de Melnikov permet de prouver son existence.

4.7.1 Le fer à cheval de Smale

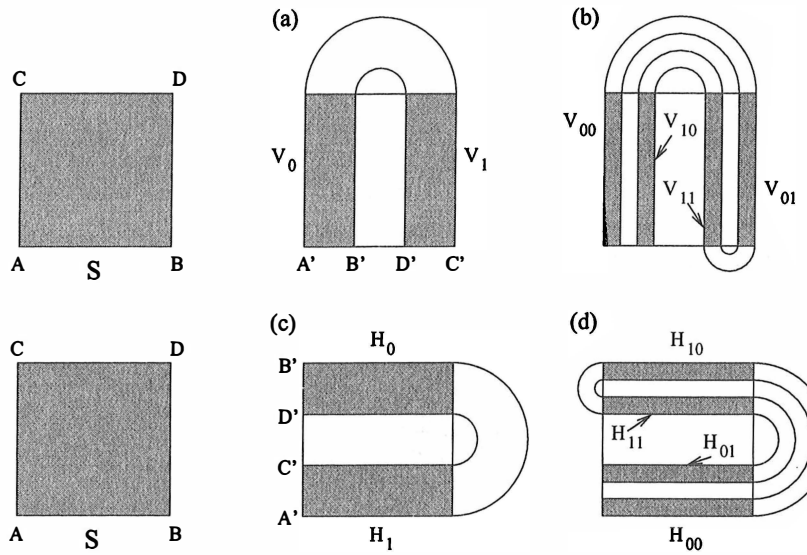


FIG. 4.35 – *Le fer à cheval de Smale. (a) : $f(S) \cap S$, (b) : $f^2(S) \cap f(S) \cap S$, (c) : $f^{-1}(S) \cap S$, (b) : $f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S$.*

Soit un carré $S = [0,1] \times [0,1]$. Considérons une application $f : S \to \mathbb{R}^2$ qui étire le carré S linéairement dans la direction verticale d'un facteur $\mu > 2$, qui le contracte dans la direction horizontale d'un facteur μ et qui le plie ensuite sous la forme d'un fer à cheval de façon que $f(S) \cap S$ consiste en deux rectangles verticaux V_0 et V_1 de hauteur 1 et de largeur $1/\mu$ (voir figure 4.35a) :

$$f(S) \cap S = V_0 \cup V_1.$$

La transformation inverse f^{-1} agit sur S comme le montre la figure 4.35c où $f^{-1}(S) \cap S$ consiste en deux rectangles horizontaux H_0 et H_1 de largeur 1 et de hauteur $1/\mu$:

$$f^{-1}(S) \cap S = H_0 \cup H_1$$

avec

$$f(H_i) = V_i \text{ et } f^{-1}(V_i) = H_i, \quad i = 0, 1.$$

Exemple 4.7.1 Pour $\mu = 3$, l'application f pourraît être, par exemple :

$$f(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{3}, 3x_2) \quad \text{si} \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{3},$$
$$f(x_1, x_2) = (0, 0) \quad \text{si} \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad \frac{1}{3} \leq x_2 \leq \frac{2}{3},$$
$$f(x_1, x_2) = (-\frac{x_1}{3} + 1, 3(1 - x_2)) \quad \text{si} \quad 0 \leq x_1 \leq 1, \quad \frac{2}{3} \leq x_2 \leq 1.$$

L'application f a pour matrice jacobienne :

$$Df = \begin{pmatrix} \pm 1/3 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{pmatrix}.$$

L'application f^{-1} pourrait être :

$$f^{-1}(x_1, x_2) = (3x_1, \frac{x_2}{3}) \quad \text{si} \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq x_2 \leq 1,$$
$$f^{-1}(x_1, x_2) = (0, 0) \quad \text{si} \quad \frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}, \quad 0 \leq x_2 \leq 1,$$
$$f^{-1}(x_1, x_2) = (3(1 - x_1), -\frac{x_2}{3} + 1) \quad \text{si} \quad \frac{2}{3} \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1$$

avec :

$$Df^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 1/3 \end{pmatrix}.$$

Seules les restrictions de f et f^{-1} sur $H_0 \cup H_1$ et $V_0 \cup V_1$ respectivement sont inverses l'une de l'autre et conservatives ($|Df| = |Df^{-1}| = 1$).

Effectuons maintenant une seconde itération de f. L'action de f^2 sur S est montrée sur la figure 4.35b. De même, l'action de f^{-2} sur S est montrée sur la figure 4.35d avec :

$$V_{ij} = f^2(H_{ij}), \quad H_{ij} = f^{-2}(V_{ij}).$$

Considérons maintenant les ensembles :

$$\Lambda_1 = f^{-1}(S) \cap S \cap f(S)$$

et

$$\Lambda_2 = f^{-2}(S) \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap f^2(S).$$

Λ_1 est composée de 4 carrés de hauteur $1/\mu$. Λ_2 est composé de 16 carrés de hauteur μ^{-2} (figure 4.36). Plus généralement, l'ensemble :

$$\Lambda_n = f^{-n}(S) \cap \ldots \cap f^{-1}(S) \cap S \cap f(S) \cap \ldots \cap f^n(S)$$

est composé de 4^n petits carrés de hauteur μ^{-n}. D'après la formule (4.78), la dimension fractale de l'ensemble :

$$\Lambda = \lim_{n \to \infty} \Lambda_n = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(S)$$

est :

$$d = -\lim_{n\to\infty} \frac{\log 4^n}{\log(\mu^{-n})} = \frac{\log 4}{\log \mu} = 2\frac{\log 2}{\log \mu}.$$

Noter que $\log 2/\log \mu$ est la dimension fractale d'un ensemble de Cantor et il est facile de voir que Λ est le produit topologique de deux ensembles de Cantor (voir la figure 4.37 et aussi l'exercice 4.4). Λ est encore appelé *ensemble invariant* ou *ensemble des points non-errants* (*non-wandering*, en anglais) de f, car on a :

$$f(\Lambda) = f^{-1}(\Lambda) = \Lambda. \tag{4.108}$$

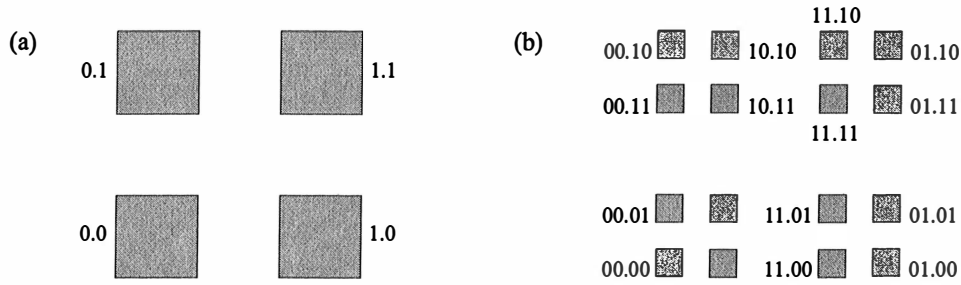


FIG. 4.36 – *Le fer à cheval de Smale : (a) l'ensemble Λ_1. (b) l'ensemble Λ_2.*

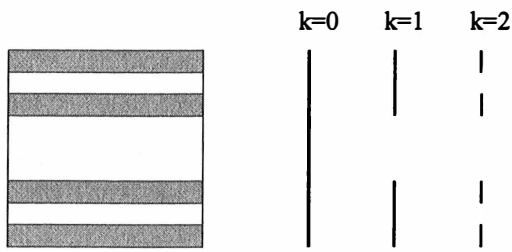


FIG. 4.37 – *Correspondance entre l'ensemble de fer à cheval et l'ensemble de Cantor.*

Comme dans le cas des poussières de Fatou, on peut représenter un élément $x \in \Lambda$ par une séquence bi-infinie de la dynamique symbolique :

$$a = \ldots a_{-3}a_{-2}a_{-1}.a_0a_1a_2a_3\ldots \tag{4.109}$$

avec

$$a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } f^i(x) \in H_0, \\ 1 & \text{si } f^i(x) \in H_1. \end{cases} \tag{4.110}$$

Nous désignons cette correspondance par :

$$a = \phi(x)$$

On démontre (voir par exemple [68]) que ϕ est un homéomorphisme entre Λ et l'ensemble Σ des séquences (4.109)-(4.110), muni de la métrique:

$$d(a,b) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{|a_i - b_i|}{2^{|i|}}, \quad a, b \in \Sigma. \tag{4.111}$$

Noter que:

$$d(a,b) < \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Par conséquent, la somme (4.111) est convergente.

Définissons le décalage de Bernoulli (*Bernoulli shift*, en anglais) par:

$$a' = \sigma(a) \quad a'_i = a_{i+1},$$

a' est obtenu de a en déplaçant le point décimal de (4.109) d'une place vers la droite. On a donc, d'après (4.110):

$$a'_i = \begin{cases} 0 & \text{si } f^{i+1}(x) = f^i(f(x)) \in H_0, \\ 1 & \text{si } f^{i+1}(x) = f^i(f(x)) \in H_1. \end{cases} \tag{4.112}$$

On a donc $a' = \sigma(a) = \phi(f(x))$ ou:

$$f|_\Lambda = \phi^{-1} \circ \sigma \circ \phi, \quad f^n|_\Lambda = \phi^{-1} \circ \sigma^n \circ \phi, \tag{4.113}$$

où $f|_\Lambda$ est la restriction de f à Λ. On dit aussi que $f|_\Lambda$ est conjugué à σ par ϕ.

4.7.2 Points homoclines

Nous allons maintenant voir que, comme dans le cas de l'ensemble de Cantor, la structure de fer à cheval de Smale apparaît dans de nombreuses situations. Considérons le cas d'un point fixe x^*, hyperbolique, instable d'une application discrète: $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Supposons que la variété stable $W^s(x^*)$ et la variété instable $W^u(x^*)$ se croisent en un point $x_0 \neq x^*$. Un tel point de croisement différent du point fixe est appelé *point homocline*. Un point homocline est *transverse* si les variétés $W^s(x^*)$ et $W^u(x^*)$ ne sont pas tangentes en ce point. L'existence d'un point homocline transverse implique l'existence d'une infinité de points homoclines. En effet, soit $x_k = P^k(x_0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Par définition, $W^s(x^*)$ et $W^u(x^*)$ sont des variétés invariantes, c'est-à-dire que si $x_0 \in W^s(x^*)$ et $x_0 \in W^u(x^*)$, on a aussi $x_k \in W^s(x^*)$ et $x_k \in W^u(x^*)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que $W^s(x^*)$ et $W^u(x^*)$ se croisent une infinité de fois. Ce fait a déja été perçu par Poincaré [135]) et est souvent appelé structure homocline de Poincaré.

Considérons maintenant un petit rectangle R, très allongé, très proche de $W^s(x^*)$ et qui coupe $W^u(x^*)$ en plusieurs endroits (Cf. figure 4.38). Lors de l'itération, ce petit retangle commence par se rapprocher très près du point fixe x^* et sa direction stable est fortement contractée. Il quitte ensuite le voisinage du point fixe mais en suivant la variété instable $W^u(x^*)$ et sa direction instable est cette fois fortement dilatée. Finalement, il revient, au bout de k itérations, dans le voisinage du rectangle

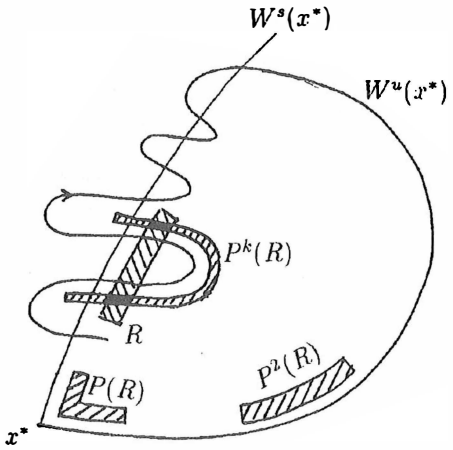


FIG. 4.38 – *Structure de fer à cheval de Smale.*

de départ et nous obtenons la figure typique du fer à cheval de Smale. Ce résultat est prouvé par le théorème suivant.

Théorème 4.7.1 (Smale-Birkhoff) *Si l'application itérée $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ possède un point fixe hyperbolique x^* et si $W^s(x^*)$ et $W^u(x^*)$ se croisent transversalement en un point $x_0 \neq x^*$, alors P présente une structure de fer à cheval de Smale au voisinage de x^*.*

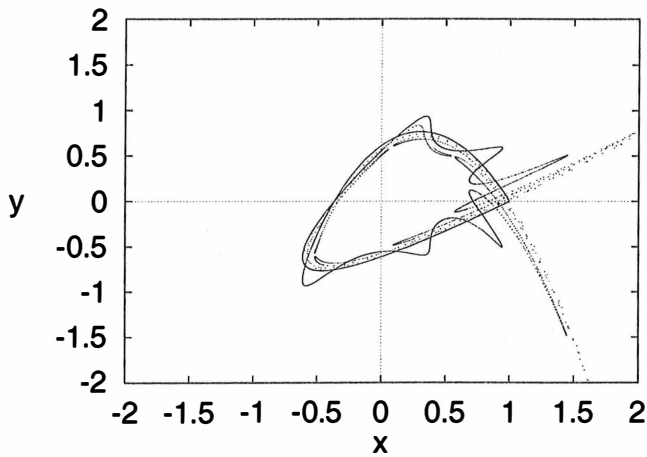


FIG. 4.39 – *Points homoclines de l'application d'Arrowsmith-Place.*

Exemple 4.7.2 Considérons l'application d'Arrowsmith-Place [8] :

$$f : \quad x_1 = x + y_1, \quad y_1 = y + ax(x-1), \quad 0 < a < 4. \tag{4.114}$$

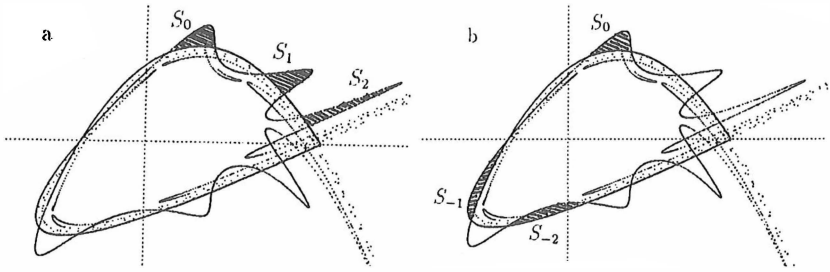


FIG. 4.40 – *(a) : S_0, S_1 et S_2. (b) : S_0, S_{-1} et S_{-2}.*

Son application inverse est :

$$f^{-1} : \quad x = x_1 - y_1, \quad y = y_1 - ax(x-1), \quad 0 < a < 4. \tag{4.115}$$

L'application f a deux points fixes $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) = (1,0)$. La matrice jacobienne au point fixe $(0,0)$ s'écrit :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle a pour valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - a \pm \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

Le point fixe $(0,0)$ est non-hyperbolique. La matrice jacobienne au point fixe $(1,0)$ s'écrit :

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle a pour valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + a \pm \sqrt{a^2 + 4a}}{2}.$$

Pour $a = 1.5$, on a : $\lambda_1 \approx 3.1861406616 > 1$, $\lambda_2 \approx 0.31385933837 < 1$. Le point fixe $(1,0)$ est donc hyperbolique. Les espaces tangents $E^s(1,0)$, $E^u(1,0)$ sont des espaces propres de $J(1,0)$, c'est-à-dire des droites d'équation :

$$v = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2} u, \text{ et } v = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2} u, \tag{4.116}$$

respectivement, où (u,v) sont des coordonnées locales à $(1,0)$. Le programme 4.11 calcule les images successives d'une centaine de points situés sur $E^s(1,0)$ et près de $(1,0)$ ainsi que les images successives, de l'application inverse, des points situés sur $E^u(1,0)$, toujours près de $(1,0)$. Le résultat est présenté sur les figures 4.39 et 4.40. Sur la figure 4.40a et b, les surfaces :

$$S_i = f^i(S_0), \quad S_{-i} = f^{-i}(S_0), \quad i = 1, 2, \ldots$$

sont les images successives de S_0. Toutes les surfaces S_i, S_{-i} ont la même aire que S_0 car l'application f conserve les aires.

4.7.3 La méthode de Melnikov

Pour illustrer la méthode de Melnikov, considérons un système hamiltonien à un degré de liberté :

$$\dot{x} = f(x), \quad x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \tag{4.117}$$

avec $f_1 = \partial H(x)/\partial v$, $f_2 = -\partial H(x)/\partial u$. Supposons que le système (4.117) possède un point fixe hyperbolique à X_0 et une orbite séparatrice Γ_0 intégrable d'équation $x = x_0(t)$ avec

$$\lim_{t \to \pm\infty} x_0(t) = X_0.$$

(Cf figure 4.41a).

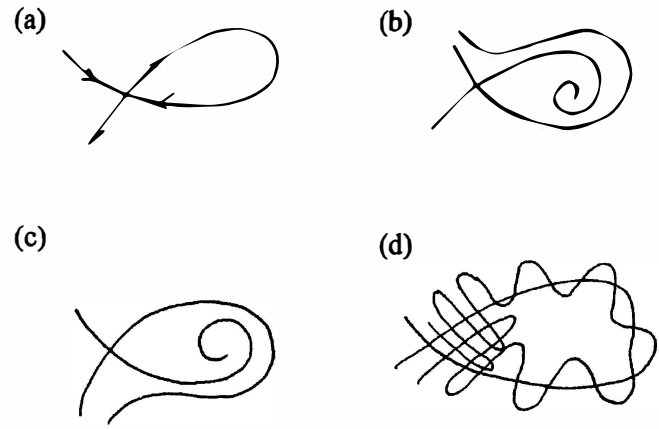


FIG. 4.41 – *(a) : système non perturbé. (b), (c) et (d) : trois possibilités du système perturbé. D'après [108].*

Considérons maintenant une petite perturbation de (4.117) de la forme :

$$\dot{x} = f(x) + \epsilon g(x,t) \quad \text{avec} \quad g(x,t) = \begin{pmatrix} g_1(x,t) \\ g_2(x,t) \end{pmatrix}, \tag{4.118}$$

où $g_1(x,t), g_2(x,t)$ sont *périodiques* de période T. Quand le système est perturbé l'espace des phases est à trois dimensions (u, v, t) et les variétés stable et instable de la section de Poincaré $t = \text{Const.} \pmod T$ ont trois possibilités présentées sur la figure 4.41 : dans les cas b) et c) les variétés stable et instable ne se croisent pas ; dans le cas d) les variétés stable et instable se croisent *transversalement* en une infinité de points appelés *points homoclines* (car l'image d'un point homocline doit être aussi un point homocline, voir la sous-section précédente). C'est dans ce cas qu'une structure de fer à cheval de Smale apparaît. La méthode de Melnikov permet de détecter ce cas d).

L'idée est de calculer la distance D entre la variété instable x^u et la variété stable x^s au temps t_0, prise le long de la normale :

$$N = (-f_2(x_0), f_1(x_0))^T, \tag{4.119}$$

à l'orbite séparatrice x_0 (Cf. figure 4.42, à noter que sur cette figure $T = (f_1, f_2)^T$). Si $D > 0$ ou $D < 0$, $\forall t_0$ on a le cas b) ou c). Si D change de signe pour un certain t_0 on a le cas d) [108].

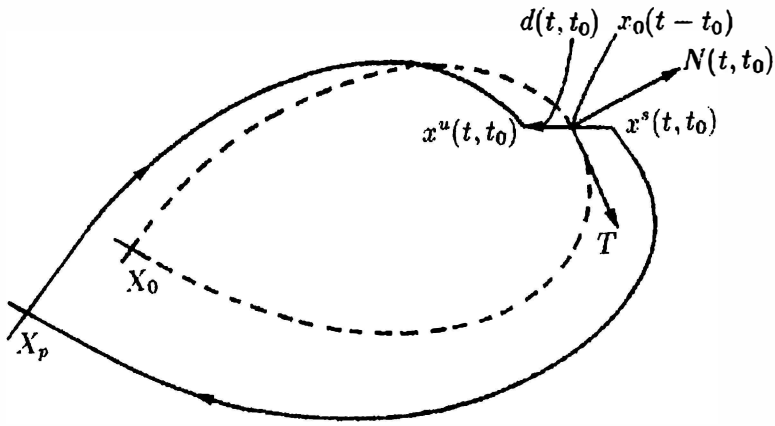


FIG. 4.42 – *La distance de Melnikov $D = N.d$, A noter que $T = (f_1, f_2)^T$ et $N = (-f_2, f_1)^T$.*

Au premier ordre les orbites stable et instable, x^s et x^u, s'écrivent :

$$x^{s,u} = x_0(t - t_0) + \epsilon x_1^{s,u}(t, t_0) \tag{4.120}$$

où t_0 est un temps initial arbitraire. Portant (4.120) dans l'équation (4.118) *linéarisée*, on obtient, au premier ordre :

$$\dot{x}_0 + \epsilon \dot{x}_1^{s,u} = f(x_0) + \epsilon J(x_0) x_1^{s,u} + \epsilon g(x_0, t)$$

ou

$$\dot{x}_1^{s,u} = J(x_0) x_1^{s,u} + g(x_0, t) \tag{4.121}$$

où $J(x_0)$ est la matrice jacobienne

$$J(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial u} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial u} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Posons (Cf. fig. 4.42) :

$$d(t, t_0) = x^u(t, t_0) - x^s(t, t_0) = x_1^u(t, t_0) - x_1^s(t, t_0). \tag{4.122}$$

La distance de Melnikov $D(t, t_0)$ est définie par (figure 4.42) :

$$D(t, t_0) = N.d = f \wedge d \tag{4.123}$$

où N est donnée par (4.119) et

$$a \wedge b \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad \text{pour } a = (a_1, a_2)^T, \quad b = (b_1, b_2)^T. \tag{4.124}$$

Portant (4.122) dans (4.123), on obtient :

$$D(t,t_0) = D^u(t,t_0) - D^s(t,t_0) \tag{4.125}$$

avec

$$D^{s,u}(t,t_0) = f(x_0) \wedge x_1^{s,u}. \tag{4.126}$$

Dérivons $D^s(t,t_0)$, nous obtenons :

$$\dot{D}^s(t,t_0) = \dot{f}(x_0) \wedge x_1^s + f(x_0) \wedge \dot{x}_1^s = J(x_0)\dot{x}_0 \wedge x_1^s + f(x_0) \wedge \dot{x}_1^s. \tag{4.127}$$

Portant $\dot{x}_0 = f(x_0)$ et (4.121) dans (4.127), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{D}^s(t,t_0) &= J(x_0)f(x_0) \wedge x_1^s + f(x_0) \wedge (J(x_0)x_1^s + g(x_0,t)) \\ &= TrJ(x_0)(f(x_0) \wedge x_1^s) + f(x_0) \wedge g(x_0,t), \end{aligned} \tag{4.128}$$

où l'on a utilisé l'identité $(Ja) \wedge b + a \wedge (Jb) =$ Tr $J(a \wedge b)$. Comme :

$$\text{Tr } J(x_0) = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial u} = 0,$$

on a :

$$\dot{D}^s(t,t_0) = f(x_0) \wedge g(x_0,t).$$

D'où :

$$D^s(t,t_0) - D^s(t_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} f(x_0) \wedge g(x_0,t)\,dt,$$

avec $x_0 = x_0(t-t_0)$. On a, d'après (4.126),

$$D^s(+\infty,t_0) = \lim_{t \to +\infty} f(x_0) \wedge x_1^s(t,t_0) = 0$$

car x_1^s est borné et $f(x_0) \to f(X_0) = 0$ (X_0 est un point fixe de (4.117)). On en déduit :

$$D^s(t_0,t_0) = -\int_{t_0}^{+\infty} f(x_0(t-t_0)) \wedge g(x_0(t-t_0),t)\,dt.$$

De même on a :

$$D^u(t_0,t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} f(x_0(t-t_0)) \wedge g(x_0(t-t_0),t)\,dt.$$

(4.125) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} D(t_0,t_0) \equiv M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0(t-t_0)) \wedge g(x_0(t-t_0),t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0(t)) \wedge g(x_0(t),t+t_0)\,dt. \end{aligned} \tag{4.129}$$

Il suffit alors d'étudier le comportement de la *fonction de Melnikov* $M(t_0)$: si $M(t_0)$ change de signe pour un certain t_0, alors le cas de la figure 4.41d se produit.

Remarque 4.7.1 Si (4.118) est aussi un système hamiltonien, c'est-à-dire, s'il existe une fonction $H_1(x,t)$ telle que $g_1 = \partial H_1(x,t)/\partial v$, $g_2 = -\partial H_1(x,t)/\partial u$, alors on voit facilement que (4.129) peut s'écrire sous la forme :

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H(x_0(t)), H_1(x_0(t),t+t_0)\}\,dt \tag{4.130}$$

où $\{H, H_1\}$ désigne le crochet de Poisson :

$$\{H, H_1\} \equiv \frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H_1}{\partial v} - \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial H_1}{\partial u}.$$

Remarque 4.7.2 Si $g(x,t) = g(x)$ ne dépend pas explicitement de t alors, par le théorème de Green, on a :

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0(t-t_0)) \wedge g(x_0(t-t_0))\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1(x_0)g_2(x_0) - f_2(x_0)g_1(x_0))\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{u}_0 g_2(x_0) - \dot{v}_0 g_1(x_0))\, dt \text{ où } x_0 = (u_0, v_0)^T \\ &= \oint_{\Gamma_0} g_2(u,v)du - g_1(u,v)dv \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\right) du dv, \end{aligned} \tag{4.131}$$

où S désigne l'intérieur de la séparatrice Γ_0.

Exemple 4.7.3 Considérons l'équation de Duffing [68] :

$$\ddot{u} - u + u^3 = \epsilon(\gamma \cos \omega t - \delta \dot{u}). \tag{4.132}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\dot{u} = v, \tag{4.133}$$

$$\dot{v} = u - u^3 + \epsilon(\gamma \cos \omega t - \delta v). \tag{4.134}$$

Le système non perturbé ($\epsilon = 0$) est un système hamiltonien avec :

$$H(u,v) = \frac{v^2 - u^2}{2} + \frac{u^4}{4}.$$

Ce système hamiltonien a deux centres à $(u,v) = (\pm 1, 0)$ et un point selle à $(0,0)$. La courbe de niveau :

$$H(u,v) \equiv \frac{v^2 - u^2}{2} + \frac{u^4}{4} = 0$$

est composée de deux orbites homoclines Γ_0^+, Γ_0^-. Les orbites homoclines sont données par :

$$x_0^{\pm} = \pm(\sqrt{2}\ \text{sech}\ t, -\sqrt{2}\ \text{sech}\ t\ \tanh t), \quad \text{sech}\ t \equiv 1/\cosh t. \tag{4.135}$$

Nous calculerons la fonction de Melnikov pour x_0^+ (le calcul pour x_0^- est identique). Comparant (4.118) et (4.133), nous obtenons :

$$f = \begin{pmatrix} v \\ u - u^3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \cos \omega t - \delta v \end{pmatrix}.$$

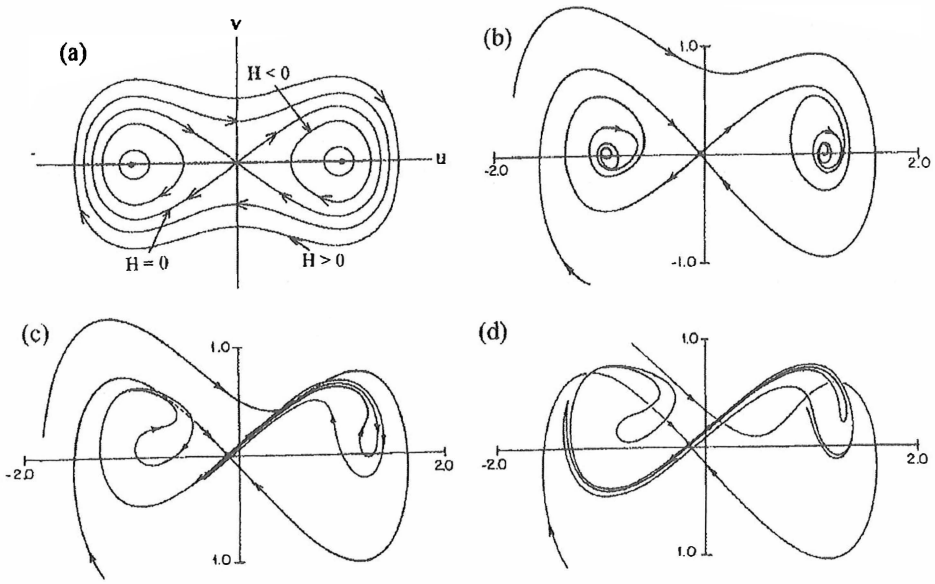


FIG. 4.43 – *(a) Courbes de niveau de l'équation de Duffing non perturbée ($\epsilon = 0$). (b), (c) et (d) : applications de Poincaré du système perturbé montrant les variétés stable et instable du point selle près de $(0,0)$, avec $\epsilon = 0.1$, $\omega = 1$, $\delta = 2.5$ et $\gamma = 1.1$ (b), $\gamma = 1.9$ (c), $\gamma = 3.0$ (d). D'après [108] et [68].*

D'où :

$$f \wedge g = v_0(\gamma \cos \omega t - \delta v_0)$$

avec, d'après (4.135), $v_0 = -\sqrt{2}\ \text{sech}\ t\ \tanh\ t$. (4.129) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} M(t_0) &= -\sqrt{2}\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}\ t\ \tanh\ t \cos \omega(t + t_0)\, dt \\ &\quad -2\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2 t\ \tanh^2 t\, dt. \end{aligned} \tag{4.136}$$

La seconde intégrale de (4.136) est élémentaire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2 t\ \tanh^2 t\, dt = \frac{\tanh^2}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{3}.$$

La première intégrale de (4.136) s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}\ t\ \tanh\ t \cos \omega(t + t_0)\, dt = -\sin \omega t_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}\ t\ \tanh\ t \sin \omega t\, dt.$$

Cette dernière intégrale peut être calculée par la méthode des résidus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}\ t\ \tanh\ t \sin \omega t\, dt = \pi\omega\ \text{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right).$$

D'où :

$$M(t_0) = \sqrt{2}\gamma\pi\omega\ \text{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\left[\sin \omega t_0 - k_0\right],$$

où l'on a posé :

$$k_0 = \frac{4\delta \cosh(\pi\omega/2)}{3\gamma\sqrt{2}\pi\omega}.$$

On en déduit qu'il existe des points homoclines transverses quand $0 < k_0 < 1$. On peut voir les applications de Poincaré du système perturbé (4.133) pour $\epsilon = 0.1$ sur la figure (4.43).

Exemple 4.7.4 Considérons l'équation du pendule amorti et entretenu [86] :

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = \epsilon(\delta\cos\omega t - \gamma\dot{\theta}) \tag{4.137}$$

ou sous forme de système :

$$\dot{\theta} = v, \tag{4.138}$$

$$\dot{v} = -\sin\theta + \epsilon(\delta\cos\omega t - \gamma v). \tag{4.139}$$

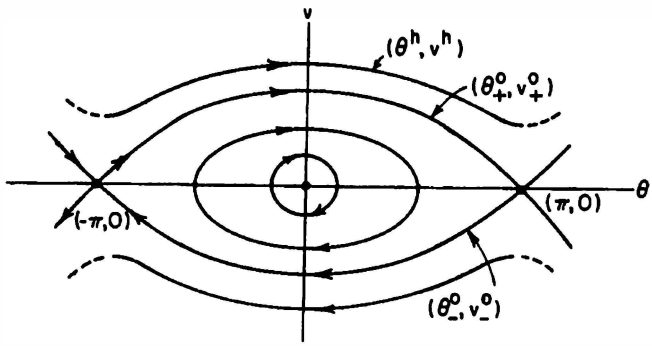


FIG. 4.44 – *Courbes de niveau du pendule non-perturbé ($\epsilon = 0$). D'après [68].*

Le portrait des phases du système est présenté sur la figure 4.44. La solution homocline non-perturbée (correspondant à $\epsilon = 0$) est donnée par :

$$(\theta^0_\pm(t), v^0_\pm(t)) = (\pm 2\arctan(\sinh t), \pm 2\,\mathrm{sech}\, t).$$

En fait, on n'a pas besoin d'expression pour $\theta^0_\pm(t))$ car on a ici :

$$f = \begin{pmatrix} v \\ -\sin u \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta\cos\omega t - \gamma v \end{pmatrix},$$

d'où :

$$f \wedge g = v_0(\delta\cos\omega t - \gamma v_0)$$

et

$$M(t_0) = \pm 2\delta \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sech}\,(\tau)\cos\omega(\tau + t_0)\,d\tau - 4\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sech}^2(\tau)\,d\tau. \tag{4.140}$$

La deuxième intégrale de (4.140) est élémentaire et est égale à 2. La première intégrale de (4.140) peut être calculée par la méthode des résidus et on obtient :

$$M(t_0) = \pm 2\delta\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right) \cos\omega t_0 - 8\gamma.$$

On en déduit que $M(t_0)$ a des zéros simples si et seulement si :

$$\delta\pi > 4\gamma \cosh\left(\frac{\pi\omega}{2}\right).$$

C'est le critère explicite pour l'existence d'orbites homoclines transverses dans la limite $\epsilon \to 0$.

4.7.4 Orbites de Silnikov

Théorème 4.7.2 (Silnikov) *[149] Soit $\bar{x}$ le point d'équilibre d'un système d'équations différentielles d'ordre trois. Supposons qu'au point $\bar{x}$:*

- la matrice jacobienne du système linéarisé ait une valeur propre β positive (resp. négative) et une paire de valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega$ avec $\alpha < 0$ (resp. $\alpha > 0$) et $|\alpha| < |\beta|$.

- il y ait une orbite homocline Γ en $\bar{x}$, c'est-à-dire $\lim_{t\to\pm\infty} \Gamma = \bar{x}$.

Alors au voisinage de $\bar{x}$ toute section de Poincaré transverse à Γ possède une structure de fer à cheval de Smale.

L'orbite Γ est appelée *orbite de Silnikov* [5].

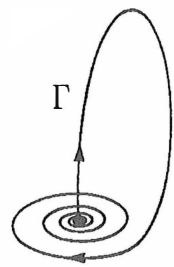


FIG. 4.45 – *Orbite de Silnikov.*

PREUVE : La linéarisation du système dynamique s'écrit :

$$\dot{x} = \alpha x + \omega y, \quad \dot{y} = -\omega x + \alpha y, \quad \dot{z} = \beta z. \tag{4.141}$$

Pour fixer les idées, on suppose que $\alpha < 0$, $\beta > 0$. On prend comme section de Poincaré le plan $\pi_0 : y = 0$. Soit π_1 le plan $z = h$, h petit. Une orbite partant d'un point $A = (x_0, 0, z_0)$ de π_0 avec x_0, z_0 petits et $z_0 > 0$ rencontre le plan π_1 au point B avant de retourner à π_0. L'application de Poincaré $P : \pi_0 \to \pi_0$ est composée de deux applications $P_0 : \pi_0 \to \pi_1$ et $P_1 : \pi_1 \to \pi_0$. En posant $u = x + iy$, $\lambda = \alpha + i\omega$, le système (4.141) s'écrit :

$$\dot{u} = \bar{\lambda} u, \quad \dot{z} = \beta z. \tag{4.142}$$

On en déduit :

$$\frac{du}{dz} = \frac{\bar{\lambda} u}{\beta z}.$$

Cette équation différentielle a pour solution :

$$uz^{-\gamma} = \text{ constante, avec } \gamma = \bar{\lambda}/\beta.$$

En coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) avec $u = \rho e^{i\theta}$, une trajectoire qui part du point $A = (x_0, 0, z_0)$ rencontre le plan π_1 au point $A_1 = (\rho, \theta, h)$ avec

$$\rho = x_0 (z_0/h)^{-\alpha/\beta}, \quad z_0 = h \exp(\beta\theta/\omega). \tag{4.143}$$

On en déduit qu'une ligne $z_0 =$ constante du plan π_0 se transforme en une ligne θ = constante du plan π_1. De plus, d'après (4.143), on a :

$$\rho = x_0 \exp(-\alpha\theta/\omega). \tag{4.144}$$

Par conséquent, une ligne $x_0 =$ constante du plan π_0 se transforme en une spirale

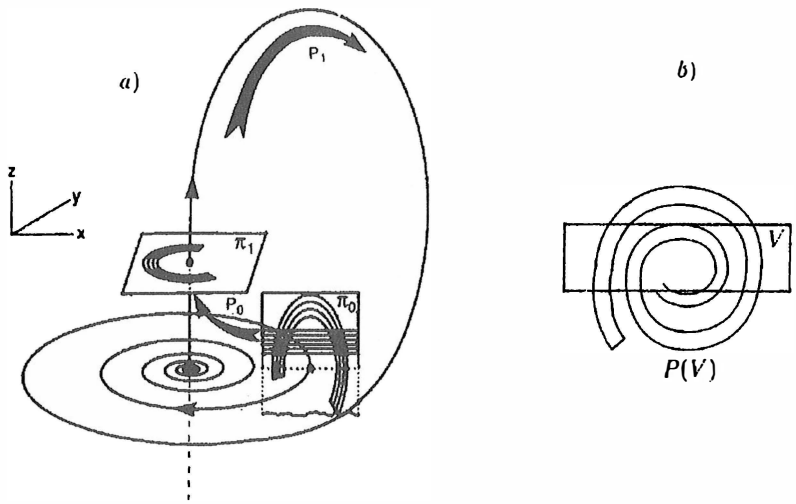


FIG. 4.46 – *Application de Poincaré $P = P_1 \circ P_0$ (à gauche) et le serpent de Silnikov (à droite). D'après [5] et [162].*

sur le plan π_1, appelée *serpent de Silnikov.*

La transformation $P_1 : \pi_1 \to \pi_0$ est un difféomorphisme, par conséquent elle ne change pas la nature du serpent de Silnikov ; elle fait subir seulement à celui-ci une rotation et une translation :

$$x_1 = \rho \cos(\theta + a) + b, \quad z_1 = \rho \sin(\theta + a) + c,$$

où a, b, c sont des constantes. D'où, d'après (4.143) :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 \left(\frac{z_0}{h}\right)^{\delta} \cos\left[\xi \log\left(\frac{z_0}{h}\right) + a\right] + b, \\ z_1 &= x_0 \left(\frac{z_0}{h}\right)^{\delta} \sin\left[\xi \log\left(\frac{z_0}{h}\right) + a\right] + c, \end{aligned}$$

avec $\delta = |\alpha/\beta|$ et $\xi = \omega/\beta$. On en déduit que si $\delta < 1$, la transformation de Poincaré P sera stable et P est alors une transformation de type fer à cheval. □

Exemple 4.7.5 Pour le système de Lorenz (1.193), Froyland et Alfsen [61] ont trouvé une orbite de Silnikov pour C^- à $\sigma = 10$, $b = 0.5$ et $r = 233.99$ dessinée sur la figure 4.47.

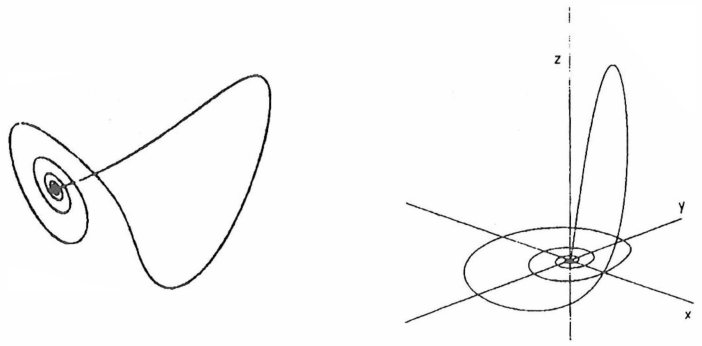


FIG. 4.47 – *Orbites de Silnikov du système de Lorenz (à gauche) et du système de Rössler (à droite). D'après [61] et [124].*

Exemple 4.7.6 Soit le système de Rössler :

$$\dot{x} = -(y+z), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = bx + z(x-c). \tag{4.145}$$

L'équation caractéristique au point fixe $x = y = z = 0$ s'écrit :

$$\lambda^3 + (c-a)\lambda^2 + (1+b-ac)\lambda + c - ab = 0.$$

Nicolis [124] a trouvé, à $a = 0.38$, $b = 0.3$, $c = 4.82$, une orbite de Silnikov (figure 4.47). Lorsque c décroît jusqu'à $c = 4.5$, on obtient un attracteur chaotique (figure 2.19).

4.8 L'intermittence ou l'antichambre du chaos

La route vers le chaos par intermittence a été découverte par Pomeau et Manneville [137].

4.8.1 Le mécanisme

Considérons l'application logistique (3.16) :

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1-x_n) \tag{4.146}$$

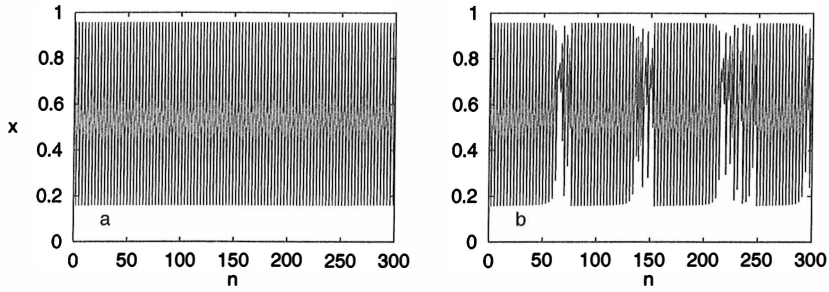


FIG. 4.48 – *Séries temporelles de l'applications logistique au voisinage de* $r_c = 1 + \sqrt{8}$ *: a)* $r = 3.82842 = r_c$*. b)* $r = 3.82812 < r_c$*.*

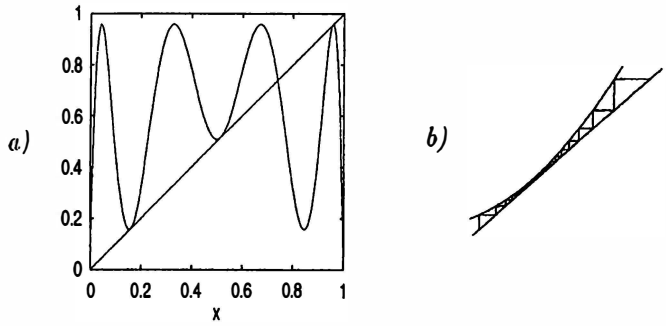


FIG. 4.49 – *a) Graphe de* $f_r^3(x)$ *à :* $r = r_c = 1 + \sqrt{8} = 3.82842$*.*
b) Agrandissement de la partie centrale de a) pour $r = 3.82812$*.*

au début de la fenêtre de période 3, c'est-à-dire au voisinage de $r = r_c = 1 + \sqrt{8} \approx 3.82842$. Les figures 4.48a et 4.48b montrent les séries temporelles de x_n en fonction de n pour $r = 3.82842 = r_c$ et $r = 3.82812 < r_c$ respectivement. Ces courbes ont été tracées par le programme 4.12 avec $x_0 = 0.5$.

Sur la figure 4.48a, on a une courbe périodique de période 3 parfaitement stable. Par contre, on peut voir sur la figure 4.48b) des phases de stabilité (*phases laminaires*) interrompues par des bouffées chaotiques, d'où le nom d'*intermittence* donné à ce phénomène [137], [13].

L'explication est donnée sur les figures 4.49a et 4.49b. Sur le graphe 4.49a il y a trois points fixes qui deviennent instables à $r < r_c$. Si $r_c - r$ est très petit, les itérés successifs de $x = 0.5$ s'accumulent dans le canal étroit séparant le graphe et la première bissectrice (voir figure 4.49b), d'où une phase laminaire suivie par du chaos. On observe une succession de phase laminaire-bouffée chaotique s'il y a réinjection dans le canal.

4.8.2 Longueur moyenne de la phase laminaire

La longueur moyenne de la phase laminaire, en fonction de $\epsilon r - r_c$, peut être calculée de la façon suivante [145]. Les points x_c et r_c sont donnés par les équations :

$$\frac{d}{dx} f_{r_c}^3(x_c) = 1, \quad f_{r_c}^3(x_c) = x_c.$$

Le développement de Taylor autour de x_c et r_c s'écrit :

$$f_r^3(x) = f_r^3[x_c + (x - x_c)] = x_c + (x - x_c) + a_c(x - x_c)^2 + b_c(r - r_c) + \cdots \tag{4.147}$$

avec

$$a_c = \frac{1}{2}\frac{d^2 f_r^3}{dx^2}(x_c, r_c), \quad b_c = \frac{df_r^3}{dr}(x_c, r_c).$$

Portant (4.147) dans :

$$x_{n+1} = f_r^3(x_n), \tag{4.148}$$

on obtient :

$$y_{n+1} = y_n + a y_n^2 + \epsilon, \tag{4.149}$$

où l'on a posé :

$$y = (x - x_c)/b_c, \quad \epsilon = r - r_c, \quad a = a_c b_c.$$

Lorsque $|y| < c << 1$, on peut remplacer (4.149) par l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dn} = \epsilon + a y^2 \tag{4.150}$$

où n est le nombre d'itérations dans la phase laminaire. L'intégration de (4.150) donne :

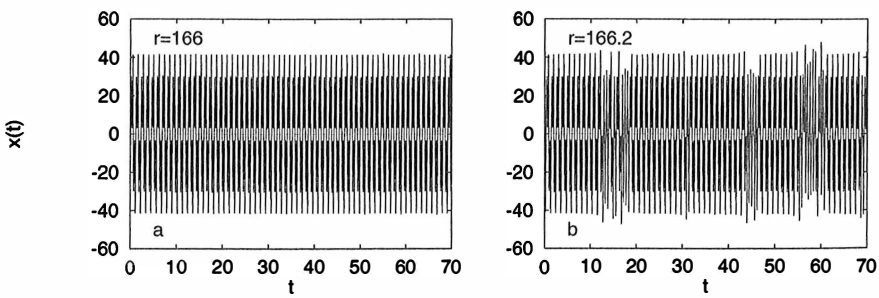


FIG. 4.50 – *La coordonnée $x(t)$ du système de Lorenz au voisinage de $r_c = 166$: a) $r = 166$. b) $r = 166.2$.*

$$n = \frac{1}{\sqrt{a\epsilon}} \arctan \frac{y_+}{\sqrt{\epsilon/a}} - \arctan \frac{y_-}{\sqrt{\epsilon/a}}, \tag{4.151}$$

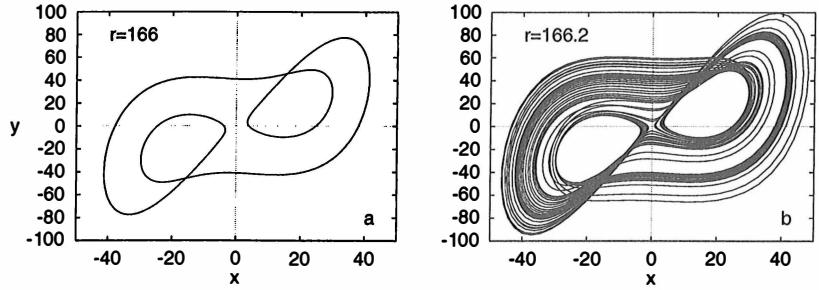


FIG. 4.51 – *Projection des orbites du système de Lorenz sur le plan* (x, y) *:* *a)* $r = 166$. *b)* $r = 166.2$.

où y_- et y_+ correspondent respectivement au début et à la fin de la phase laminaire. Pour déterminer la longueur moyenne de la phase laminaire $< n >$, on suppose que, ayant quitté la région laminaire en $y_+ = c$, le point sera réinjecté, après une période chaotique, dans la région $|y| < c$ en y_-, avec une probabilité $P(y_-)$ symétrique par rapport à x_c $(P(y_-) = P(-y_-))$:

$$< n > = \int_{-c}^{+c} dy_- P(y_-) n(c, y_-) \tag{4.152}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a\epsilon}} \arctan \frac{c}{\sqrt{\epsilon/a}}. \tag{4.153}$$

Si $c/\sqrt{\epsilon/a} >> 1$, alors :

$$< n > \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

4.8.3 Classification des intermittences

Il y a trois façons pour qu'un point fixe $x_0 = 0$ de l'application itérée $x_{n+1} = f(x_n)$ perde sa stabilité (voir la section 3.2). On en déduit les trois types d'intermittence suivants :

- Type I : $x_{n+1} = \epsilon + x_n + \beta x_n^2$, une valeur propre réelle de $Df(0)$ traverse le cercle unité à $+1$. La longueur moyenne de la phase laminaire est : $< n > \approx 1/\sqrt{\epsilon}$. L'intermittence de l'application logistique est donc de type I.

- Type II : $\rho_{n+1} = (1 + \epsilon)\rho_n + \beta\rho_n^3$, $\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega$, deux valeurs propres complexes conjuguées de $Df(0)$ traversent le cercle unité simultanément. Ce type d'intermittences a été observé dans des travaux numériques sur la croissance cristalline en zone flottante [29]. La longueur moyenne de la phase laminaire, $< n > \approx 1/\epsilon$ [145].

- Type III : $x_{n+1} = -(1+\epsilon)x_n - \beta x_n^3$, une valeur propre réelle de $Df(0)$ traverse le cercle unité à -1. Ces intermittences ont été observées pour la première fois en convection de Bénard dans une petite cavité rectangulaire [13]. La longueur moyenne de la phase laminaire, $< n > \approx 1/\epsilon$ [145].

Exemple 4.8.1 Etudions maintenant le comportement du système de Lorenz au voisinage de $r = r_c = 166$. Les séries temporelles $x(t)$ à $r = 166$ et $r = 166,1$ sont calculées par un programme analogue au programme 4.1. Pour $r = 166$, des conditions initiales prises au hasard conduisent, après des transitoires, à des oscillations parfaitement régulières, comme on peut le constater dans le graphe de $x(t)$ (Cf. Figure 4.50a). Pour r légèrement supérieur à r_c (Cf. Figure 4.50b), les oscillations de $x(t)$ sont interrompues par des bouffées chaotiques qui deviennent de plus en plus fréquentes à mesure que r croît (La projection des trajectoires sur le plan (x, y) est présentée sur la figure 4.51). La figure 4.52 montre l'application de premier retour où l'on porte l'ordonnée y_{n+1} d'un point en fonction de l'ordonnée y_n du point immédiatement antérieur quand $y(t)$ traverse le plan $x = 0$. Ceci montre que l'intermittence du modèle de Lorenz est de type I.

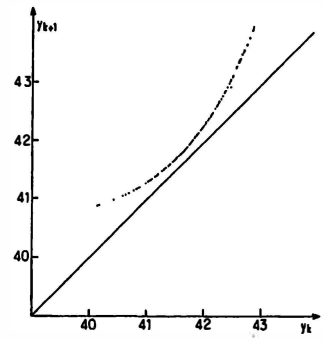


FIG. 4.52 – *Application de Poincaré du système de Lorenz pour* $r = 166.2$. *D'après Pomeau et Manneville [13].*

4.9 Programmes

Programme 4.1 *Le programme suivant calcule la série temporelle du pendule forcé :*

```
PROGRAM time_series;
USES dos,crt,graph;
CONST MAX=3;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
var Y0,Y1 : vecteur;
    j,k,l,a0,b0,Ux,Uy,Ni,Nt : integer;
    N,i : longint;
    t,h,w,A,hx,hy,gamma : real ;
    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
```

```
BEGIN
   YPRIME[1]:= Y[2] ;
   YPRIME[2]:= -gamma*Y[2]-sin(Y[1]) + A*cos(Y[3]);
   YPRIME[3]:= w ;
END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
clrScr;
(*amortissement gamma:=0.5, phase w := 2/3 *)
writeln(' Entrez gamma, valeur de depart 0.5 :');
readln(gamma);
writeln('entrez la phase w, valeur de depart 2/3');
readln(w);
(* Periodique : A=0.9, chaotique :  A=1.15  *)
writeln('entrez la valeur de A, valeur de depart 1.5 :');
readln(A);
writeln('entrez le nombre d"iterations initiales <= 20000 :');
readln(Ni);
writeln('entrez le nombre d"iterations N, exemple : 500000 :');
readln(N);
(* Valeurs initiales : *)
(*  g=0.9; Y0[1]:=1.5;Y0[2]:=0.0;Y0[3]:=0.0; *)
writeln('Entrez les valeurs initiales, exemple : 0 1.5 0');
readln(Y0[1],Y0[2],Y0[3]);
h := 2*Pi/6000; t:=0.0;
  writeln;writeln; writeln('    UN INSTANT..... ');
{Prendre la procedure RUNGE_KUTTA du programme 1.1}
   FOR i:=1 TO Ni DO
    BEGIN
      RUNGE_KUTTA(Y0);
      t:= t+h ;
        If Abs(Y0[1]) > Pi then
        Y0[1]:=Y0[1] - 2*Pi*Y0[1]/Abs(Y0[1]);
    END;
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=0.0;   Xmax:=800.0;
   Ymin:=-2*Pi;   Ymax:=2*Pi;
      a0 := 50;  b0 := maxY div 2 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0);   (* axe des x *)
      line (a0,0,a0,maxY);   (* axe des y  *)
        (* Unites des axes : *)
      Ux := round(100*maxX /(Xmax - Xmin));
      Uy := round(maxY /(Ymax - Ymin));
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
         k:=a0 ;
         l:=round((Y0[2]-Ymin)/hy) ;
         moveto(k,maxY-l);
         t:=0;
   FOR i:=1 TO N DO
    BEGIN
```

```
      RUNGE_KUTTA(Y0);
      t:=t+h;
        If Abs(Y0[1]) > Pi then
        Y0[1]:=Y0[1] - 2*Pi*Y0[1]/Abs(Y0[1]);
      NT:= i mod 500 ;
      IF(NT = 0) THEN
      BEGIN
         k:=a0+round(t/hx) ;
         l:=round((Y0[2]-Ymin)/hy) ;
         lineto(k,maxY-l);
     END;
     END;
 OutTextXY(50,10, ' Serie temporelle : ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 4.1.

Programme 4.2 (****** SPECTRE DE PUISSANCE *****/

```
Equation du pendule amorti entretenu :
dX/dt = Y
dY/dt = -gamma*Y -sin(X) + A*cos(Z)
dZ/dt =w
********** par l'algorithme FFT ********

Transformation de Fourier discrete pour
       f(x+T) = f(x), T=N*dt :
        N=2^10=1024, Ln10:logarithme decimal
        df=1/(N*dt),
        Algorithme FFT
************************************************)
PROGRAM SPECTRE ;
USES dos,crt,graph;
CONST MAX=3; N=1024; Nu=10;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
         TAB = ARRAY[0..N] OF REAL;
var Y0 : vecteur;
    j,k,l,a0,b0,Ux,Uy,Ni,Np,Ux1,Uy1 : integer;
    t,h,w,A,hx,hy,gamma,dt,S0 : real ;
Procedure Fourier;
var  Xreel,Ximaginaire : tab;
     i : longint; ip :integer;  fs:text;
PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
BEGIN
   YPRIME[1]:= Y[2] ;
   YPRIME[2]:= -gamma*Y[2]-sin(Y[1]) + A*cos(Y[3]);
   YPRIME[3]:= w ;
```

```
END;
procedure FFT(VAR Xreel,Ximaginaire : Tab) ;
VAR N2, NU1, P, i, j, k, l : INTEGER;
    Arg, Treel, Timaginaire : REAL;
Function Inversion_Binaire (k,Nu:INTEGER) : INTEGER;
VAR i,j, k_tilda : INTEGER;
    BEGIN      k_tilda := 0;
     for i:=1 to Nu do
     BEGIN     j := k div 2 ;
     k_tilda := k_tilda *2 + (k-2*j);
     k := j ;
    END;
    Inversion_Binaire := k_tilda;
    END;
BEGIN        (* FFT  *)
     N2 := N div 2;     NU1 := NU-1;
     k := 0 ;     for l:=1 to Nu do
     BEGIN
       WHILE (k < N) do
     BEGIN
     for i := 1 to N2 do
     BEGIN
     p := Inversion_Binaire(k div N2,Nu);
     Arg := 2*pi*p/N ; (* L'argument de w^p *)
     Treel := Xreel[k+N2]*cos(Arg)+Ximaginaire[k+N2]*sin(Arg);
     Timaginaire := Ximaginaire[k+N2]*cos(Arg)
                                -Xreel[k+N2]*sin(Arg);
     Xreel[k+N2] := Xreel[k]-Treel;
     Ximaginaire[k+N2] := Ximaginaire[k]-Timaginaire;
     Xreel[k] := Xreel[k]+Treel;
     Ximaginaire[k] := Ximaginaire[k]+Timaginaire;
                 k:=k+1;
     END;        k := k+N2;     END;
        k := 0;  NU1 := NU1 - 1 ;  N2 := N2 div 2 ;
      END;
          for k := 0 to N-1 do
      BEGIN
        i := Inversion_Binaire(k,Nu) ;
         if i > k then
          BEGIN
            Treel := Xreel[k];
            Timaginaire := Ximaginaire[k];
            Xreel[k] := Xreel[i];
            Ximaginaire[k] := Ximaginaire[i];
            Xreel[i] := Treel;
            Ximaginaire[i] := Timaginaire;
          END;
       END;
   END;   (*  FFT  *)
BEGIN    (* Procedure FOURIER *)
```

```
clrScr;
writeln('Spectre de puissance du pendule force amorti : ');
writeln('dX/dt = Y ');
writeln('dY/dt = -gamma*Y -sin(X) + A*cos(Z) ');
writeln('dZ/dt =w   ');
write(' Entrez la valeur de gamma, valeur de depart 0.5  ');
readln(gamma);
write('entrez la phase w, valeur de depart 0.6666666667  ');
readln(w);
(* Periodique : A=0.9, chaotique : A=1.15  *)
write('entrez la valeur de A, valeur de depart 1.5  ');
readln(A);
write('entrez le nombre d"iterations initiales <= 200  ');
readln(Ni);
(* Valeurs initiales : *)
(*  g=0.9; Y0[1]:=1.5;Y0[2]:=0.0;Y0[3]:=0.0; *)
write('Valeurs initiales ? exemple :  0 1.5 0  ');
readln(Y0[1],Y0[2],Y0[3]);
h := 2*Pi/N;  Np:=100; dt:=h*Np;
  writeln;writeln; writeln('    UN INSTANT..... ');
  writeln('    Calcul des ',Ni,' premieres Iterations ');
   FOR i:=1 TO Ni DO
    BEGIN
   FOR ip:=1 TO Np DO
     BEGIN
{Prendre la procedure RUNGE_KUTTA du programme 1.1}
      RUNGE_KUTTA(Y0);
      If Abs(Y0[1]) > Pi then
        Y0[1]:=Y0[1] - 2*Pi*Y0[1]/Abs(Y0[1]);
     END;    END;
  writeln('    Calcul des ',N,' Iterations suivantes ');
(* Calcul de f_i  : *)
   FOR i:=1 TO N DO
    BEGIN
   FOR ip:=1 TO Np DO
     BEGIN
      RUNGE_KUTTA(Y0);
      If Abs(Y0[1]) > Pi then
        Y0[1]:=Y0[1] - 2*Pi*Y0[1]/Abs(Y0[1]);
     END;
        Xreel[i-1]:=dt*Y0[2]; Ximaginaire[i-1]:=0.0;
    END;
  writeln('    Algorithme FFT ');
  FFT(Xreel,Ximaginaire);
  For i:=0 to N-1 do
  Begin
  Xreel[k]:=Xreel[k]/N; Ximaginaire[k]:=Ximaginaire[k]/N;
  End;
   (* Ecrire les resultats sur Fichier spectr.dat : *)
      Assign(fs,'spectr.dat');
```

```
      rewrite(fs);
        For i:=1 to (N div 2) do
        Begin
          S0 := Xreel[i]*Xreel[i]
                        +Ximaginaire[i]*Ximaginaire[i];
          writeln(fs,S0);
        End;  Close(fs);      END ;
Procedure Graphe ;
var  maxX,maxY : word;
     i :integer;
     Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,S1 : real ;
     S : tab;      fe:text;
BEGIN    (* Procedure Graphe  *)
h := 2*Pi/N;  Np:=100;
  Assign(fe,'spectr.dat');  Reset(fe);
  For i:=1 to (N div 2)  do readln(fe,S[i]);
  Close(fe);
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
  Initialize;
   Xmin:=0.0;   Xmax:=1.0;
   Ymin:=-3.0;   Ymax:=7.0;
      a0 := 50;  b0 := 7*MaxY div 10 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0);      line (a0,0,a0,maxY);
        (* Unites des axes : *)
      Ux := round(maxX /(Xmax - Xmin));
      Uy := round(maxY /(Ymax - Ymin));
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
         k:=a0 ; ;
         S1:=Ln(S[1])/Ln(10.0); l:=b0-round(S1/hy) ;
         moveto(k,l);
        For i:=2 to (N div 2) do
        Begin
         k:=a0+round(i/N/h/Np/hx) ;     (* Deltat=h*Np  *)
         S1:=Ln(S[i])/Ln(10.0); l:=b0-round(S1/hy) ;
         lineto(k,l);
        End;
 OutTextXY(50,10, ' Spectre de puissance de w : ');
  readln;  CloseGraph;   END ;

BEGIN   (* Programme Principal *)
   Fourier ;
   Graphe  ;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 4.3.

Programme 4.3 *Section de Poincaré de Y. Ueda :*

```
PROGRAM Poincare;
USES dos,crt,graph;
CONST MAX=3;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
```

```
var Y : vecteur;
    dZ,h,a,k0,B,hx,hy : real ;
    s,k,l,Np,ip : integer;
    i,N : longint ;    MaxX, MaxY  : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
BEGIN
   YPRIME[1]:= Y[2] ;
   YPRIME[2]:= -k0*Y[2]-Y[1]*Y[1]*Y[1]+B*cos(Y[3]) ;
   YPRIME[3]:= a ;
END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
clrScr;  k0:=0.05; B:=7.5 ;
a:=1.0 ; h:=2.0*pi/1000.0 ;     (* T=2*PI *)
N:=100000; Np:=1000;
Y[1]:=1.0;Y[2]:=0.0;Y[3]:=0.0;
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=-5.0;   Xmax:=5.0;   Ymin:=-10.0;   Ymax:=10.0;
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
FOR i:=1 TO N DO
   BEGIN
FOR ip:=1 TO Np DO
{Prendre la procedure RUNGE_KUTTA du  programme 1.1}
    RUNGE_KUTTA(Y);
    k:=round((Y[1]-Xmin)/hx) ;   l:=round((Y[2]-Ymin)/hy) ;
    PutPixel(k,maxY-l,1);
   END;
OutTextXY(50,10,' Section de Poincare, k=0.05, B=7.5  ');
  readln;  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 4.10

Programme 4.4

```
(***** Systeme Hamiltonien de Henon-Heiles   ********/
x'= p ; y'= q ; p'=-x-2xy ; q'=-y-x*x+y*y
H=(p*p+x*x+q*q+y*y)/2+x*x*y-y*y*y/3 =E=Cte

==== SECTION DE POINCARE x=0 et E donne ==== ********)
PROGRAM Poincare;
USES dos,crt, graph;
CONST MAX=4;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
var Y0,Y1 : vecteur;
    h,hx,hy,E : real ;
    j,k,l,m,a0,b0,Ux,Uy : integer ;
    i,N : longint ;    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
Function f1(x1,x2:real):real;
begin
```

```
   f1:=-x1-2*x1*x2 ;
end;
Function f2(x1,x2:real):real;
begin
   f2:= - x2 - x1*x1 + x2*x2 ;
end;
procedure RUNGE_KUTTA(h:real) ;
var k0,k1,k2,k3,Y2 : vecteur ;
    j:integer;
BEGIN    (*   Runge_Kutta    *)
      k0[1]:=h*Y0[3] ;
      k0[2]:=h*Y0[4] ;
      k0[3]:=h*f1(Y0[1],Y0[2]) ;
      k0[4]:=h*f2(Y0[1],Y0[2]) ;
      For j:=1 to Max do
        Y2[j]:=Y0[j]+k0[j]/2 ;
      k1[1]:=h*Y2[3] ;
      k1[2]:=h*Y2[4] ;
      k1[3]:=h*f1(Y2[1],Y2[2]) ;
      k1[4]:=h*f2(Y2[1],Y2[2]) ;
      For j:=1 to Max do
        Y2[j]:=Y0[j]+k1[j]/2 ;
      k2[1]:=h*Y2[3] ;
      k2[2]:=h*Y2[4] ;
      k2[3]:=h*f1(Y2[1],Y2[2]) ;
      k2[4]:=h*f2(Y2[1],Y2[2]) ;
      For j:=1 to Max do
        Y2[j]:=Y0[j]+k2[j] ;
      k3[1]:=h*Y2[3] ;
      k3[2]:=h*Y2[4] ;
      k3[3]:=h*f1(Y2[1],Y2[2]) ;
      k3[4]:=h*f2(Y2[1],Y2[2]) ;
      For j:=1 to Max do
        Y1[j]:=Y0[j] + (k0[j]+2*k1[j]+2*k2[j]+k3[j])/6 ;
END ;
procedure RUNGE_KUTTA1(h:real) ;
var k0,k1,k2,k3,Y2 : vecteur ;
    j:integer;
BEGIN    (*   Runge_Kutta    *)
      k0[1]:=h ;
      k0[2]:=h*Y0[4]/Y0[3] ;
      k0[3]:=h*f1(Y0[1],Y0[2])/Y0[3] ;
      k0[4]:=h*f2(Y0[1],Y0[2])/Y0[3] ;
      For j:=1 to Max do
        Y2[j]:=Y0[j]+k0[j]/2 ;
      k1[1]:=h ;
      k1[2]:=h*Y2[4]/Y2[3] ;
      k1[3]:=h*f1(Y2[1],Y2[2])/Y2[3] ;
      k1[4]:=h*f2(Y2[1],Y2[2])/Y2[3] ;
      For j:=1 to Max do
```

```
        Y2[j]:=Y0[j]+k1[j]/2 ;
      k2[1]:=h ;
      k2[2]:=h*Y2[4]/Y2[3] ;
      k2[3]:=h*f1(Y2[1],Y2[2])/Y2[3] ;
      k2[4]:=h*f2(Y2[1],Y2[2])/Y2[3] ;
      For j:=1 to Max do
        Y2[j]:=Y0[j]+k2[j] ;
      k3[1]:=h ;
      k3[2]:=h*Y2[4]/Y2[3] ;
      k3[3]:=h*f1(Y2[1],Y2[2])/Y2[3] ;
      k3[4]:=h*f2(Y2[1],Y2[2])/Y2[3] ;
      For j:=1 to Max do
        Y1[j]:=Y0[j] + (k0[j]+2*k1[j]+2*k2[j]+k3[j])/6 ;

END ;
BEGIN    (* Programme principal  *)
h:=1.0E-03; N:=100000;
E:=1/9 ; Y0[2]:= 0 ; Y0[4]:=0;
Y0[3]:= 0.4 ;  Y0[1]:=sqrt(2*E-Y0[3]*Y0[3]);
(*
E:=1/12 ; Y0[2]:= 0 ; Y0[4]:=0;
Y0[3]:= 0.3 ;  Y0[1]:=sqrt(2*E-Y0[3]*Y0[3]);tore
Y0[3]:= 0.06 ;  Y0[1]:=sqrt(2*E-Y0[3]*Y0[3]);hyperbolique
E:=1/8 ; Y0[2]:= 0 ; Y0[4]:=0;
Y0[3]:= 0.3 ,0.37,0.38 ;  Y0[1]:=sqrt(2*E-Y0[3]*Y0[3]);
                                        collier
E:=1/8 ; Y0[2]:= 0 ; Y0[4]:=0;
Y0[3]:= 0.4 ;  Y0[1]:=sqrt(2*E-Y0[3]*Y0[3]); archipel
E:=1/8 ; Y0[2]:= 0 ; Y0[4]:=0;
Y0[3]:= 0.45 ;  Y0[1]:=sqrt(2*E-Y0[3]*Y0[3]); tore KAM
E:=1/9 ; Y0[2]:= 0 ; Y0[4]:=0;
Y0[3]:= 0.4 ;  Y0[1]:=sqrt(2*E-Y0[3]*Y0[3]);tore KAM
*)

(* Solution graphique :  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=-1;   Xmax:=1;
   Ymin:=-1;   Ymax:=1;
      a0 := maxX div 2;  b0 := maxY div 2 ; (* Origine *)
      Ux := round(maxX /(Xmax - Xmin));
      Uy := round(maxY /(Ymax - Ymin));
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;
   hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;

FOR i:=1 TO N DO
BEGIN
FOR m:=1 TO 10 DO
  BEGIN
     RUNGE_KUTTA(h);
```

```
       If (Y1[1] * Y0[1] < 0) then
     BEGIN
      For j:=1 to Max do
        Y0[j]:=Y1[j] ;
      RUNGE_KUTTA1(-Y0[1]);
 (* Plan (py,y) *)
      k:=round((Y1[2]-Xmin)/hx);
      l:=round((Y1[4]-Ymin)/hy);
      PutPixel(k,maxY-l,1);
     END
     ELSE
      For j:=1 to Max do Y0[j]:=Y1[j] ;
   END;
END;
 OutTextXY(50,10, ' Section de Poincare  ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 4.11

Programme 4.5 PROGRAM standard;

```
{Application standard ou de Chirikov : d'apres John Greene
   y1:=y-(k/2Pi)*sin 2 Pi x ; x1:=x+y1 ;
 k=0.95
}
USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,m,l,Ux,Uy : integer;
       i,i1,iter : longint;
    k,x,y,x1,y1 : real ;
    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
    fs:text;
BEGIN    (* Programme principal  *)
      Assign(fs,'stan1.dat');
      rewrite(fs);
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=0;   Xmax:=1;
   Ymin:=0;   Ymax:=1;
        (* Unites des axes : *)
   Ux := round(maxX /(Xmax - Xmin));
   Uy := round(maxY /(Ymax - Ymin));

K := 0.95 ; iter := 10000 ;
(* Valeurs initiales de l'application standard : *)
{
x:=0.0 ; y:=0.5953... ;  a) Tore KAM
x:=0.0 ; y:=0.554 ;      b) Orbite chaotique
x:=0.0 ; y:=0.5 ;        c) Orbite periodique
```

```
x:=0.0 ; y:=0.40395... ; d) Tore KAM
x:=0.0 ; y:=0.27 ;       e) Orbite chaotique
}
x:=0.0 ; y:=0.5953 ;
For i:=1 to iter do
Begin
   y1:=y - k*sin(2*Pi*x)/2/Pi ;
   x1:=x+y1 ;
   If y1>1 then y1:=y1-1; If y1<0 then y1:=y1+1 ;
   If x1>1 then x1:=x1-1; If x1<0 then x1:=x1+1 ;
   x:=x1 ; y:=y1 ;
   m:=round(Ux*x);
   l:=round(Uy*y);
   Putpixel(m,MaxY-l,4);
         writeln(fs,x,' ',y);
End;
     Close(fs);
 OutTextXY(100,10, ' Application standard ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Programme 4.6 *Ce programme dessine à la fois le triangle de Sierpinski et la courbe de Peano. Pour avoir le triangle de Sierpinski, tapez S. Pour avoir la courbe de Peano, tapez P.*

```
Program IFS ;
(* D'apres Michael F. Barnsley, Fractals Everywhere *)

uses
  Crt, Dos, Graph;
CONST N = 100 ;
TYPE  Matrice=Array[0..N,0..N] OF INTEGER;
      Vecteur=Array[1..4] OF REAL;
var
  graphpilote,graphmode : integer;
  palette : palettetype;
  maxX,maxY : word;
  S,S1 : matrice;
  a,b,c,d,e,f : vecteur;
  M,i,j,k,iter : integer;
  h,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,x,y,y1,y2 : real;
      choix : char;

PROCEDURE ITERATION;
var
  i1,j1 : integer;
   BEGIN
  graphpilote := detect ;
```

```
  initgraph(graphpilote,graphmode,'');
     getpalette(palette);
FOR i:=0 TO N DO
FOR j:=0 TO N DO
     S1[i,j] := 0;
  (* On applique les IFS :
    S1[i,j] est l'image de S[i,j] dans la contraction *)
    FOR i:=0 TO N DO
    FOR j:=0 TO N DO
    BEGIN
     IF (S[i,j] = 1) THEN
        BEGIN
   FOR k:=1 TO M DO
   BEGIN
          i1 := round(i*a[k]+j*b[k]+N*e[k]) ;
          j1 := round(i*c[k]+j*d[k]+N*f[k]) ;
          S1[i1 ,j1] := 1;
          PUTPIXEL(i1,MaxY-j1,4);
    END;
        END;
   END;
FOR i:=0 TO N DO
FOR j:=0 TO N DO
    S[i,j] := S1[i,j];
OutTextXY(50,10, ' Pour quitter taper sur ENTER :  ');
  readln;
  CloseGraph;
end; (* ITERATION *)
PROCEDURE SIERPINSKI ;
BEGIN
   M:=3;
(* CODE IFS : *)
   a[1]:=0.5;b[1]:=0;c[1]:=0;d[1]:=0.5;e[1]:=0;f[1]:=0;
   a[2]:=0.5;b[2]:=0;c[2]:=0;d[2]:=0.5;e[2]:=0.5;f[2]:=0;
   a[3]:=0.5;b[3]:=0;c[3]:=0;d[3]:=0.5;e[3]:=0.25;f[3]:=0.5;
   h:=(Ymax-Ymin)/N ;
  (* Initialisation :
 Les 2 cotes du triangle isocele ont pour equation
y1=2x, x=0,...,0.5 et y2=2-2x ,0.5 <=x <= 1
  A l'interieur du triangle S[i,j] = 1,
  a l'exterieur du triangle S[i,j] = 0 *)
FOR i:=0 TO N DO
FOR j:=0 TO N DO
    S[i,j] := 0;  (* Initialisation de S[i,j] *)
FOR i:=0 TO N DO
  BEGIN
      x:=Xmin+h*i ;
     y1 :=2*x ; y2 := 2-2*x ;
     FOR j:=0 TO N DO
     BEGIN
```

```
      y:=Ymin+h*j ;
      (* A l'interieur du triangle : *)
     IF ((y < y1) AND (y < y2)) THEN
       BEGIN
       S[i,j]:=1 ;
       PUTPIXEL(i,MaxY-j,4);
       END;
     END;
  END ;
  (* Fin du dessin du triangle *)

OutTextXY(50,10, ' Pour quitter taper sur ENTER :  ');
  readln;
  CloseGraph;
END;
PROCEDURE PEANO ;
BEGIN
   M:=4;
(* CODE IFS : *)
a[1]:=0;b[1]:=0.5;c[1]:=0.5;d[1]:=0;e[1]:=0;f[1]:=0;
a[2]:=0.5;b[2]:=0;c[2]:=0;d[2]:=0.5;e[2]:=0;f[2]:=0.5;
a[3]:=0.5;b[3]:=0;c[3]:=0;d[3]:=0.5;e[3]:=0.5;f[3]:=0.5;
a[4]:=0;b[4]:=-0.5;c[4]:=-0.5;d[4]:=0;e[4]:=1;f[4]:=0.5;
   h:=(Ymax-Ymin)/N ;
(* Les 2 cotes du triangle isoceles ont pour equation
y1=2x, x=1,...,N/2 et y2=2N-2x ,x=N/2,...,N
  Sur les 2 cotes du triangle S[i,j] = 1,
  a l'exterieur du triangle S[i,j] = 0 *)
FOR i:=0 TO N DO
FOR j:=0 TO N DO
    S[i,j] := 0;  (* Initialisation de S[i,j] *)
 BEGIN
 FOR i:=0 TO N  DO
  BEGIN
     y1 :=2*i ; y2 := 2*N-2*i ;
     FOR j:=0 TO N DO
     BEGIN
     IF ((j = y1) OR (j = y2)) THEN
       BEGIN
       S[i,j]:=1 ;
       PUTPIXEL(i,MaxY-j,4);
       END;
     END;
  END ;
  END; (* Fin du dessin du generateur *)
OutTextXY(50,10, ' Pour quitter taper sur ENTER :  ');
  readln;
  CloseGraph;
END;
```

```
begin { program body }
ClrScr ;
writeln('Sierpinski : taper S, Peano : taper P ');
choix := readkey;
  graphpilote := detect ;
  initgraph(graphpilote,graphmode,'');
     getpalette(palette);
  MaxX := GetMaxX;
  MaxY := GetMaxY;
(* On considere un carre de cote [0,1] : *)
   Xmin:=0;   Xmax:=1;
   Ymin:=0;   Ymax:=1;
   case choix of
     's','S' : SIERPINSKI ;
     'p','P' : PEANO ;
   end;
  (* Exemple : On fait 5 iterations successives : *)
  For iter := 1 to 5 do
  ITERATION;
end.
```

Les résultats sont présentés sur les figures 4.24 et 4.22.

Programme 4.7 PROGRAM Lyapunov;

```
{ L'exposant de Lyapunov en fonction de r
pour l'application logistique f(x)=rx(1-x) }
USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,i,j,l,n,Ni,Ux,Uy : integer;
    lyapu,r,dr,x : real ;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
    MaxX, MaxY  : word;
 Function f (x:real) : real;
    BEGIN
       f := r*x*(1-x) ;
    END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=2.9;   Xmax:=4.0;  Ymin:=-1.0;   Ymax:=1.0;
      a0 := 50;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0);   (* axe des x *)
      line (a0,0,a0,maxY);   (* axe des y  *)
        (* Unites des axes : *)
   Ux := round((maxX-a0-20)/(Xmax - Xmin));
   Uy := round((MaxY - 20)/(Ymax - Ymin));
   n:=500;
   dr:=(Xmax - Xmin)/(MaxX - a0 - 20);
   r:=Xmin;
   (* Calcul du point initial de la courbe : *)
     x:=0.5; lyapu:=0.0;
```

```
      For j:=1 to n do
        Begin
          x:=f(x);
          lyapu := lyapu+Ln(abs(r*(1-2*x))) ;
        End;
          lyapu := lyapu /n/Ln(2);
          l:=round(Uy*lyapu);   Moveto(a0,b0-l);
    For i:=a0+1 to 11*Ux1 do
    Begin
      x:=0.5; lyapu:=0.0;
      For j:=1 to n do
        Begin          x:=f(x);
          lyapu := lyapu+Ln(abs(r*(1-2*x))) ;
        End;
          lyapu := lyapu /n;
          l:=round(Uy*lyapu);   Lineto(i,b0-l);
      r:=r+dr;   End;
 OutTextXY(150,50, ' f(x)=r*x(1-x) : ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 4.31.

Programme 4.8

```
PROGRAM Henon2;
{ Exposant de Lyapunov de l'application de Henon
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;
}
USES dos,crt;
const N=2;
Type vecteur = array[1..N] of real ;
     Matrice = array[1..N,1..N] of real ;
var i : integer;  k, iter : longint ;
    a,b,x,y,x1,y1 : real ;
    v1,v2,w1,w2,lambda,Norm : vecteur ;
    J : Matrice ;
Begin
a:=1.4 ; b:=0.3 ;
(* Valeurs initiales de l'application de Henon : *)
x:=0.0 ; y:=0.0 ;
(* Nombre d'iterations : *)
iter:=10000 ;
(* Composantes initiales des vecteurs v1 et v2 : *)
v1[1]:=1.0 ; v1[2]:=0.0 ; v2[1]:=0.0 ; v2[2]:=1.0 ;
For i:=1 to N do lambda[i]:=0.0  ;
(* Matrice jacobienne : *)
J[1,1]:=-2*a*x ; J[1,2]:=1.0 ; J[2,1]:=b ; J[2,2]:=0.0 ;
For k:=1 to iter do
Begin
   (*  v1 et v2 transforms: *)
```

```
   w1[1]:=v1[1]*J[1,1] + v1[2]*J[1,2] ;
   w1[2]:=v1[1]*J[2,1] + v1[2]*J[2,2] ;
   w2[1]:=v2[1]*J[1,1] + v2[2]*J[1,2] ;
   w2[2]:=v2[1]*J[2,1] + v2[2]*J[2,2] ;
   (* Normalisation de w1 : *)
   Norm[1]:=sqrt(w1[1]*w1[1]+w1[2]*w1[2]) ;
   For i:=1 to N do v1[i]:=w1[i]/Norm[1] ;
   (* Orthogonalisation de Gram-Schmidt : *)
   For i:=1 to N do
   v2[i]:=w2[i] - (w2[1]*v1[1]+w2[2]*v1[2])*v1[i] ;
   Norm[2]:=sqrt(v2[1]*v2[1]+v2[2]*v2[2]) ;
   For i:=1 to N do v2[i]:=v2[i]/Norm[2] ;
   For i:=1 to N do lambda[i]:=lambda[i]+Ln(Norm[i])  ;
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;
   x:=x1 ; y:=y1 ; J[1,1]:=-2*a*x ;
End;
For i:=1 to N do lambda[i]:=lambda[i]/Ln(2)/iter  ;
For i:=1 to N do
       writeln('lambda[',i,'] = ',lambda[i]:6:3) ;
End.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la formule (4.97).

Programme 4.9

```
c   CALCUL DES EXPOSANTS DE LYAPUNOV
c     DU MODELE DE LORENZ
c   ODE : ivprk (Runge-Kutta)
c   Bibliotheques : imsl,disspla
      parameter (n=3,nn=12,nparam=50)
      common/param/r
      dimension param(nparam),y(nn),znorm(n),prod(n)
      dimension zlambda(n),gsc(n)
      external ivprk,fcn,sset
      call sset(nparam,0.0,param,1)
      tol = 1.0e-8
      call sset (nparam, 0.0, param, 1)
      dt = 0.01
      nd=0
c      param(10)= 1.0
      param(4)= 50000
c iter:nombre maximum de pas dt
      iter=20000
      r=45.92
      ido = 1
c   Initial conditions for nonlinear system
      y(1)=10.0
      y(2)=1.0
      y(3)=0.0
c   Initial conditions for linear system
      do 3 i=n+1,nn
```

```
      y(i)=0.0
    3 continue
      do 5 i=1,n
      y((n+1)*i)=1.0
      prod(i)=1.0
    5 continue
      iend=0
      t = 0.0
      tend = 0.0
   10 continue
      iend= iend+1
      tend = tend+dt
      call ivprk(ido,nn,fcn,t,tend,tol,param,y)
      if(ido.eq.3)goto 15
c   CONSTRUCT A NEW ORTHONORMAL BASIS BY GRAM-SCHMIDT METHOD
c   NORMALIZE FIRST VECTOR
      znorm(1)=0.0
      do 30 j=1,n
      znorm(1)=znorm(1)+y(n*j+1)**2
   30 continue
      znorm(1)=sqrt(znorm(1))
      do 40 j=1,n
      y(n*j+1)=y(n*j+1)/znorm(1)
   40 continue

c GENERATE THE NEW ORTHONORMAL SET OF VECTORS
      do 80 j=2,n
c GENERATE j-1 GSR COEFFICIENTS
      do 50 k=1,(j-1)
      gsc(k)=0.0
      do 50 l=1,n
      gsc(k)=gsc(k)+y(n*l+j)*y(n*l+k)
   50 continue
c CONSTRUCT A NEW VECTOR
      do 60 k=1,n
      do 60 l=1,(j-1)
      y(n*k+j)=y(n*k+j)-gsc(l)*y(n*k+l)
   60 continue
      znorm(j)=0.0
      do 70 k=1,n
      znorm(j)=znorm(j)+y(n*k+j)**2
   70 continue
      znorm(j)=sqrt(znorm(j))
c NORMALIZE THE NEW VECTOR
      do 80 k=1,n
      y(n*k+j)=y(n*k+j)/znorm(j)
   80 continue
c UPDATE RUNNING VECTOR MAGNITUDES
      do 90 k=1,n
      prod(k)=prod(k)*znorm(k)
```

```
   90  continue
       if(iend.eq.iter)ido=3
       goto 10
  15   continue
       do 95 k=1,n
       zlambda(k)=alog(prod(k))/alog(2.)/tend
  95   continue
       write(*,1345)(zlambda(i),i=1,n)
 1345 format(3f15.2)
 2000 continue
       stop
       end
       subroutine fcn(n,t,u,f)
       common/param/r
       dimension u(n),f(n)
c  Lorenz equation of motion
       sigma=16.
       b=4.
       f(1)=sigma*(u(2)-u(1))
       f(2)=-u(1)*u(3)+r*u(1)-u(2)
       f(3)=u(1)*u(2)-b*u(3)
c    LINEARIZED EQUATION OF MOTION
       do 10 i=0,2
       f(4+i)=sigma*(u(7+i)-u(4+i))
       f(7+i)=(r-u(3))*u(4+i)-u(7+i)-u(1)*u(10+i)
       f(10+i)=u(2)*u(4+i)+u(1)*u(7+i)-b*u(10+i)
  10   continue
        return
        end
```

Les résultats du programme sont donnés par la formule (4.102).

Programme 4.10

```
c    PLUS GRAND EXPOSANT DE LYAPUNOV,
c    OUTPUT :  x1(nd),y1(nd)
c    ODE : ivprk (Runge-Kutta)
c    Bibliotheques : imsl,disspla
c    MODELE DE LORENZ
       parameter (n=3,nn=12,n2=600,nparam=50)
       common/param/r
       dimension param(nparam),y(nn),znorm(n),prod(n)
       dimension zlambda(n),gsc(n),x1(n2),y1(n2)
       external ivprk,fcn,sset
       call sset(nparam,0.0,param,1)
       tol = 1.0e-8
       call sset (nparam, 0.0, param, 1)
       dt = 0.01
       nd=0
c       param(10)= 1.0
```

```
      param(4)= 50000
c iter:nombre maximum de pas dt
      iter=10000
      write(*,*)'entrez r, dr,nrmax '
c     EXEMPLE r=160, dr=0.1, nrmax=600
      read(*,*)r,dr,nrmax
c  dr:pas, nrmax:nombre de dr
 1000 continue
      if(nd.eq.nrmax) goto 2000
      nd=nd+1
      ido = 1
c   Initial conditions for nonlinear system
      y(1)=0.0
      y(2)=1.0
      y(3)=0.0
c   Initial conditions for linear system
      do 3 i=n+1,nn
      y(i)=0.0
   3  continue
      do 5 i=1,n
      y((n+1)*i)=1.0
      prod(i)=1.0
   5  continue
      iend=0
      t = 0.0
      tend = 0.0
 10   continue
      iend= iend+1
      tend = tend+dt
      call ivprk(ido,nn,fcn,t,tend,tol,param,y)
      if(ido.eq.3)goto 15
c   CONSTRUCT A NEW ORTHONORMAL BASIS BY GRAM-SCHMIDT METHOD
c   NORMALIZE FIRST VECTOR
      znorm(1)=0.0
      do 30 j=1,n
      znorm(1)=znorm(1)+y(n*j+1)**2
  30  continue
      znorm(1)=sqrt(znorm(1))
      do 40 j=1,n
      y(n*j+1)=y(n*j+1)/znorm(1)
  40  continue
c GENERATE THE NEW ORTHONORMAL SET OF VECTORS
      do 80 j=2,n
c GENERATE j-1 GSR COEFFICIENTS
      do 50 k=1,(j-1)
      gsc(k)=0.0
      do 50 l=1,n
      gsc(k)=gsc(k)+y(n*l+j)*y(n*l+k)
  50  continue
c CONSTRUCT A NEW VECTOR
```

```
      do 60 k=1,n
      do 60 l=1,(j-1)
      y(n*k+j)=y(n*k+j)-gsc(l)*y(n*k+l)
   60 continue
      znorm(j)=0.0
      do 70 k=1,n
      znorm(j)=znorm(j)+y(n*k+j)**2
   70 continue
      znorm(j)=sqrt(znorm(j))
c NORMALIZE THE NEW VECTOR
      do 80 k=1,n
      y(n*k+j)=y(n*k+j)/znorm(j)
   80 continue
c UPDATE RUNNING VECTOR MAGNITUDES
      do 90 k=1,n
      prod(k)=prod(k)*znorm(k)
   90 continue
c  iter: nombre maximum de pas dt
      if(iend.eq.iter)ido=3
      goto 10
  15  continue
      do 95 k=1,n
      zlambda(k)=alog(prod(k))/tend
  95  continue
      x1(nd)=r
      y1(nd)=zlambda(1)
      write(*,1345)x1(nd),y1(nd)
      r=r+dr
      goto 1000
 2345 format(1x,' reel=',f12.8,' imag=',f12.8)
 1345 format(2e22.15)
 2000 continue
      stop
      end
      subroutine fcn(n,t,u,f)
      common/param/r
      dimension u(n),f(n)

c  Lorenz equation of motion
      sigma=10.
      b=8./3.
      f(1)=sigma*(u(2)-u(1))
      f(2)=-u(1)*u(3)+r*u(1)-u(2)
      f(3)=u(1)*u(2)-b*u(3)
c   LINEARIZED EQUATION OF MOTION
      do 10 i=0,2
      f(4+i)=sigma*(u(7+i)-u(4+i))
      f(7+i)=(r-u(3))*u(4+i)-u(7+i)-u(1)*u(10+i)
      f(10+i)=u(2)*u(4+i)+u(1)*u(7+i)-b*u(10+i)
  10  continue
```

```
        return
        end
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 4.33.

Programme 4.11 PROGRAM Homocline;

```
{Points homoclines de l'Application  :
   x1:=x+y+k*x(x-1) ; y1:=y+k*x(x-1) ;
Application inverse : x=x1 - y1 ; y=y1-a*x(x-1)
Couleur 1:bleu, 2:vert, 4:rouge}
USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,j,k,l,Ni,Ux,Uy,Ux1,Uy1,tx,ty : integer;
       i,iter : integer;
    a,x,y,x1,y1 : real ;
    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
Procedure Directe;
var u,v,eps : real;
    i1 : integer;
Begin
eps:=0.001  ; u:=0.0 ;
For i1:=1 to 300 do
 Begin
   u:=u-eps ; v:=u*(-a+sqrt(a*(4+a)))/2 ;
   x:=1+u ;
   y:=v ;
   (* Nombre d'itrations : *)
   iter:=10 ;
   For i:=1 to iter do
   Begin
     y1:= y+a*x*(x-1); x1:=x+y1 ;
     x:=x1 ; y:=y1 ;
     k:=round(Ux*x);
     l:=round(Uy*y);
     Putpixel(a0+k,b0-l,4);
   End;
 End;
End;
Procedure Inverse;
var u,v,eps : real;
    i1,i2 : integer;
Begin
eps:=0.0001 ;  u:=-0.03 ;
For i1:=1 to 300 do
Begin
u:=u+eps ; v:=u*(-a-sqrt(a*(4+a)))/2 ;
x:=1+u ;
y:=v ;
(* Nombre d'iterations : *)
iter:=10 ;
For i:=1 to iter do
```

```
Begin
   x1:=x-y ; y1:= y-a*x1*(x1-1);
   x:=x1 ; y:=y1 ;
   k:=round(Ux*x);
   l:=round(Uy*y);
   Putpixel(a0+k,b0-l,1);
End;
End;
End;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=-2; Xmax:=2;
   Ymin:=-2; Ymax:=2;
   a0 := MaxX div 2;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
(*      line (0,b0,maxX,b0);
      line (a0,0,a0,maxY);     *)
        (* Units des axes : *)
   Ux := round((maxX - 20)/(Xmax - Xmin));
   Uy := round((maxY - 20)/(Ymax - Ymin));
      outtextXY (a0,b0,'0.0');
      line (a0+Ux,b0,a0+Ux,b0+5);
      tx := a0+Ux; ty := b0;
      outtextXY (a0+Ux,b0,'1.0');
a:=1.5 ;
(* Valeurs initiales  : *)
Directe ;
Inverse ;
 OutTextXY(100,10, ' Points homoclines ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 4.39

Programme 4.12

```
PROGRAM Bifurcation;
USES dos,crt,graph;
var i,k,l,N,tx,ty : integer;
    r,x,Ux,Uy : real ;
    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
    fs:text;
Function f (x:real) : real;
    BEGIN
    f := r*x*(1-x) ;
    END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
      Assign(fs,'serie.dat');
      rewrite(fs);
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
```

```
Initialize;
Xmin:=0;   Xmax:=300;
   Ymin:=-2.0;   Ymax:=2.0;
        (* Units des axes : *)
   Ux := maxX/(Xmax - Xmin); Uy := maxY/(Ymax - Ymin);
   N:=300;
(*   r:=3.82842  ; *)
   r:=3.82812  ;   x:=0.5 ;
         l:=round((x-Ymin)*Uy) ;
         moveto(0,maxY-l);
   For i:=1 to N do
   Begin
         x:=f(x);
         k:=round((i-Xmin)*Ux) ;
         l:=round((x-Ymin)*Uy) ;
         lineto(k,maxY-l);
         writeln(fs,i,' ',x);
   End;
 OutTextXY(50,10, ' Serie temporelle de r*x(1-x) ');
  readln;  Close(fs);  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 4.48.

4.10 Exercices

(Les réponses sont données à l'Annexe A)

Exercice 4.1 Résonance (n_1, n_2) [139]. On considère le hamiltonien à deux degrés de liberté :

$$H = H_0(j_1, j_2) + \epsilon H_1(j_1, j_2)\cos(n_1\theta_1 - n_2\theta_2) = E \tag{4.154}$$

où $\epsilon \ll 1$ et $j_1, j_2, \theta_1, \theta_2$ sont des variables d'action-angle.

1) Montrer que ce hamiltonien possède une seconde intégrale du mouvement :

$$I = n_2 j_1 + n_1 j_2 = \text{ Cte} \tag{4.155}$$

quel que soit $H_0(j_1, j_2)$. H est donc intégrable et on dit que H possède une résonance (n_1, n_2).

2) On considère la résonance $(2, 2)$ suivante :

$$H = H_0(j_1, j_2) + \alpha j_1 j_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) = E, \tag{4.156}$$

avec $\alpha \ll 1$ et

$$H_0(j_1, j_2) = j_1 + j_2 - j_1^2 - 3j_1 j_2 + j_2^2. \tag{4.157}$$

Effectuer une transformation canonique :

$$J_1 = j_1 + j_2, \quad J_2 = j_2, \quad \Theta_1 = \theta_2, \quad \Theta_2 = \theta_2 - \theta_1 \tag{4.158}$$

et étudier la nature des points fixes du nouveau système hamiltonien.

3) On considère la résonance (2, 3) suivante :

$$H = H_0(j_1, j_2) + \beta j_1 j_2^{3/2} \cos(2\theta_1 - 3\theta_2) = E \tag{4.159}$$

où $H_0(j_1, j_2)$ est donné par (4.157) et $\beta \ll 1$. Effectuer une transformation canonique :

$$j_1 = J_1 - \frac{2}{3}J_2, \quad j_2 = J_2, \quad \theta_1 = \Theta_1, \quad \theta_2 = \Theta_2 + \frac{2}{3}\Theta_1 \tag{4.160}$$

et étudier la nature des points fixes du nouveau système hamiltonien.

4) On considère le hamiltonien à deux résonances suivant :

$$H = H_0(j_1, j_2) + \alpha j_1 j_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + \beta j_1 j_2^{3/2} \cos(2\theta_1 - 3\theta_2) = E \tag{4.161}$$

$\alpha, \beta \ll 1$. Ecrire les équations hamiltoniennes et dessiner les sections de Poincaré dans le plan (q_2, p_2) avec $p_2 = -(2j_2)^{1/2} \sin\theta_2$ et $q_2 = (2j_2)^{1/2} \cos\theta_2$, $\theta_1 = 3\pi/2$, $\alpha = \beta = 0.02$ et a) $E = 0.056$, b) $E = 0.18$, c) $E = 0.2$, d) $E = 0.2095$.

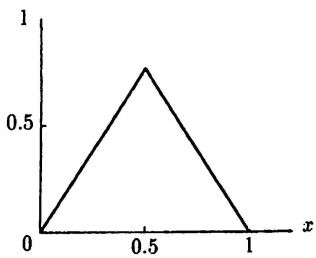


FIG. 4.53 – *L'application tente.*

Exercice 4.2 On considère l'application itérée $x_{n+1} = f(x_n)$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2a(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{4.162}$$

(application tente, en anglais tent map) [138].

1) Montrer que $x = 0$ est un point fixe stable si $a < 1/2$, instable si $a > 1/2$. Montrer que si $a > 1/2$, l'application possède en plus un point fixe non nul, instable. Que se passe-t-il quand $a = 1/2$?

2) Calculer l'exposant de Lyapunov de l'application tente et dessiner son diagramme de bifurcation.

Exercice 4.3 Soit un triangle équilatéral de côté 1. On divise chaque côté en trois parties égales et on construit trois nouveaux triangles équilatéraux sur les tiers centraux (Cf. figure 4.54). On répète cette opération une infinité de fois et on obtient à la limite l'étoile de von Koch.

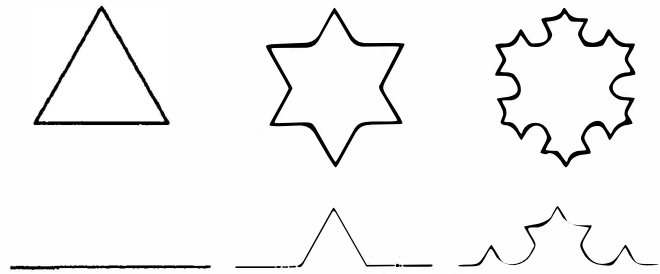


FIG. 4.54 – *Etoile de von Koch et courbe de von Koch.*

a) Montrer que l'étoile de von Koch est une courbe fermée de longueur infinie entourant une surface finie.

b) Calculer la dimension fractale de l'étoile de von Koch.

c) Ecrire un programme Turbo-Pascal qui dessine l'étoile de von Koch. La figure 4.54 (bas) présente la construction de la "courbe de von Koch". Ecrire un programme Turbo-Pascal qui dessine la courbe de von Koch.

Exercice 4.4 Calculer la dimension fractale de l'ensemble de Cantor a deux dimensions (Cf. fig. 4.55. Cet ensemble est analogue à l'ensemble invariant du Fer à cheval de Smale) [9].

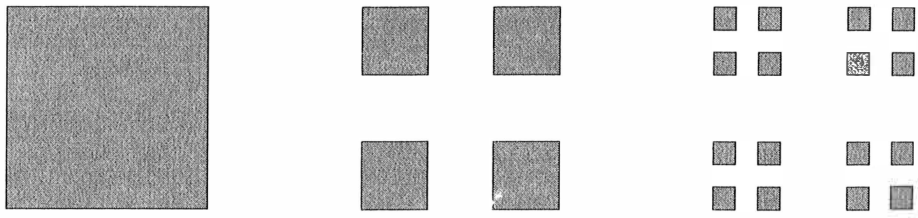


FIG. 4.55 – *L'ensemble de Cantor à deux dimensions.*

Exercice 4.5 On considère l'application de Hénon :

$$x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k, \quad y_{k+1} = bx_k.$$

1) On suppose que $a = 1.4$, $b = 0.3$. Dessiner les exposants de Lyapunov en fonction du nombre d'iérations n ($1 \leq n \leq 10000$).

2) On suppose que $b = 0.3$. Dessiner le plus grand exposant de Lyapunov en fonction de a ($0 \leq a \leq 1.4$).

Exercice 4.6 On considère l'application itérée [96]:

$$M : x_{k+1} = \lambda^{-1} x_k + \cos t_k, \quad t_{k+1} = \beta t_k \bmod (2\pi) \tag{4.163}$$

avec $0 < \lambda < 1$, $\beta > 1/\lambda$.

1) Trouver la matrice jacobienne de M. En déduire que M ne possède pas d'attracteur fini.

2) Montrer que tout couple (x,t) tel que $M^n(x,t)$ reste fini quand $n \to \infty$, vérifie la relation suivante :

$$x = f(t) = -\sum_{l=0}^{\infty} \lambda^{l+1} \cos(\beta^l t). \tag{4.164}$$

3) Montrer que la fonction $f(t)$ est continue mais n'a pas de dérivée (fonction de Weierstrass).

Exercice 4.7 On considère l'endomorphisme du cercle (3.62) :

$$f(x) = x + a - \left(\frac{K}{2\pi}\right) \sin(2\pi x) \mod 1.$$

1) Dessiner les diagrammes de bifurcation à $K = 2.7$ et $K = 3.0$ avec $-0.5 \leq a \leq 0.5$ et $-0.5 \leq x \leq 0.5 \mod 1$.

2) Dessiner les exposants de Lyapunov à $K = 2.7$ et $K = 3.0$, en fonction de a $(0.5 \leq a \leq 0.5)$.

Exercice 4.8 On considère l'application :

$$x \to bx(1-2y) + y, \quad y \to 4y(1-y), \quad 0 < b < 1, \tag{4.165}$$

(Application de Lauwerier [105]). Trouver les points fixes et leurs variétés stable et instable (Pour trouver les variétés instables des points fixes on effectue le changement de variables $2bx = b - (1-b)u$, $2y = 1 - v$).

Exercice 4.9 On considère le système [27] :

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= \mu_1 - \frac{1}{2}u_0^2 - |z|^2, \\ \dot{z} &= (-\mu_2 + i\omega)z + u_0 z + |z|^2 z \text{ et c. c.} \end{aligned} \tag{4.166}$$

où $z = u_1 + iu_2$ et $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2)$ sont les variables de l'espace des phases et μ_1, μ_2 sont des variables de bifurcation.

1) Montrer qu'il existe une variété centrale en $\mathbf{u} = (0,0,0)$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$? Quelle est sa dimension?

2) Faire le changement de coordonnées :

$$x = u_0, \quad z = u_1 + iu_2 = y \exp i\theta. \tag{4.167}$$

a) Que peut-on déduire de l'équation sur la phase θ quant au mouvement?

b) Montrer que les équations sur x, y ont la forme :

$$\dot{x} + p(x, y^2, \mu_1, \mu_2) = 0, \quad \dot{y} + yq(x, y^2, \mu_1, \mu_2) = 0 \tag{4.168}$$

avec $p(0) = p_x(0) = q(0) = 0$. Quels sont les points fixes du système (4.168)?

c) Etudier la stabilité des points fixes de l'axe des x en fonction des paramètres μ_1 et μ_2.

d) Montrer qu'une matrice $A(2 \times 2)$ possède deux valeurs propres purement imaginaires si les deux conditions suivantes sont remplies : trace $A = 0$, det $A > 0$.

Dans le cas de la courbe des points fixes pour lesquels $y \neq 0$, chercher les valeurs de μ_2 qui correspondent à une bifurcation de Hopf (on supposera la condition de transversalité vérifiée).

3) Effectuer une transformation d'échelles :

$$x = \epsilon u, \quad y = \epsilon v, \quad \tau = \epsilon t, \quad \mu_1 = \epsilon^2, \quad \mu_2 = \epsilon^2 \beta$$

et montrer que (4.168) peut se mettre sous la forme (4.118). Utiliser la méthode de Melnikov pour montrer qu'à $\beta = 9/4$ il existe une orbite hétérocline rejoignant les deux points fixes de l'axe des x [27].

Exercice 4.10 On cherche à résoudre l'équation de Ginzburg-Landau :

$$\dot{A} = RA + (1 + i\nu)\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - (1 + i\mu)|A|^2 A \tag{4.169}$$

par le développement de Fourier [111] :

$$A(x,t) = e^{i\theta(t)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_n(t) e^{i2\pi n x} \tag{4.170}$$

avec $W_0 = a_0$, $W_n = (b_{|n|} + ic_{|n|})/2$ pour $n \neq 0$ (voir [111]).

Ecrire le système d'équations donnant W_n et θ. Application : $\nu = -\mu = 4$, $n = 3$, $R = 43.74$ et

$$A(x,0) = R^{1/2}(1 + 0.02\cos(2\pi x)).$$

Chapitre 5

Problème des trois corps

Le Problème des trois corps a une telle importance pour l'Astronomie, et il est en même temps si difficile, que tous les efforts des géomètres ont été depuis longtemps dirigés de ce côté.

H. Poincaré

Ce chapitre est entièrement consacré au problème classique des trois corps. Après avoir posé les équations du mouvement, nous étudions, dans les référentiels sidéral et synodique, le problème dit restreint plan dans lequel le mouvement des trois particules se fait dans un plan, deux ayant un mouvement circulaire et la troisième étant de masse nulle. La réduction de Birkhoff permet d'écrire les équations du mouvement de la particule 3 (de masse nulle) sous la forme d'un système différentiel d'ordre 3 dépendant de deux paramètres. Nous étudions les points d'équilibre, encore appelés points de Lagrange, ainsi que les courbes de vitesse nulle dans le référentiel synodique. Pour pouvoir étudier le mouvement de la particule 3 au voisinage des deux autres (points singuliers), il convient de remplacer le sytème par un système équivalent qui soit régulier en un des deux points (régularisation locale) ou en ces deux points (régularisation globale). Les transformations de Levi-Civita sont des régularisations locales, la transformarion de Birkhoff est une régularisation globale.

Les orbites périodiques symétriques sont étudiées par leur section de Poincaré. La stabilité de ces orbites est directement liée à celle des points invariants de la transformation de Poincaré ; nous donnons la méthode pour calculer les courbes de stabilité des différentes classes. L'étude des orbites n-périodiques peut être ramenée à celle d'orbites simples périodiques. Nous avons illustré ceci sur le cas de l'orbite 6-périodique.

Le problème de Sitnikov, de même que l'intersection des variétés stables et instables des orbites homoclines du problème restreint, présentent des applications du fer à cheval de Smale.

5.1 Equations du mouvement

5.1.1 Equations du mouvement par rapport au centre de gravité

Considérons trois points matériels P_1, P_2, P_3 de masses m_1, m_2, m_3 en intéraction gravitationnelle. L'étude de leur mouvement constitue ce qu'il est convenu d'appeler le problème des trois corps. Soit $Gxyz$ un système de coordonnées fixe issu du centre de gravité G des masses m_i. Si l'on définit un potentiel U par:

$$U = g \sum_{1 \le j < k \le 3} \frac{m_j m_k}{r_{jk}} \equiv g\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right), \tag{5.1}$$

où x_i, y_i, z_i sont les coordonnées de P_i, $i = 1, 2, 3$, g désigne la constante de gravitation et $r_{jk} = [(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2]^{1/2}$, les équations du mouvement dans le système $Gxyz$ seront données par la loi de Newton (voir par exemple [14]):

$$(a) \quad m_k \ddot{x}_k = U_{x_k}, \quad (b) \quad m_k \ddot{y}_k = U_{y_k}, \quad (c) \quad m_k \ddot{z}_k = U_{z_k}. \tag{5.2}$$

où $(\dot{\cdot}) = (d/dt)$ et $U_{x_k}, U_{y_k}, U_{z_k}$ désignent les dérivées partielles par rapport à x_k, y_k, z_k respectivement. Au système (5.2), il convient d'ajouter les trois conditions:

$$\sum_{k=1}^{3} m_k x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k y_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k z_k = 0 \tag{5.3}$$

qui expriment que G est le centre de gravité (ou barycentre) des masses m_i et les trois conditions:

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \dot{x}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k \dot{y}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k \dot{z}_k = 0 \tag{5.4}$$

qui expriment la conservation des quantités de mouvement. De plus, on déduit de (5.2) les systèmes suivants:

$$\sum_{k=1}^{3} m_k(y_k \ddot{z}_k - z_k \ddot{y}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k(z_k \ddot{x}_k - x_k \ddot{z}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k(x_k \ddot{y}_k - y_k \ddot{x}_k) = 0.$$

D'où, en intégrant, on obtient des équations qui expriment la constance du moment angulaire:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{3} m_k(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = c_1, \quad \sum_{k=1}^{3} m_k(z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = c_2, \\ &\sum_{k=1}^{3} m_k(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = c_3 \end{aligned} \tag{5.5}$$

où c_1, c_2, c_3 sont des constantes d'intégration, appelées constantes des aires. On démontre (voir par exemple [148]) que "s'il y a triple collision alors $c_1 = c_2 = c_3 = 0$" (Théorème de Sundman).

Enfin, multiplions (5.2a) par $\dot{x}_k$, (5.2b) par $\dot{y}_k$ et (5.2c) par $\dot{z}_k$, puis ajoutons membre à membre les trois expressions obtenues. Il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{3} m_k(\dot{x}_k^2+\dot{y}_k^2+\dot{z}_k^2)=\dot{U}. \tag{5.6}$$

On en déduit l'intégrale de Jacobi :

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} m_k(\dot{x}_k^2+\dot{y}_k^2+\dot{z}_k^2)=U+h, \tag{5.7}$$

où h est la constante de Jacobi. Tenant compte de (5.3), (5.4) (5.5) et (5.7) le système (5.2) est un système d'ordre $18-10=8$.

Remarque 5.1.1 Désignons les coordonnées des points P_1, P_2, P_3 par $q_1, q_2, \ldots, q_9$, en posant $x_k = q_{3k-2}$, $y_k = q_{3k-1}$, $z_k = q_{3k}$, $(k = 1,2,3)$. De même, posons $m_k\dot{x}_k = p_{3k-2}$, $m_k\dot{y}_k = p_{3k-1}$, $m_k\dot{z}_k = p_{3k}$ et

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} m_k\left(\dot{x}_k^2+\dot{y}_k^2+\dot{z}_k^2\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{p_k^2}{m_1}+\frac{p_{k+3}^2}{m_2}+\frac{p_{k+6}^2}{m_3}\right).$$

Les équations (5.2) prennent alors la forme hamiltonienne :

$$\dot{q}_k = E_{p_k}, \quad \dot{p}_k = -E_{q_k}, \quad (k=1,\ldots,9), \tag{5.8}$$

avec $E = T - U$.

5.1.2 Equations du mouvement par rapport à P_1

Dans beaucoup de problèmes (comme le système Terre, Lune, Vaisseau spatial ci-dessous), il est plus pratique de prendre le centre du corps 1 comme origine des coordonnées. Nous posons donc :

$$\begin{aligned} X_2 &= x_2-x_1, \quad Y_2=y_2-y_1, \quad Z_2=z_2-z_1,\\ X_3 &= x_3-x_1, \quad Y_3=y_3-y_1, \quad Z_3=z_3-z_1, \end{aligned}$$

et le système (5.2) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_2 &= -g(m_1+m_2)\frac{X_2}{r_2^3}-gm_3\frac{X_2-X_3}{r_{23}^3}-gm_3\frac{X_3}{r_3^3},\\
\ddot{Y}_2 &= -g(m_1+m_2)\frac{Y_2}{r_2^3}-gm_3\frac{Y_2-Y_3}{r_{23}^3}-gm_3\frac{Y_3}{r_3^3},\\
\ddot{Z}_2 &= -g(m_1+m_2)\frac{Z_2}{r_2^3}-gm_3\frac{Z_2-Z_3}{r_{23}^3}-gm_3\frac{Z_3}{r_3^3},\\
\ddot{X}_3 &= -g(m_1+m_3)\frac{X_3}{r_3^3}-gm_2\frac{X_3-X_2}{r_{32}^3}-gm_2\frac{X_2}{r_2^3},\\
\ddot{Y}_3 &= -g(m_1+m_3)\frac{Y_3}{r_3^3}-gm_2\frac{Y_3-Y_2}{r_{32}^3}-gm_2\frac{Y_2}{r_2^3},\\
\ddot{Z}_3 &= -g(m_1+m_3)\frac{Z_3}{r_3^3}-gm_2\frac{Z_3-Z_2}{r_{32}^3}-gm_2\frac{Z_2}{r_2^3},
\end{aligned} \tag{5.9}$$

avec $r_{23} = [(X_2 - X_3)^2 + (Y_2 - Y_3)^2 + (Z_2 - Z_3)^2]^{1/2}$, $r_i = [X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2]^{1/2}$, $i = 2, 3$.

Exemple 5.1.1 Le programme Turbo-Pascal 5.1 calcule la trajectoire d'un vaisseau spatial, de coordonnées (X_3, Y_3, Z_3), lancé de la Terre (coordonnées $(0, 0, 0)$))vers la Lune (coordonnées (X_2, Y_2, Z_2)). La figure 5.1 illustre les résultats numériques du programme.

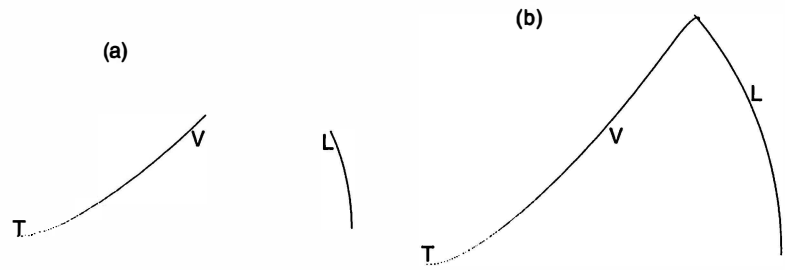


FIG. 5.1 – *Problème Terre (T)-Lune (L)-Vaisseau-spatial (V) : (a) t = 1j 13h 30m (b) t = 3j 3h.*

Remarque 5.1.2 Dans le cas à deux dimensions, lorsqu'il y a collision entre m_1 et m_2 par exemple, le système (5.9) est singulier. Pour régulariser le système, on effectue au voisinage du point de collision la transformation suivante :

$$X_2 + iY_2 = (u_2 + iv_2)^2, \quad \frac{dt}{d\tau} = u_2^2 + v_2^2 \quad \text{(Levi-Civita)}.$$

Exemple 5.1.2 Considérons trois masses $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 5$ dans le plan (x, y). A $t = 0$ les coordonnées des trois masses sont $(1, 3)$, $(-2, -1)$, $(1, -1)$ respectivement et les vitesses sont nulles (Problème pythagoréen [154]). On vérifie facilement que l'origine est le centre de gravité du système. La figure 5.2 montre les orbites des trois masses entre $t = 0$ et $t = 10$ (avec $g = 1$). Le tableau suivant donne les temps t où deux des masses sont très proches l'une de l'autre et où la régularisation est nécessaire [154].

Tableau 5.1 : Les approches entre $t = 0$ et $t = 10$.

temps	distance	entre
$t_1 = 1.879$	10^{-2}	m_2, m_3
$t_2 = 3.801$	6×10^{-2}	m_2, m_3
$t_3 = 8.760$	8×10^{-3}	m_2, m_3

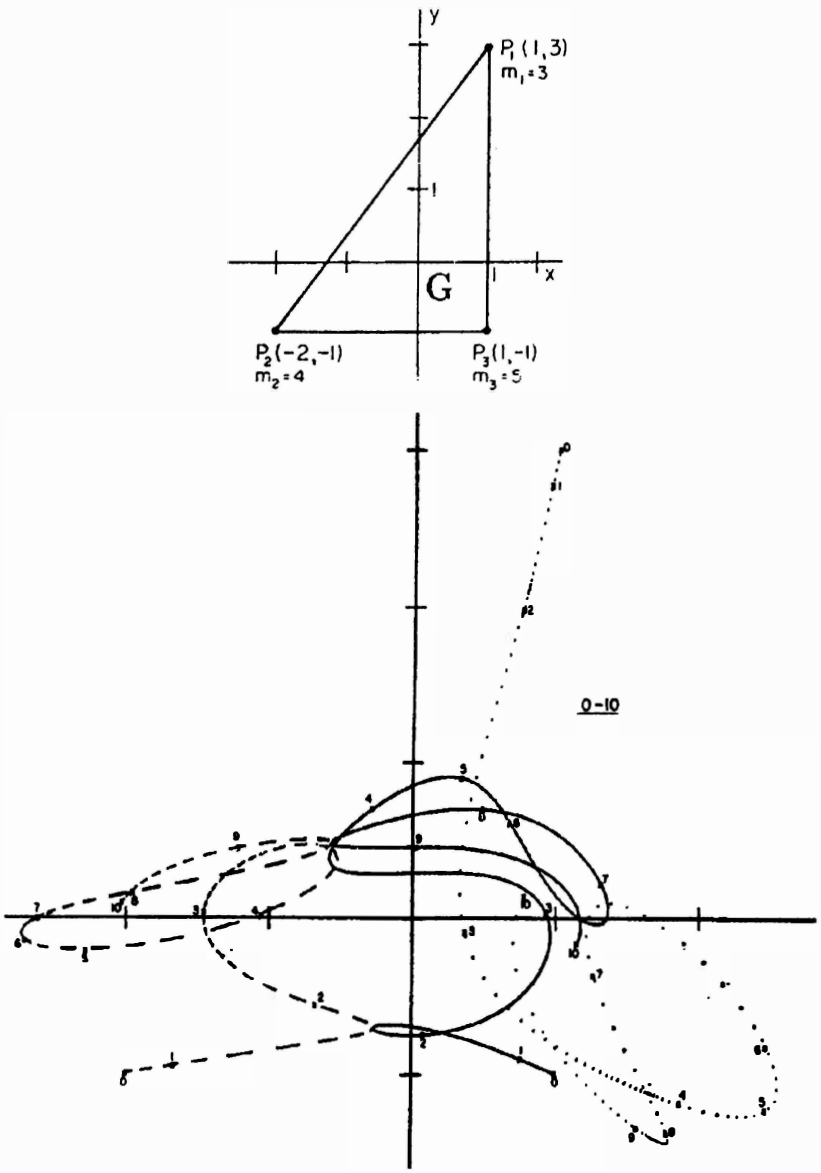


FIG. 5.2 – *Problème pythagoréen : orbites entre* $t = 0$ *et* $t = 10$. *D'après [154].*

5.2 Problème restreint plan des trois corps

5.2.1 Equations du mouvement dans le système sidéral

Supposons la masse m_3 si petite qu'elle n'ait aucune influence sur les mouvements des deux autres (c'est le cas du vaisseau spatial de l'exemple précédent). Le centre de gravité G du système est alors le centre de gravité de P_1, P_2 (appelés *primaires*). Le mouvement relatif de P_2 autour de P_1 est un problème des deux corps dont on connaît la solution. On admet que les conditions initiales ont été choisies de façon que ce mouvement relatif soit un mouvement circulaire uniforme. On suppose enfin que le mouvement de P_3 est restreint au plan du mouvement circulaire de P_2. Choisissons, dans ce plan, un système de coordonnées fixe Gxy (appelé *système sidéral*). On choisit l'unité de masse pour que $m_1 + m_2 = 1$, l'unité de longueur pour que la distance P_1P_2 soit égale à 1 et l'unité de temps pour que $g = 1$. Dans ce cas, selon le problème des deux corps, les coordonnées de P_1 et P_2 sont respectivement $(m_2 \cos t, m_2 \sin t)$ et $(-m_1 \cos t, -m_1 \sin t)$. Les primaires tournent donc autour de G à une vitesse angulaire constante $\omega_0 = 1$. Soient (x, y) les coordonnées de P_3 par

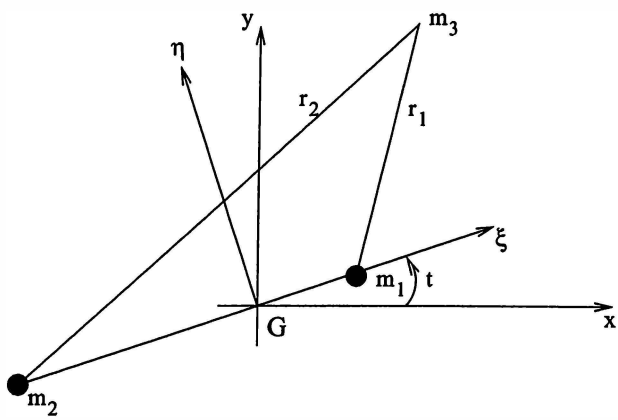


FIG. 5.3 – *Système fixe ou sidéral* (x, y) *et système tournant ou synodique* (ξ, η).

rapport au système sidéral Gxy, les équations du mouvement de P_3 s'écrivent alors, d'après (5.2) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -m_1\frac{(x - m_2\cos t)}{r_1^3} - m_2\frac{(x + m_1\cos t)}{r_2^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -m_1\frac{(y - m_2\sin t)}{r_1^3} - m_2\frac{(y + m_1\sin t)}{r_2^3}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{31} = [(x - m_2\cos t)^2 + (y - m_2\sin t)^2]^{1/2}, \\ r_2 &= r_{32} = [(x + m_1\cos t)^2 + (y + m_1\sin t)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire (5.10) sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = V_y, \tag{5.11}$$

avec

$$V(x,y,t) = \frac{m_1}{[(x-m_2\cos t)^2+(y-m_2\sin t)^2]^{1/2}} + \frac{m_2}{[(x+m_1\sin t)^2+(y+m_1\sin t)^2]^{1/2}}. \tag{5.12}$$

A ces équations du mouvement, il faut ajouter l'équation des forces vives déduites de (5.7) :

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - V(x,y,t) = \text{ const.} \tag{5.13}$$

Les équations (5.10) ou (5.11) sont les équations du problème restreint des trois corps dans le *système sidéral*. Posant $a = \dot{x}$, $b = \dot{y}$, on peut aussi écrire (5.10) sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial a}, \quad \frac{da}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial b}, \quad \frac{db}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

où

$$H(x,y,a,b,t) = \frac{1}{2}(a^2+b^2) - V(x,y,t) \tag{5.14}$$

est le hamiltonien dépendant du temps.

5.2.2 Equations du mouvement dans le système synodique

Choisissons un système $G\xi\eta$ (appelé *système synodique*), d'origine G et tournant autour de G à une vitesse angulaire $\omega_0 = 1$, les corps P_1 et P_2 étant situés sur l'axe $G\xi$ aux points d'abscisses respectives μ et $-(1-\mu)$ (figure 5.3). La transformation des coordonnées est donc :

$$x = \xi\cos t - \eta\sin t \quad y = \xi\sin t + \eta\cos t \tag{5.15}$$

ou, si l'on pose $z = x+iy$, $\zeta = \xi+i\eta$:

$$z = \zeta e^{it}. \tag{5.16}$$

Les équations (5.10) deviennent, en posant $m_2 = \mu$, $m_1 = 1-\mu$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} - \xi = -(1-\mu)\frac{\xi-\mu}{r_1^3} - \mu\frac{\xi+1-\mu}{r_2^3}, \tag{5.17}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} - \eta = -(1-\mu)\frac{\eta}{r_1^3} - \mu\frac{\eta}{r_2^3}, \tag{5.18}$$

$$r_1 = [(\xi-\mu)^2+\eta^2]^{1/2}, \quad r_2 = [(\xi+1-\mu)^2+\eta^2]^{1/2}. \tag{5.19}$$

On peut aussi écrire le système (5.17)-(5.18) sous forme complexe :

$$\ddot{\zeta} + 2i\dot{\zeta} - \zeta = -(1-\mu)\frac{\zeta-\mu}{|\zeta-\mu|^3} - \mu\frac{\zeta+1-\mu}{|\zeta+1-\mu|^3}. \tag{5.20}$$

Si l'on définit une fonction $\Omega(\xi,\eta)$ par :

$$\Omega(\xi,\eta) = \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \tag{5.21}$$

le système (5.17)-(5.18) s'écrira simplement :

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_\xi, \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_\eta, \tag{5.22}$$

ou sous forme complexe :

$$\ddot{\zeta} + 2i\dot{\zeta} = \operatorname{grad}_\zeta \Omega \equiv \Omega_\xi + i\Omega_\eta \tag{5.23}$$

avec

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2}|\zeta|^2 + \frac{1-\mu}{|\zeta-\mu|} + \frac{\mu}{|\zeta+1-\mu|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu). \tag{5.24}$$

La constante $\frac{1}{2}\mu(1-\mu)$ apparaissant dans (5.21) n'a pas d'influence sur les équations (5.22) mais permet d'écrire $\Omega(\xi,\eta)$ sous la forme suivante :

$$\Omega(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2\right] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \tag{5.25}$$

r_1 et r_2 (définis par (5.19)) sont appelés les coordonnées *bipolaires* du point (ξ,η).

Multiplions la première équation de (5.22) par $\dot{\xi}$ et la deuxième équation de (5.22) par $\dot{\eta}$, puis ajoutons membre à membre, il vient :

$$\ddot{\xi}\dot{\xi} + \ddot{\eta}\dot{\eta} = \dot{\Omega}.$$

On en déduit, en intégrant, l'égalité de Jacobi :

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Omega(\xi,\eta) - C = 2U(\xi,\eta), \tag{5.26}$$

ou

$$|\dot{\zeta}|^2 = 2\Omega(\zeta) - C, \tag{5.27}$$

où la constante d'intégration C est appelée *constante de Jacobi* et $U(\xi,\eta) = \Omega(\xi,\eta) - C/2$.

Le système (5.22) est un système hamiltonien à deux degrés de liberté, *indépendant* du temps. En effet, posons :

$$\alpha = \dot{\xi} - \eta, \quad \beta = \dot{\eta} + \xi, \quad (\dot{}) = \frac{d}{dt}$$

le système (5.22) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \beta - \xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \quad \dot{\beta} = -\alpha - \eta + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \\ \dot{\xi} &= \alpha + \eta, \quad \dot{\eta} = \beta - \xi. \end{aligned}$$

Définissons maintenant le hamiltonien :

$$H(\xi,\eta;\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\alpha+\eta)^2 + \frac{1}{2}(\beta-\xi)^2 - \Omega(\xi,\eta),$$

alors le système précédent peut se mettre sous la forme hamiltonienne :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \dot{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \\ \dot{\eta} &= \frac{\partial H}{\partial \beta}, \quad \dot{\beta} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Remarque 5.2.1 On reconnaît, aux premiers membres de (5.17)-(5.18), les termes correspondant à la force de Coriolis et à la force centrifuge. Les équations (5.17)-(5.18) sont les célèbres équations du problème restreint plan des trois corps. Poincaré les considérait comme le prototype du problème hamiltonien non intégrable à deux degrés de liberté. Les travaux de Levi-Civita et de Birkhoff en Dynamique sont aussi issus de ces équations.

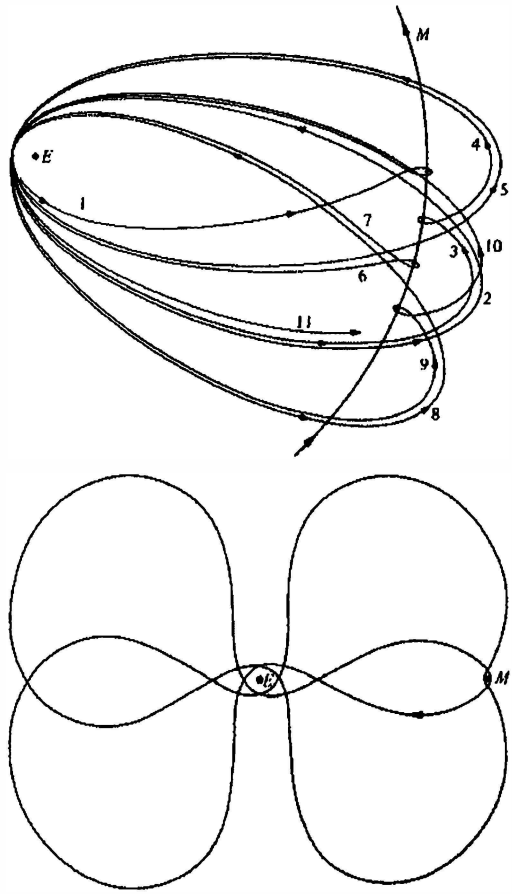


FIG. 5.4 – *Système Terre (E), Lune (M) ($\mu = 0.012277471$) et Vaisseau spatial dans le système sidéral (en haut) et dans le système synodique (en bas). D'après [2].*

La figure 5.4 montre l'orbite d'un Vaisseau spatial dans les systèmes sidéral et synodique (projet "Bus-orbits" d'Arenstorf pour la NASA [2]).

5.2.3 Résonance k:l

Considérons l'équation du problème des trois corps sous forme complexe (5.20). Quand $\mu = 0$ (système non perturbé), la solution de (5.20) est bien connue et peut être représentée par $\zeta(t) = e^{-it}z(t)$, (voir la formule (5.16) et la figure 5.3), où la fonction complexe $z(t) = x(t)+iy(t)$ décrit le mouvement képlérien, dans le système fixe Gxy (ou sidéral), et est solution de l'équation :

$$\ddot{z} = -z|z|^{-3}. \tag{5.28}$$

Si, par exemple (Cf. Exercice 5.1) $z(0) = r_0$, $\dot{z}(0) = iv_0$ avec $1 < r_0^2 v_0^2 < 2$, $z(t)$ décrit une ellipse d'excentricité $e = r_0 v_0^2 - 1$, de demi-grand axe $a = r_0/(1-e)$, ayant l'origine G comme foyer et $z(0)$ comme distance minimale à G (distance du péricentre). La période de $z(t)$, dans le plan fixe Gxy, est :

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}, \text{ avec } |\omega| = a^{-\frac{3}{2}}.$$

$\zeta(t)$ sera périodique, dans le système tournant $G\xi\eta$, si et seulement si ω est rationnel, c'est-à-dire $\omega = k/l$ où k et l sont des entiers relatifs premiers entre eux avec $l > 0$ et $k > 0$ (resp. $k < 0$) si $z(t)$ est direct (resp. rétrograde), i. e. signe k = signe v_0 (Cf. fig. A.38). L'orbite synodique se referme après $|k|$ périodes sidérales : $|k|T = 2\pi k/\omega = 2\pi l$. La période synodique sera donc :

$$T^* = |k|T = 2\pi l. \tag{5.29}$$

On dit que l'on a une résonance $k : l$.

La formule (5.29) n'est valable que dans le cas où la solution de (5.28) est elliptique ($e \neq 0$). Dans le cas où la solution de (5.28) est un cercle :

$$z(t) = ae^{i\omega t}, \text{ avec } |\omega| = a^{-\frac{3}{2}}, \tag{5.30}$$

la solution de (5.20) est aussi un cercle :

$$\zeta(t) = ae^{i(\omega-1)t}.$$

On en déduit immédiatement :

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}, \quad T^* = \frac{2\pi}{|\omega - 1|}$$

ω peut être rationnel ou irrationnel. Si $\omega = k/l$, on a aussi une résonance $k : l$.

R. F. Arenstorf a démontré [4] que, par continuation analytique, il existe aussi des solutions périodiques pour des petites valeurs de μ. Selon la terminologie de Poincaré, les orbites $\zeta(t)$ obtenues par continuation analytique des orbites circulaires sont appelées orbites périodiques de *première sorte* tandis que celles qui sont générées par les solutions elliptiques de (5.28) sont appelées orbites périodiques de *deuxième sorte.*

La figure 5.5 montre une continuation analytique de l'orbite elliptique $\mu = 0$, $e = 0.3$, $k = 3$ et $l = 1$. On en déduit $a = (3)^{-2/3} = 0.480749844$ et, d'après la formule (A.112) de l'Annexe A, $C = 3.4029327$. La continuation analytique est obtenue en gardant C fixe. L'orbite de la figure 5.4 est aussi une orbite de deuxième sorte.

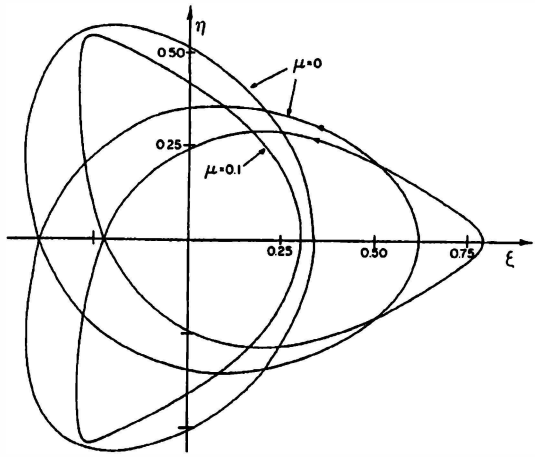


FIG. 5.5 – *Continuation de l'orbite $\mu = 0$, résonance 3 : 1 à $\mu = 0.1$, avec $C = 3.4029327$ fixe. D'après [153].*

5.3 Réduction de Birkhoff

Soit s la longueur d'arc le long d'une trajectoire c'est-à-dire $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$, on a alors :

$$\dot{s}^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Omega - C = v^2, \quad (\cdot) = \frac{d}{dt}$$

où $v(\xi, \eta) = [\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2]^{1/2}$ est la vitesse du corps trois. Birkhoff a remarqué que si l'on définit une nouvelle variable ζ par :

$$\zeta = \arctan \frac{d\eta}{d\xi}, \tag{5.31}$$

alors :

$$\frac{d\xi}{ds} = \cos\zeta, \quad \frac{d\eta}{ds} = \sin\zeta, \tag{5.32}$$

et

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{ds}\dot{s} = v(\xi,\eta)\cos\zeta, \quad \dot{\eta} = \frac{d\eta}{ds}\dot{s} = v(\xi,\eta)\sin\zeta. \tag{5.33}$$

De plus, on déduit de (5.31) : $\zeta = \arctan \dot{\eta}/\dot{\xi}$, d'où :

$$\dot{\zeta} = \frac{\ddot{\eta}\dot{\xi} - \dot{\eta}\ddot{\xi}}{\dot{s}^2}. \tag{5.34}$$

Eliminons $\ddot{\xi}$ et $\ddot{\eta}$ par (5.22) puis remplaçons $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ par leur valeur tirée de (5.33), nous obtenons :

$$\dot{\zeta} = -2 - \frac{\partial v}{\partial \xi}\sin\zeta + \frac{\partial v}{\partial \eta}\cos\zeta.$$

Le système (5.22) avec l'intégrale de Jacobi (5.26) est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v(\xi,\eta)\cos\zeta, \\ \dot{\eta} &= v(\xi,\eta)\sin\zeta, \\ \dot{\zeta} &= -2 - \frac{\partial v}{\partial \xi}\sin\zeta + \frac{\partial v}{\partial \eta}\cos\zeta, \end{aligned} \tag{5.35}$$

avec

$$v(\xi,\eta) = [2\Omega(\xi,\eta) - C]^{1/2}. \tag{5.36}$$

(5.35) est un système différentiel d'ordre 3 dépendant des deux paramètres μ et C.

5.4 Points de Lagrange et courbes de vitesse nulle

Le satellite scientifique Cobras-Samba sera positionné au "point de Lagrange Terre-Soleil", situé à 1,5 million de kilomètres de la Terre.

Le Monde du 17 Avril 1996.

5.4.1 Les points d'équilibre de Lagrange

Les points d'équilibre (appelés aussi points de Lagrange ou points de libration) du système (5.22) dans le plan $G\xi\eta$ sont donnés par :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0. \tag{5.37}$$

Si l'on écrit Ω sous la forme (5.21), le système (5.37) s'écrira :

$$\xi - \frac{(1-\mu)(\xi-\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(\xi+1-\mu)}{r_2^3} = 0, \tag{5.38}$$

$$\eta\left(1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3}\right) = 0. \tag{5.39}$$

Le système (5.38)-(5.39) possède cinq solutions : trois sur l'axe $G\xi$ (solutions collinéaires), désignées par L_1, L_2, L_3 et deux formant des triangles équilatéraux avec m_1, m_2 (solutions triangulaires ou équilatérales) et désignées par L_4, L_5. Si $r_1 = r_2 = 1$, $\eta \neq 0$, le système (5.38)-(5.39) est identiquement vérifié. On en déduit les deux points de Lagrange L_4, L_5 en résolvant le système :

$$r_1^2 = (\xi-\mu)^2 + \eta^2 = 1, \quad r_2^2 = (\xi-\mu+1)^2 + \eta^2 = 1.$$

On obtient :

$$L_4 = (\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad L_5 = (\mu - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

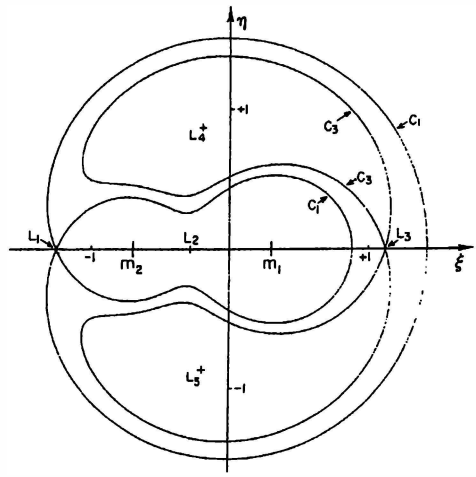


FIG. 5.6 – *Points de Lagrange et deux courbes de vitesse nulle pour* $\mu = 0.3$ *avec* $C = C_1 = 2\Omega(L_1)$ *et* $C = C_3 = 2\Omega(L_3)$. *D'après [153].*

(Cf. figure 5.6). Les abscisses des points L_1, L_2, L_3 sur l'axe $G\xi$ sont solutions de (5.38) qui, avec $\eta = 0$, s'écrit :

$$\xi + \frac{1-\mu}{(\xi-\mu)^2} + \frac{\mu}{(\xi+1-\mu)^2} = 0, \tag{5.40}$$

ce qui nous amène à résoudre une équation algébrique d'ordre cinq :

$$X^5 + (3-\mu)X^4 + (3-2\mu)X^3 - \mu X^2 - 2\mu X - \mu = 0 \tag{5.41}$$

où l'on a posé $X = \mu - \xi - 1$. On peut résoudre (5.41) par itération :

$$X^3 = \frac{\mu(1+X)^2}{3-2\mu+X(3-\mu+X)},$$

en partant de la valeur initiale $X = 0$. Les solutions ξ_1, ξ_2, ξ_3 de (5.40) sont dans les intervalles suivants :

$$\mu - 2 \leq \xi_1 \leq \mu - 1, \quad \mu - 1 \leq \xi_2 \leq \mu, \quad \mu \leq \xi_3 \leq \mu + 1 \tag{5.42}$$

(Cf. figure 5.6).

5.4.2 Stabilité des points d'équilibre

L'étude de la stabilité s'effectue suivant une procédure classique. On écrit d'abord (5.22) sous la forme d'un système de quatre équations différentielles du premier ordre

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \tag{5.43}$$

en posant :

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi, \quad x_3 = \dot{\xi}, \\ x_2 &= \eta, \quad x_4 = \dot{\eta}. \end{aligned}$$

L'équation (5.43) linéarisée s'écrit alors :

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{x}) \tag{5.44}$$

avec

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega_{\xi\xi} & \Omega_{\xi\eta} & 0 & 2 \\ \Omega_{\xi\eta} & \Omega_{\eta\eta} & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.45}$$

où $\Omega_{\xi\xi}, \Omega_{\xi\eta}, \Omega_{\eta\eta}$ sont calculés aux points d'équilibre. Leurs valeurs aux points d'équilibre sont données par le tableau suivant.

Tableau 5.2 : Valeurs de $\Omega_{\xi\xi}$, $\Omega_{\xi\eta}$, $\Omega_{\eta\eta}$ aux points de Lagrange.

	$\Omega_{\xi\xi}$	$\Omega_{\xi\eta}$	$\Omega_{\eta\eta}$
L_1	$1+2s$	0	$1-s$
L_2	$1+2s$	0	$1-s$
L_3	$1+2s$	0	$1-s$
L_4	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}(2\mu-1)$	$\frac{9}{4}$
L_5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}(2\mu-1)$	$\frac{9}{4}$

où l'on a posé

$$s = \frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3} \tag{5.46}$$

La matrice (5.45) a pour équation caractéristique :

$$\lambda^4 + (4 - \Omega_{\xi\xi} - \Omega_{\eta\eta})\lambda^2 + \Omega_{\xi\xi}\Omega_{\eta\eta} - (\Omega_{\xi\eta})^2 = 0 \tag{5.47}$$

ou, en posant $\Lambda = \lambda^2$,

$$\Lambda^2 + (4 - \Omega_{\xi\xi} - \Omega_{\eta\eta})\Lambda + \Omega_{\xi\xi}\Omega_{\eta\eta} - (\Omega_{\xi\eta})^2 = 0. \tag{5.48}$$

a) Stabilité au voisinage des points L_1, L_2, L_3. Aux points L_1, L_2, L_3, l'équation (5.48) s'écrit, d'après le tableau 5.1 :

$$\Lambda^2 + (2-s)\Lambda - (s-1)(1+2s) = 0 \tag{5.49}$$

où s est défini par (5.46). On en déduit :

$$\Lambda_{1,2} = \frac{-2 + s \pm \sqrt{(2-s)^2 + 4(s-1)(1+2s)}}{2}, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\Lambda_1}, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\Lambda_2}.$$

Comme $s > 1$ (voir la remarque 5.4.1, Eq. (5.54)), Λ_1 (Λ_2) est réel positif (négatif). On en déduit que λ_1 est réel positif. Les points L_1, L_2, L_3 sont donc instables.

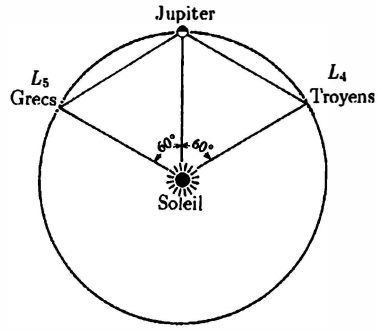


FIG. 5.7 – *Points de Lagrange L_4 et L_5 du système Soleil-Jupiter.*

b) Stabilité au voisinage des points L_4, L_5. Dans le cas des points L_4, L_5, l'équation (5.48) s'écrit, d'après le tableau 5.1 :

$$\Lambda^2 + \Lambda + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0. \tag{5.50}$$

On en déduit :

$$\Lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\Lambda_1}, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\Lambda_2}.$$

Si $27\mu(1-\mu) < 1$, c'est à dire $\mu < \mu_0 = [1-(23/27)^{1/2}]/2 = 0.03852089604551...$, on a $-\frac{1}{2} < \Lambda_1 < 0$ et $-1 < \Lambda_2 < -\frac{1}{2}$. Dans ce cas, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont purement imaginaires et les solutions du système linéaire (5.44) sont stables. En fait, Leontovich [106] a démontré que, dans ce cas, L_4, L_5 sont aussi stables. Dans le système Soleil-Jupiter ($\mu = 0.000953875$), les points L_4 et L_5 sont effectivement occupés par des astéroïdes appelés des planètes joviennes (Cf. fig. 5.7).

5.4.3 Courbes de vitesse nulle

D'après l'égalité de Jacobi (5.26), les courbes de vitesse nulle sont des courbes de niveau :

$$2\Omega(\xi, \eta) = C. \tag{5.51}$$

La figure 5.6 montre deux courbes de vitesse nulle passant par les points L_1 et L_3, pour $\mu = 0.3$, $C = C_1 = 2\Omega(L_1)$ et $C = C_3 = 2\Omega(L_3)$. Comme $\Omega(\xi, \eta) = -\Omega(\xi, -\eta)$, les courbes de vitesse nulle sont toujours symétriques par rapport à l'axe des ξ.

Remarque 5.4.1 La Hessienne aux points L_4, L_5 s'écrit :

$$H(L_{4,5}) = \begin{vmatrix} \Omega_{\xi\xi} & \Omega_{\xi\eta} \\ \Omega_{\xi\eta} & \Omega_{\eta\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}(2\mu - 1) \\ \pm\frac{3}{4}\sqrt{3}(2\mu - 1) & \frac{9}{4} \end{vmatrix} = \frac{27}{4}\mu(1-\mu) > 0.$$

On en déduit que L_4, L_5 sont des points minima de $\zeta = \Omega(\xi, \eta)$. En fait, ce sont des minima absolus, car en écrivant $\Omega(\xi, \eta)$ sous la forme :

$$\Omega(\xi, \eta) = \frac{3}{2} + (1-\mu)(r_1 - 1)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r_1}\right) + \mu(r_2 - 1)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r_2}\right),$$

on obtient (pour $0 < \mu < \frac{1}{2}$) :

$$\Omega(\xi, \eta) \geq \frac{3}{2} = \Omega(r_1 = r_2 = 1) = \Omega(L_{4,5}).$$

La Hessienne aux points L_1, L_2, L_3 s'écrit :

$$H(L_{1,2,3}) = \begin{vmatrix} \Omega_{\xi\xi} & \Omega_{\xi\eta} \\ \Omega_{\xi\eta} & \Omega_{\eta\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2s & 0 \\ 0 & 1-s \end{vmatrix} = (1-s)(1+2s).$$

Aux points L_1, L_2, L_3 on a, d'après (5.19):

$$r_1 = |\xi - \mu|, \quad r_2 = |\xi + 1 - \mu|. \tag{5.52}$$

Par exemple, pour le point L_1 on a, d'après (5.42) :

$$r_1 = -\xi + \mu, \quad r_2 = -\xi - 1 + \mu. \tag{5.53}$$

Portant (5.53) dans (5.38), on obtient :

$$\frac{1-\mu}{r_1^2} = r_1 - \mu - \frac{\mu}{r_2^2}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \Omega_{\eta\eta} = 1 - s &= 1 - \frac{1}{r_1}\left(r_1 - \mu - \frac{\mu}{r_2^2}\right) - \frac{\mu}{r_2^3} \\ &= \mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2^3}\right) \\ &= \mu\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 r_2^3}\right), \text{ car } r_1 - r_2 = 1, \\ &= \frac{\mu}{r_1}\left(1 - \frac{1}{r_2^3}\right) < 0 \text{ car } r_2 < 1, \end{aligned}$$

d'où :

$$s > 1. \tag{5.54}$$

On en déduit aussi que $\Omega_{\xi\xi} > 0$ et $H(L_1) < 0$. Par conséquent, L_1 est un point selle. De même on démontre que L_2, L_3 sont des points selles.

5.5 Régularisation

Les équations du mouvement (5.17)-(5.18) admettent pour points singuliers les points P_1 et P_2. Pour pouvoir étudier le mouvement de P_3 au voisinage de P_1 ou P_2, il convient de remplacer le système (5.17)-(5.18) par un système équivalent qui soit régulier en P_1 ou en P_2 ou en ces deux points. Les équations du mouvement (5.17)-(5.18) s'écrivent, en posant $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2i\frac{d\zeta}{dt} = \text{grad}_\zeta U \tag{5.55}$$

avec

$$U(\zeta) = \frac{1}{2}\left[(1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2\right] + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - \frac{C}{2},$$

$r_1 = |\zeta - \mu|$ et $r_2 = |\zeta - \mu + 1|$. La fonction $U(\zeta)$ possède deux singularités : $\zeta = \mu$ et $\zeta = \mu - 1$. D'après Birkhoff, une transformation conforme :

$$\zeta = f(w), \quad w = u + iv, \tag{5.56}$$

est une régularisation locale (resp. globale) si elle fait disparaître une des deux singularités (resp. les deux singularités). Considérons la transformation (5.56) associée à la transformation :

$$\frac{dt}{d\tau} = |f'|^2, \quad (') = d/dw. \tag{5.57}$$

Dans le changement de variables (5.56)-(5.57), l'équation (5.55) devient[1] :

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} + 2i|f'|^2\frac{dw}{d\tau} = \text{grad}_w\bar{U} \equiv \bar{U}_u + i\bar{U}_v, \tag{5.58}$$

avec

$$\begin{aligned}\bar{U}(w) &= |f'|^2 U \\ &= |f'|^2\left\{\frac{1}{2}\left((1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2\right) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - \frac{C}{2}\right\},\end{aligned}$$

où $r_1 = |\zeta - \mu| = |f(w) - \mu|$, $r_2 = |\zeta - \mu + 1| = |f(w) - \mu + 1|$.

5.5.1 Transformations de Levi-Civita

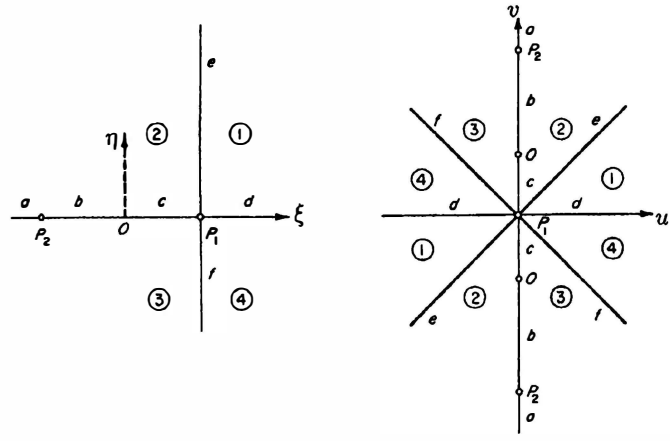


FIG. 5.8 – *Transformation de Levi-Civita $\zeta = \mu + iw^2$: correspondance entre le plan ζ et le plan w. D'après [153].*

1. Voir le détail des calculs dans [153], par exemple.

Si (5.56) est de la forme:

$$\zeta = f(w) = \mu + w^2, \tag{5.59}$$

on aura $r_1 = |w|^2$, $r_2 = |1 + w^2|$, $|f'|^2 = 4|w|^2 = 4r_1$ et la singularité $r_1 = 0$ disparaîtra de $\bar{U}$.

Si (5.56) est de la forme:

$$\zeta = f(w) = \mu - 1 + w^2, \tag{5.60}$$

on aura $r_1 = |w^2 - 1|$, $r_2 = |w|^2$, $|f'|^2 = 4|w|^2 = 4r_2$ et la singularité $r_2 = 0$ disparaîtra de $\bar{U}$.

Les transformations (5.59) et (5.60) sont appelées transformations de Levi-Civita. Ce sont donc des régularisations locales. On utilise (5.59) (resp. (5.60)) quand il y a collision entre le corps 3 et le corps 1 (resp. corps 2). Par raison de symétrie, il suffit de considérer la transformation (5.59). Dans cette transformation, le point $\zeta = \mu$ est transformé en $w = 0$ et le point $\zeta = \mu - 1$ est transformé en $w = \pm i$. Plus généralement à chaque $\zeta \neq \mu$ correspondent deux valeurs $w = \pm(\zeta - \mu)^{1/2}$. L'équation (5.58) devient:

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} + 8i|w|^2\frac{dw}{d\tau} = \text{grad}_w\bar{U} \equiv \bar{U}_u + iU_v, \tag{5.61}$$

avec

$$\bar{U}(w) = 2|w|^2\Big[(1-\mu)|w|^4 + \mu|1+w^2|^2\Big] + \frac{4\mu|w|^2}{|1+w^2|} + 4(1-\mu) - 2C|w|^2.$$

Au point P_1, on a $r_1 = 0$, $w = 0$, $\bar{U} = 4(1 - \mu)$ et la singularité au point P_1 a disparu. Au point P_2, $r_2 = 0$, $w = \pm i$, $\bar{U} \to \infty$. L'équations (5.61) s'écrit encore:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\tau^2} - 8(u^2+v^2)\frac{dv}{d\tau} &= \frac{\partial\bar{U}}{\partial u}, \\ \frac{d^2v}{d\tau^2} + 8(u^2+v^2)\frac{du}{d\tau} &= \frac{\partial\bar{U}}{\partial v} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{U}(u,v) = 2\Big[&(u^2+v^2)^3 + 2\mu(u^4-v^4) + (\mu - C)(u^2+v^2) \\ &+2(1-\mu) + \frac{2\mu(u^2+v^2)}{[(u^2+v^2)^2 + 1 + 2(u^2-v^2)]^{1/2}}\Big]. \end{aligned}$$

La figure 5.8 montre la correspondance entre le plan ζ et le plan w.

5.5.2 Transformation de Birkhoff

Dans la régularisation de Birkhoff [14], on considère d'abord la transformation conforme suivante:

$$\zeta = f_1(q) = q + \mu - \frac{1}{2}, \quad q = q_1 + iq_2, \tag{5.62}$$

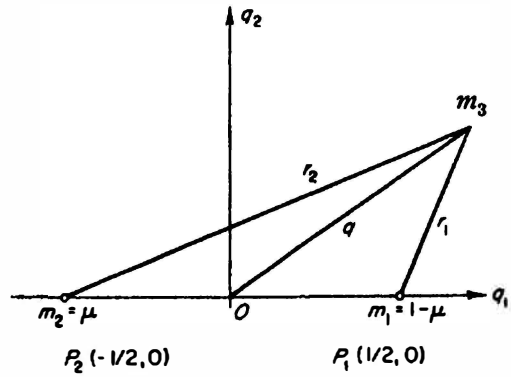


FIG. 5.9 – *Transformation de Birkhoff: le plan q. D'après [153].*

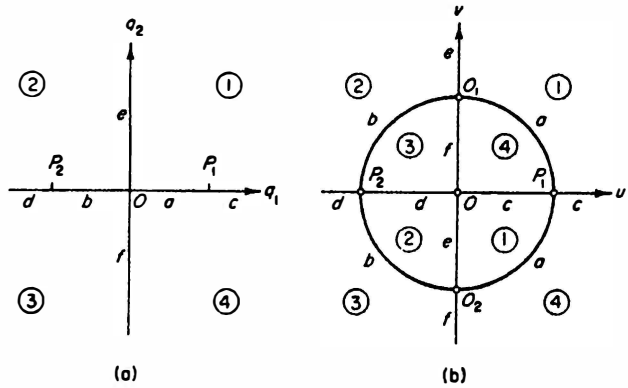


FIG. 5.10 – *Transformation de Birkhoff: correspondance entre le plan q et le plan w. D'après [153].*

qui ramène l'origine au milieu des masses m_1, m_2 (Cf. figure 5.9). Les primaires sont maintenant localisées à $q = \pm 1/2$ et les équations du mouvement sont:

$$\ddot{q} + 2i\dot{q} = \operatorname{grad}_q U(q) \equiv U_{q_1} + iU_{q_2} \tag{5.63}$$

où

$$U(q) = \frac{1}{2}\left((1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2\right) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - \frac{C}{2},$$

avec

$$r_1 = |q - \frac{1}{2}| = [(q_1 - \frac{1}{2})^2 + q_2^2]^{1/2}, \quad r_2 = |q + \frac{1}{2}| = [(q_1 + \frac{1}{2})^2 + q_2^2]^{1/2}.$$

On effectue ensuite une seconde transformation:

$$q = f(w) = \frac{1}{4}\left(2w + \frac{1}{2w}\right), \quad w = u + iv, \tag{5.64}$$

avec

$$|f'(w)|^2 = \frac{|4w^2-1|^2}{64|w|^4} = \frac{\rho_1^2\rho_2^2}{4\rho^4},$$

où l'on a posé:

$$\rho_1 = |w-\frac{1}{2}|, \quad \rho_2 = |w+\frac{1}{2}|, \quad \rho = |w|.$$

Les équations du mouvement deviennent:

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\frac{\rho_1^2\rho_2^2}{\rho^4}\frac{dv}{d\tau} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial u},$$
$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\frac{\rho_1^2\rho_2^2}{\rho^4}\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial v},$$

avec

$$\bar{U} = |f'|^2 U = \frac{\rho_1^2\rho_2^2}{\rho^4}\left\{\frac{(1-\mu)\rho_1^4 + \mu\rho_2^4}{8\rho^2} + 2\rho\left(\frac{\mu}{\rho_1^2} + \frac{1-\mu}{\rho_2^2}\right) - \frac{C}{2}\right\}.$$

$w = 0$ est le point singulier de $\bar{U}$, cependant il correspond à $r_1 \to \infty$ et $r_2 \to \infty$. La figure 5.10 montre la correspondance entre le plan q et le plan w d'après [153]. Noter qu'à un q donné correspondent deux points w_1 et w_2, solutions de:

$$4w^2 - 8wq + 1 = 0$$

et que le segment P_1P_2 du plan q se transforme, dans le plan w en un cercle de diamètre P_1P_2.

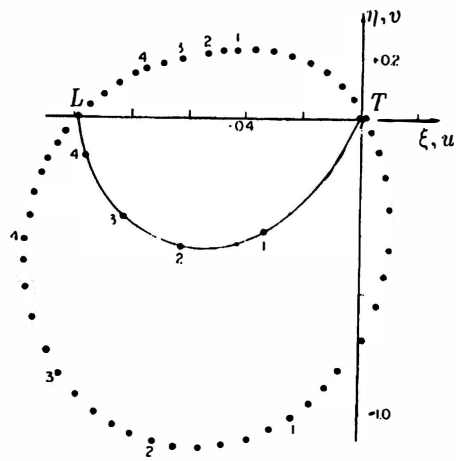


FIG. 5.11 – *Système Terre (T), Lune (L) et Vaisseau spatial. D'après [153].*

La figure 5.11 montre, d'après [153], une courbe de collision du système Terre-Lune-Vaisseau spatial, avec $C = 2.000009$. La courbe continue qui relie le point T au point L, représente la trajectoire du vaisseau spatial dans le système synodique. A cette orbite dans le plan (ξ, η) correspondent, par la transformation de Birkhoff, deux orbites (courbes pointillées) du plan (u, v). Les chiffres correspondent au nombre de jours.

5.6 Orbites périodiques symétriques

Dans cette section, nous supposons que la masse m_2 est à droite de G (figure 5.12). Le système (5.17)-(5.18) s'écrit alors :

$$\ddot{\xi} = 2\dot{\eta} + \xi - (1-\mu)\frac{\xi+\mu}{r_1^3} - \mu\frac{\xi-1+\mu}{r_2^3}, \tag{5.65}$$

$$\ddot{\eta} = -2\dot{\xi} + \eta - (1-\mu)\frac{\eta}{r_1^3} - \mu\frac{\eta}{r_2^3}, \tag{5.66}$$

avec

$$r_1 = \sqrt{(\xi+\mu)^2+\eta^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\xi-1+\mu)^2+\eta^2}. \tag{5.67}$$

L'intégrale de Jacobi s'écrit :

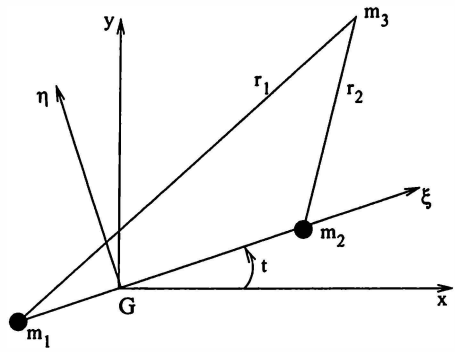


FIG. 5.12 – *Système de coordonnées synodiques avec m_2 à droite de G.*

$$\bar{C} = \xi^2 + \eta^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 \text{ avec } \bar{C} = C - \mu(1-\mu). \tag{5.68}$$

Les solutions de (5.65)-(5.66) peuvent être représentées par des trajectoires dans l'espace des phases à 4 dimensions $(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta})$. Cependant, comme $\dot{\eta}$ peut être calculé par (5.68), on peut représenter la trajectoire dans un espace à trois dimensions $(\xi, \eta, \dot{\xi})$. Considérons les intersections successives de cette trajectoire avec le plan $(\xi, \dot{\xi})$ (la section de Poincaré), dans la direction positive :

$$\eta = 0, \quad \dot{\eta} > 0. \tag{5.69}$$

Le passage d'une intersection à la suivante peut être considéré comme une transformation de Poincaré T :

$$\xi_1 = f(\xi_0, \dot{\xi}_0, \bar{C}), \quad \dot{\xi}_1 = g(\xi_0, \dot{\xi}_0, \bar{C}). \tag{5.70}$$

Le système étant hamiltonien, la conservation des volumes dans l'espace à trois dimensions $(\xi, \eta, \dot{\xi})$ (Théorème de Liouville) implique la conservation des aires pour la transformation T. On a donc :

$$\left|\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\dot{\xi})}(\xi_0, \dot{\xi}_0)\right| = 1. \tag{5.71}$$

Dans le plan (ξ, η), les points qui vérifient (5.69) correspondent simplement aux intersections de l'orbite avec l'axe des ξ dans la direction positive. Une orbite périodique, se refermant sur elle-même après avoir coupé $2n$ fois l'axe des ξ, sera représentée par un ensemble de n points. Dans le cas $n = 1$, elle sera représentée par un point unique P (figure 5.13 gauche) et sera appelée *orbite simple-périodique*. Si de plus $\mu = 0.5$, elle sera symétrique par rapport à l'axe des ξ. Une orbite simple-périodique symétrique est entièrement définie par la valeur de $\bar{C}$ et par l'abscisse ξ du point P. En effet, en ce point, ξ est donné, $\eta = 0$, $\dot{\xi} = 0$ car l'orbite est perpendiculaire à l'axe des ξ en ce point, et $\dot{\eta}$ est déduit de (5.68). Il est donc commode de représenter une

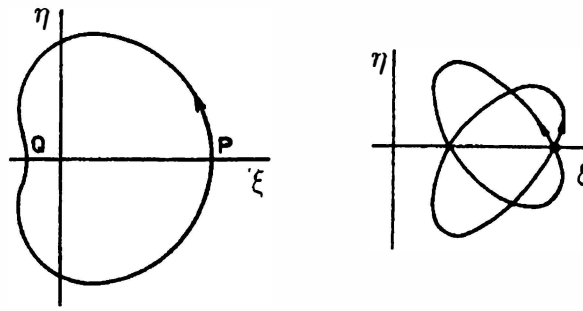


FIG. 5.13 – *A gauche : exemple d'orbite simple-périodique symétrique A droite : une orbite périodique et sa symétrique par rapport à l'axe des ξ. D'après [77].*

telle orbite par un point dans le plan $(\bar{C}, \xi)$. Une classe d'orbites sera représentée dans ce même plan par une courbe, appelée *caractéristique* de la classe. Pour trouver une orbite périodique, on procède par tâtonnements. Partant d'un couple de valeurs $(\bar{C}, \xi)$ déterminé, on intègre les équations (5.65)-(5.66) de l'orbite, jusqu'à ce que celle-ci recoupe l'axe des ξ en un point Q (figure 5.13 gauche) ; on note la valeur de $\dot{\xi}$ en ce point, soit $\dot{\xi}_1$; puis on recommence en tâtonnant soit sur $\bar{C}$, soit sur ξ, de manière à obtenir $\dot{\xi}_1 = 0$.

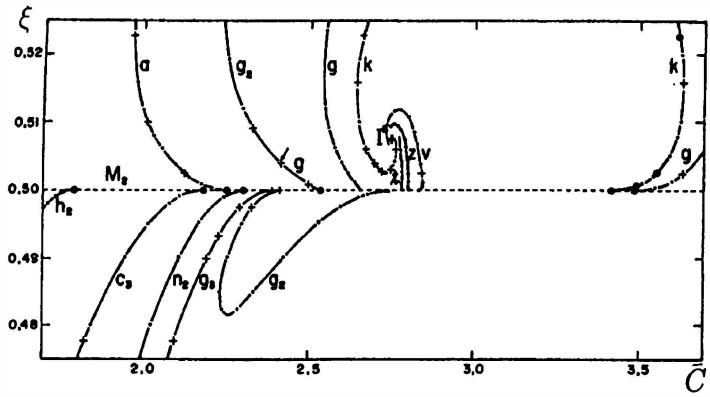


FIG. 5.14 – *Courbes caractéristiques au voisinage de m_2. D'après [77].*

Dans la pratique, pour une valeur donnée de $\bar{C}$, on fait varier ξ, et on trace la courbe $\dot{\xi}_1(\xi)$, dont les zéros correspondent à des orbites périodiques. On connaît actuellement 22 classes d'orbites simples périodiques symétriques. Les 13 classes $a, b, c, f, g, h, i, k, l, m, n, o, r$, ont été découvertes par Strömgren et ses collaborateurs. Les 9 classes $j, s, t, u, v, w, x, y, z$ ont été trouvées par Hénon. Dans les calculs de Hénon, les orbites ont été régularisées par la régularisation de Lévi-Civita. A titre d'exemple, la figure 5.14 montre quelques caractéristiques au voisinage de m_2 [77]. On constate sur cette figure que certaines caractéristiques s'interrompent en arrivant à $\xi = 0.5$: ce point correspond à un point de rebroussement en m_2 et donne lieu à une orbite d'éjection. Après l'orbite d'éjection, il y a encore un croisement à angle droit de l'axe des ξ, mais maintenant dans la direction $\dot{\eta} < 0$. En prolongeant la classe au-delà de l'éjection, on obtient [77] des orbites 2-périodiques ou 3-périodiques ; les branches de caractéristiques correspondantes sont identifiées par un indice 2 ou 3 (le point séparant g et g_2 est indiqué par un trait perpendiculaire).

En raison de la valeur particulière de μ considérée ici, $\mu = 0.5$, le système des deux corps est symétrique par rapport à l'origine. Par suite, à toute classe correspond une classe symétrique par rapport à l'origine. Les 5 classes c, k, l, m, r sont composées d'orbites symétriques par rapport à l'origine, et sont donc identiques à leurs classes symétriques. Les 2 classes n et o sont remarquables en ce que, quoique composées d'orbites non symétriques, elles se confondent cependant avec leurs classes symétriques. Les 14 autres classes se correspondent par symétrie deux à deux, comme suit :

$$a \leftrightarrow b, \quad f \leftrightarrow h, \quad g \leftrightarrow i, \quad s \leftrightarrow t, \quad u \leftrightarrow v, \quad w \leftrightarrow x, \quad y \leftrightarrow z.$$

Pour qu'une orbite simple-périodique soit stable, il faut et il suffit que le point invariant associé soit lui même stable vis-à-vis de la transformation (5.70). Un point invariant sera tel que : $\xi_1 = \xi_0$, $\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_0$. Considérons un point voisin $(\xi_0 + \Delta\xi_0, \dot{\xi}_0 + \Delta\dot{\xi}_0)$, et son transformé $(\xi_0 + \Delta\xi_1, \dot{\xi}_0 + \Delta\dot{\xi}_1)$. Dans l'approximation linéaire on a :

$$\Delta\xi_1 = a\Delta\xi_0 + b\Delta\dot{\xi}_0, \quad \Delta\dot{\xi}_1 = c\Delta\xi_0 + d\Delta\dot{\xi}_0, \tag{5.72}$$

avec :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = a, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{\xi}} = b, \quad \frac{\partial g}{\partial \xi} = c, \quad \frac{\partial g}{\partial \dot{\xi}} = d, \tag{5.73}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(\xi,\dot{\xi})} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{5.74}$$

a et c sont obtenus en prenant $\Delta\dot{\xi}_0 = 0$, tandis que b et d sont obtenus en prenant $\Delta\xi_0 = 0$. La loi de conservation des aires (5.71) s'écrit :

$$ad - bc = 1. \tag{5.75}$$

De plus, on peut remarquer que les équations du mouvement (5.65)-(5.66) et l'intégrale de Jacobi (5.68) ne changent pas si l'on change simultanément le signe de η et celui de t. Autrement dit, à toute orbite correspond une autre orbite symétrique par rapport à l'axe des ξ et décrite en sens inverse (Cf. figure 5.13 droite) et possédant la même valeur $\bar{C}$. Par conséquent, les relations (5.70) entraînent les relations inverses :

$$\xi_0 = f(\xi_1, -\dot{\xi}_1, \bar{C}), \quad -\dot{\xi}_0 = g(\xi_1, -\dot{\xi}_1, \bar{C}). \tag{5.76}$$

Dans le cas des orbites simple-périodiques symétriques, on a $\dot{\xi}_0 = \dot{\xi}_1 = 0$. En dérivant (5.76), on obtient :

$$\Delta\xi_0 = a\Delta\xi_1 - b\Delta\dot{\xi}_1, \quad -\Delta\dot{\xi}_0 = c\Delta\xi_1 - d\Delta\dot{\xi}_1. \tag{5.77}$$

Les valeurs propres λ de la transformation linéaire (5.72) sont données par :

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{5.78}$$

qui, compte tenu de (5.75), s'écrit :

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0. \tag{5.79}$$

D'autre part, l'inversion de (5.72) donne, compte tenu de (5.75) :

$$\Delta\xi_0 = d\Delta\xi_1 - b\Delta\dot{\xi}_1, \quad \Delta\dot{\xi}_0 = -c\Delta\xi_1 + a\Delta\dot{\xi}_1. \tag{5.80}$$

D'où, en comparant (5.77) et (5.80), $a = d$ et (5.79) se réduit à :

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = a \pm \sqrt{a^2 - 1}. \tag{5.81}$$

Si $|a| > 1$, l'équation (5.79) a deux racines réelles, dont l'une est supérieure à 1 en module. Par conséquent, le point fixe est un point hyperbolique. Si $|a| < 1$ les deux racines sont complexes conjuguées, de module 1 et le point fixe est un point elliptique.

Pour obtenir numériquement a, on calcule effectivement une orbite très voisine de l'orbite périodique, avec $\Delta\xi_0$ petit et $\Delta\dot{\xi}_0$ nul ; on note la valeur de $\Delta\xi_1$, à l'intersection suivante, et on prend :

$$a = \frac{\Delta\xi_1}{\Delta\xi_0}. \tag{5.82}$$

Pour chaque orbite simple-périodique symétrique, portons un point d'abscisse $\bar{C}$ et d'ordonnée a. Pour une classe donnée d'orbites, nous obtenons ainsi une courbe $a(\bar{C})$, appelée *courbe de stabilité*. Elle est la même pour deux classes d'orbites symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine. La figure (5.15) montre la courbe de stabilité de la classe i (et de la classe g). Ce sont les classes des satellites directs autour du premier (du second) corps. La figure montre que ces satellites sont stables pour des valeurs suffisamment élevées de $\bar{C}$. La valeur limite est : $\bar{C} = 3.7388$, correspondant à l'orbite critique i_1, $\xi_0 = -0.1813$ (les valeurs numériques correspondent à la classe i). Au-delà de i_1, les orbites sont presque toujours instables.

L'étude d'une orbite n-périodique peut être ramenée au cas précédent car, une telle orbite correspond à n points fixes de T^n ; il suffira donc de considérer T^n au lieu de T et d'étudier la stabilité de l'un de ces points fixes. La figure 5.16 montre une orbite double-périodique à $\bar{C} = 0.295$ et une orbite 6-périodique à $\bar{C} = 4$. Ces courbes ont été tracées par le programme 5.2.

Pour une valeur donnée $\bar{C}$, seule une partie du plan $(\xi, \dot{\xi})$ est accessible, à cause de l'intégrale de Jacobi. Si l'on remplace $\eta = 0$ dans (5.68), la condition est :

$$\dot{\xi}^2 < \xi^2 + \frac{2(1-\mu)}{|\xi+\mu|} + \frac{2\mu}{|\xi-1+\mu|} - \bar{C}. \tag{5.83}$$

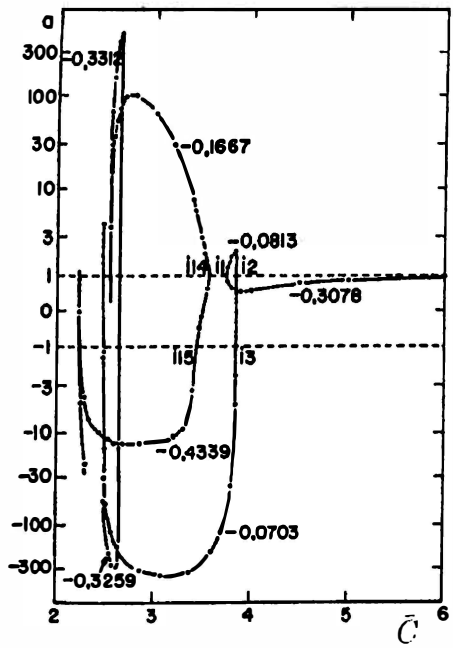


FIG. 5.15 – *Courbe de stabilité de la classe i. D'après [77].*

La figure 5.17 montre deux sections de Poincaré pour $\bar{C} = 4.5$ et $\bar{C} = 4$. La région du plan $(\xi, \dot{\xi})$ accessible est délimitée par des lignes pointillées. Les quatre points isolés f, g, h et i représentent quatre orbites périodiques stables appartenant aux classes f, g, h et i respectivement. Les points i et g (h et f) correspondent aux orbites simples périodiques autour de m_1 (m_2).

Dans le cas $|a| < 1$, posons :

$$\cos\alpha = a, \quad \text{signe}\,(\sin\alpha) = \text{signe}\,(-b) = \text{signe}\,(c).$$

Alors (5.72), avec $a = d$, se met sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Delta\xi_1 \\ \sqrt{-\frac{b}{c}}\Delta\dot{\xi}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\xi_0 \\ \sqrt{-\frac{b}{c}}\Delta\dot{\xi}_0 \end{bmatrix}.$$

On voit ainsi que l'extrémité du vecteur $(\Delta\xi, \sqrt{-b/c}\Delta\dot{\xi})$ reste sur un cercle, et que la transformation fait tourner ce vecteur de l'angle constant α, appelé *angle de rotation*. Si $\alpha/2\pi$ est irrationnel, l'orbite est quasipériodique. La section de Poincaré est alors une courbe fermée entourant le point fixe de T (Cf. figure 5.19). Si $\alpha/2\pi$ est égal au nombre rationnel m/n, l'orbite tourne autour de m_1 (ou m_2) n fois avant de revenir au point de départ. On observe alors sur la section de Poincaré n points disposés en satellites autour du point fixe de T. Ces points sont des points fixes de T^n. Par exemple, sur la figure 5.17b, les six points disposés en satellites autour du point i et entourés de petites courbes fermées (appelées îles) correspondent à l'orbite 6-périodique de la figure 5.16 et sont les points fixes elliptiques de T^6 (voir aussi la figure 5.19 dessinée par le programme 5.3). Entre les six îles, il y a les six points

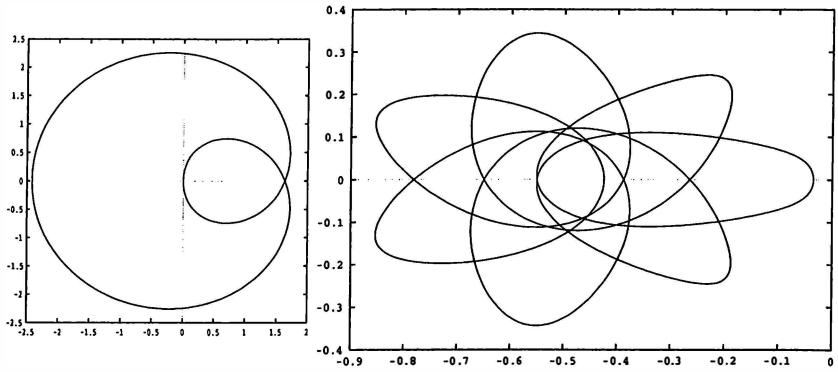


FIG. 5.16 – *A gauche : une orbite double-périodique avec* $\bar{C} = 0.295$ *(conditions initiales :* $\xi_0 = \dot{\xi}_0 = \eta_0 = 0$, $\dot{\eta}_0 > 0$*). A droite : une orbite 6-périodique avec* $\bar{C} = 4$ *(conditions initiales :* $\xi_0 = -0.424937316$, $\dot{\xi}_0 = \eta_0 = 0$, $\dot{\eta}_0 > 0$*).*

fixes hyperboliques de T^6. correspondant à $|a| > 1$ (les valeurs propres sont réelles et sont de la forme $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$).

Une orbite simple-périodique traverse l'axe des ξ deux fois et perpendiculairement ($\dot{\xi} = 0$, voir figure 5.13)) : une fois avec $\dot{\eta} > 0$ et une fois avec $\dot{\eta} < 0$. Une orbite n-périodique symétrique traverse $2n$ fois (n fois avec $\dot{\eta} > 0$, n fois avec $\dot{\eta} < 0$) l'axe des ξ dont deux fois avec des tangentes verticales ($\dot{\xi} = 0$, voir figure 5.16). Par conséquent, les points fixes de T^6 peuvent être isolés comme dans le cas $n = 1$, car pour la section $\eta = 0$, $\dot{\eta} > 0$, ce sont deux points fixes elliptiques qui sont sur l'axe des ξ (e_1 et e_4 sur la figure 5.20 droite), tandis que pour la section $\eta = 0$, $\dot{\eta} < 0$, ce sont deux points fixes hyperboliques qui sont sur l'axe des ξ. Le calcul de Mullins et Bartlett donne :

Tableau 5.3 : Points fixes de T^6 pour $\bar{C} = 4$ et $\dot{\eta} > 0$.

Points fixes elliptiques			Points fixes hyperboliques		
Point	ξ	$\dot{\xi}$	Point	ξ	$\dot{\xi}$
e_1	−0.42493731	0.0	h_1	−0.36547318	−0.29515895
e_2	−0.38845116	+0.8328302	h_2	−0.36547318	+0.29515894
e_3	−0.26473468	+0.76240927	h_3	−0.28488517	+0.50104255
e_4	−0.03500814	0.0	h_4	−0.14131862	+0.24789411
e_5	−0.26473468	−0.76240927	h_5	−0.14131842	−0.24789429
e_6	−0.38845116	−0.8328302	h_6	−0.28488522	−0.50104272

Aux points fixes h_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, les valeurs propres de la matrice (5.74) avec $a = d$ sont de la forme $\lambda_{u,s} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, $|a| > 1$, λ_s (λ_u) est appelée valeur propre stable (instable). Le vecteur propre $(u, v)^T$, correspondant à la valeur propre λ, est

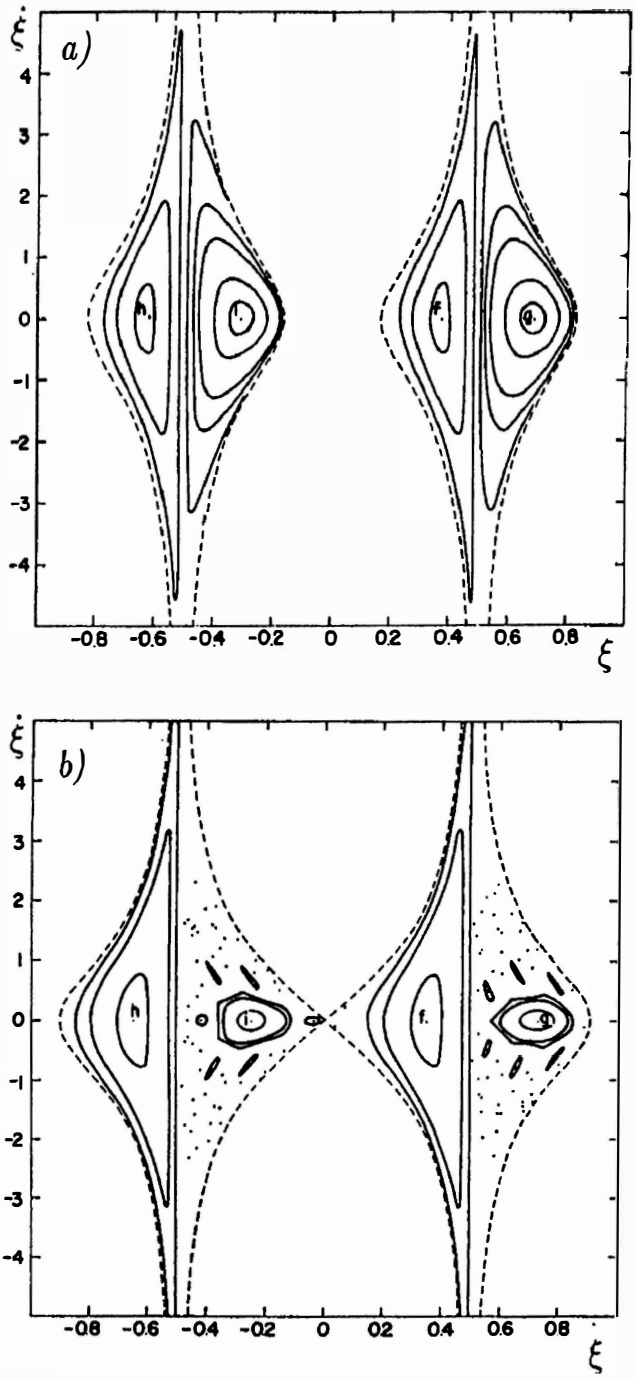


FIG. 5.17 – *Sections de Poincaré* $\eta = 0$, $\dot{\eta} > 0$ *à* $\bar{C} = 4.5$ *(a) et* $\bar{C} = 4$ *(b). D'après [78].*

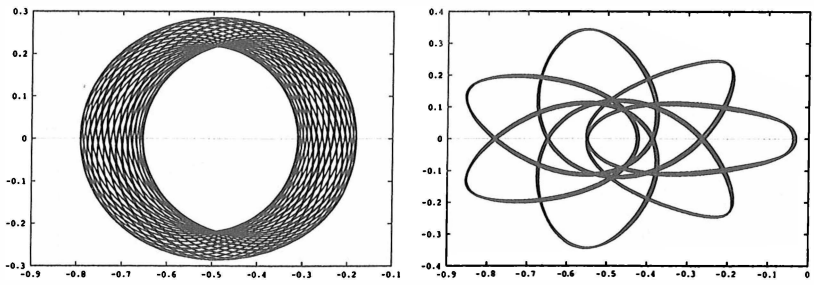


FIG. 5.18 – *Deux orbites quasi-périodiques à* $\bar{C} = 4$, $\xi = -0.18$ *(à gauche) et* $\xi = -0.42$ *(à droite) ...*

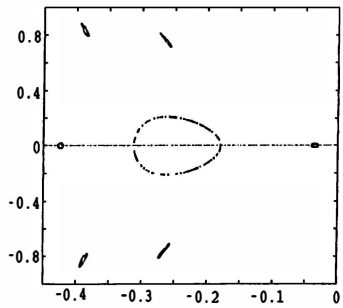


FIG. 5.19 – *... et leur section de Poincaré* $\eta = 0$, $\dot{\eta} > 0$.

déterminé par le système :

$$au + bv = \lambda u, \quad cu + av = \lambda v.$$

On en déduit la pente du vecteur propre :

$$m = \frac{v}{u} = \frac{\lambda - a}{b}, \quad \lambda = \lambda_{s,u}, \quad m = m_{s,u}.$$

Pour déterminer la variété instable W^u de h_i, on choisit un point p_u près de h_i, situé sur le vecteur propre de λ_u. Soit $q_u = T^6(p_u)$, la variété instable de h_i est obtenue en répétant l'application T^6 une infinité de fois sur tous les points du segment $p_u q_u$. De même, pour déterminer la variété stable W^s de h_i on choisit un point p_s près de h_i, situé sur le vecteur propre de λ_s. Soit $q_s = T^{-6}(p_s)$, la variété stable de h_i est obtenue en répétant l'application T^{-6} une infinité de fois sur tous les points du segment $p_s q_s$.

Considérons maintenant les deux points h_1 et h_2. Ils sont symétriques par rapport à l'axe des ξ. La variété instable de h_1 est lisse près de h_1, mais en traversant l'axe des ξ, elle devient oscillatoire et intersecte la variété stable de h_2 (Cf. figure 5.20 gauche). Plus elle se rapproche de h_2, plus les oscillations deviennent grandes et plus les points d'intersection sont rapprochés : $A' = T^6(A)$, $A'' = T^6(A')$ etc. La surface hachurée α est égale à la surface hachurée α' à cause de la conservation des aires et on a : $\alpha' = T^6(\alpha)$, $\alpha = T^{-6}(\alpha')$, $\alpha^{-1} = T^{-6}((\alpha)$, $\alpha^{-2} = T^{-6}(\alpha^{-1})$. A mesure que

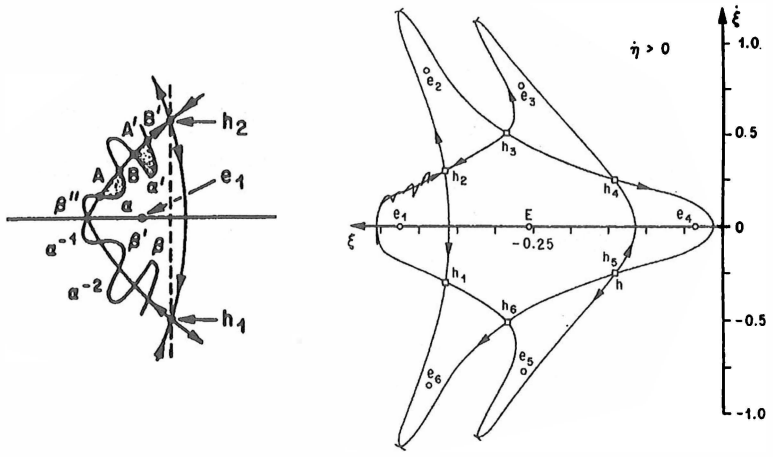


FIG. 5.20 – *Les points fixes elliptiques et hyperboliquess de T^6. D'après [123].*

les points d'intersection se rapprochent, l'amplitude d'oscillation devient de plus en plus grande pour préserver la conservation des aires.

La figure 5.20 droite montre les demi-variétés instables et les variétés stables. Les oscillations des variétés instables ne sont pas dessinées, sauf celles qui appartiennent à la variété instable de h_1 lorsqu'elle se rapproche de h_2. Mullins et Bartlett [123] ont trouvé au point h_1 :

$$\lambda_s \approx 0.5616, \quad \lambda_u \approx 1.7804, \quad m_s \approx 26.2026, \quad m_u \approx -2.5343.$$

Ces auteurs n'ont pas trouvé d'oscillations sur les variétés stables.

5.7 Problème de Sitnikov

Dans le problème de Sitnikov [150], on suppose que les primaires P_1, P_2, de masses égales ($m_1 = m_2 = 0.5$), se meuvent sur des ellipses cofocales, d'excentricité $e \neq 0$, de demi grand axe $a = 1$, selon les lois de Képler tandis que le troisième corps P_3 de masse nulle se meut sur l'axe Gz, issu du centre de gravité G (milieu de P_1P_2) et perpendiculaire au plan des ellipses. Les équations du mouvement de P_3 (de coordonnées (x, y, z)), sont donc, d'après les lois de Newton : (voir figure 5.21) :

$$\begin{aligned} &x(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0, \\ &\ddot{z}(t) = -\frac{m_1 z}{r_1^3} - \frac{m_2 z}{r_2^3} = -\frac{z}{(r^2(t) + z^2)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{5.84}$$

où $m_1 = m_2 = 1/2$ et

$$r(t) = \frac{1}{2}(1 - e\cos u(t)) \tag{5.85}$$

est la distance de P_1 à G et $u(t)$ est solution de l'équation implicite :

$$u(t) = t + e\sin u(t). \tag{5.86}$$

On peut aussi écrire (5.84) sous la forme d'un système hamiltonien :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= p, \\ \dot{p} &= -\frac{z}{(r^2(t)+z^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

en introduisant un Hamiltonien *dépendant* du temps :

$$H(z,p,t) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{(r^2(t)+z^2)^{1/2}}.$$

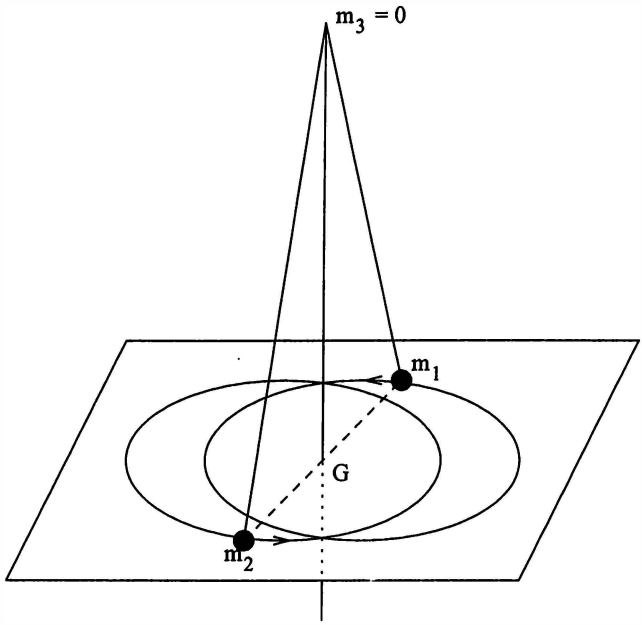


FIG. 5.21 – *Problème de Sitnikov. D'après [122].*

Le cas $e = 0$ est appelé problème de MacMillan [153]. Dans ce cas, on a $r = 0.5$ et le hamiltonien est indépendant du temps :

$$H(z,p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{(0.25+z^2)^{1/2}}$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= p, \\ \dot{p} &= -\frac{z}{(0.25+z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \tag{5.87}$$

Le système (5.87) est intégrable et la solution peut être obtenue par une quadrature (Cf. Exercice 5.3).

5.7.1 Application de Poincaré

Une solution $z(t)$ de (5.84) est complètement définie par la donnée des conditions initiales :

$$z(t_0) = 0, \quad \dot{z}(t_0) = v_0. \tag{5.88}$$

Comme l'équation différentielle est invariante par rapport à la transformation $z \to -z$, nous considérons seulement le cas $v_0 > 0$ (ou nous supposons que $|\dot{z}(t_0)| = v_0$) et nous interprétons le couple (v_0, t_0) comme les coordonnées polaires dans un plan Σ, la variable v_0 étant le rayon et t_0 la variable angulaire. L'application $f : \Sigma \to \Sigma$ est définie comme l'application de Poincaré :

$$(v_1, t_1) = f(v_0, t_0), \text{ avec } z(t_1) = 0, \quad \dot{z}(t_1) = v_1, \quad t_1 > t_0. \tag{5.89}$$

Considérons une solution $z(t)$ avec des zéros t_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $t_k < t_{k+1}$, $z(t_k) = 0$ et soit des entiers :

$$s_k = \frac{t_{k+1} - t_k}{2\pi}$$

qui mesurent le nombre de révolutions des primaires entre deux zéros de $z(t)$. On associe à chaque solution une séquence doublement infinie d'entiers :

$$s = \dots s_{-2} s_{-1} . s_0 s_1 s_2 \dots$$

de la dynamique symbolique (Cf. section 4.7). A l'application f correspond le décalage de Bernoulli σ. A la séquence $s = \dots s_{-1} . s_0 s_1 \dots \infty$ correspond une orbite qui s'échappe à $t \to \infty$. La solution $z(-t)$ est, dans ce cas, une orbite de capture.

Soit $D_0 \subset \Sigma$ le domaine de définition de f et $D_1 = f(D_0)$. Pour $e = 0$, $v_1 = v_0$, $D_1 = D_0 =$ disque $v_0 < 2$. En effet, dans ce cas le système (5.84) possède l'intégrale première :

$$H(z, \dot{z}) = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{\sqrt{0.25 + z^2}} = c = \text{ const} \tag{5.90}$$

avec $c \geq -2$. Pour $c < 0$, la relation (5.90) représente une courbe fermée dans le plan $(z, \dot{z})$, alors que pour $c > 0$, ces courbes tendent vers l'infini. Pour $c < 0$, la courbe (5.90) coupe l'axe $z = 0$ à $\dot{z} = v_0$, avec $v_0^2 = 2(c + 2) < 4$. On en déduit que D_0 est le disque $v_0 < 2$ et $v_1 = v_0$ (donc $D_1 = D_0$). Le temps de retour $t_1 - t_0 = T(v_0)$ est une fonction de v_0 et est indépendant de t_0 (Cf. Exercice 5.3). Lorsque $v_0 \to 2$, le temps T tend vers l'infini ; l'image d'un rayon de D_0 par f est donc une courbe qui spirale vers ∂D_0 (la frontière de D_0, Cf. figure 5.22 gauche).

Pour $0 < e < 1$, une résolution approchée de l'équation différentielle (5.84) par le développement de Taylor :

$$\begin{aligned} z(t; t_0, e) &= z_0(t - t_0) + e z_1 + O(e^2), \\ \dot{z}(t; t_0, e) &= \dot{z}_0(t - t_0) + e \dot{z}_1|_{t=t_0} + O(e^2), \end{aligned}$$

(voir le détail des calculs dans [122]) montre que :

$$v_0 = \dot{z}(t_0; t_0, e) = 2 + \frac{3e}{8}(-A \sin t_0 + B \cos t_0) + O(e^2) \text{ avec } A > 0.$$

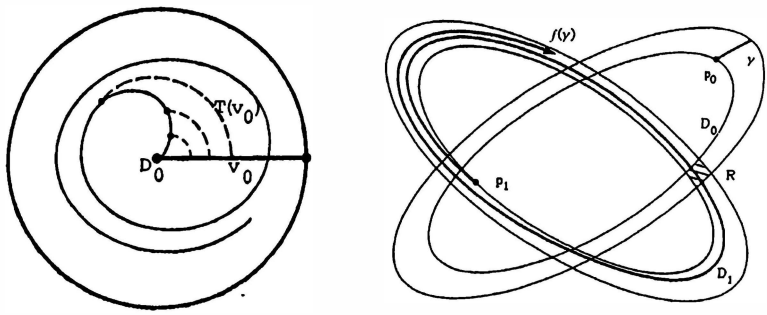


FIG. 5.22 – *Application de Poincaré: $e = 0$ (à gauche) et $e \neq 0$ (à droite). D'après [122].*

On en déduit que D_0 est une ellipse, en première approximation.

Les équations différentielles sont invariantes par la réflexion $(z,t) \to (z,-t)$, par conséquent on a:

$$f^{-1} = \rho^{-1} f \rho, \quad \text{avec } \rho\colon (v,t) \to (v,-t).$$

On en déduit $D_1 = f(D_0) = \rho(D_0)$: D_1 est obtenu de D_0 par la réflexion $t_0 \to -t_0$ (Cf. figure 5.22 droite). On en déduit que D_1 et D_0 se coupent transversalement. Soit

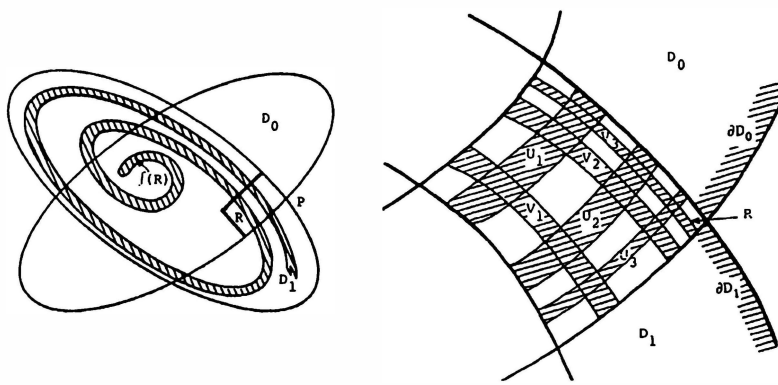


FIG. 5.23 – *Le fer à cheval du problème de Sitnikov. D'après [122].*

p_0 un point de D_0 proche de ∂D_0 et soit $p_1 = f(p_0)$ son image dans D_1. Considérons une courbe γ issue de p_0 qui rencontre non tangentiellement ∂D_0. Alors, comme dans le cas $e = 0$, $f(\gamma)$ est une courbe qui spirale vers ∂D_1 (voir figure 5.22 droite).

Soit P un point de $\partial D_0 \cap \partial D_1$ et R un petit carré, de côté $\delta \ll 1$, (figure 5.23 gauche). Le carré R a 2 côtés qui rencontrent ∂D_0. Leur image spirale donc vers ∂D_1 et $f(R) \cap R$ est composé d'une infinité de bandes V_i, $i = 1,2,3,\ldots$. De même, $f^{-1}(R) \cap R$ est composé d'une infinité de bandes U_i, $i = 1,2,3,\ldots$ (figure 5.23 droite). f est donc une application de fer à cheval. R joue ici le rôle du carré S de la section 4.7.

5.7.2 Transformation de McGehee

Pour étudier le cas $z(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$, nous ramenons le point ∞ à l'origine par la transformation suivante [120] :

$$z = 2q^{-2}, \quad \dot{z} = -p, \quad dt = 4q^{-3}ds, \quad 0 < q < \infty. \tag{5.91}$$

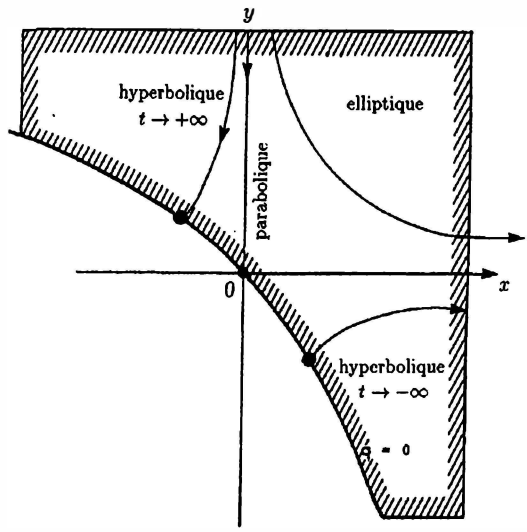


FIG. 5.24 – *Le flot au voisinage de* $(0,0)$. *D'après [122].*

Quand $q \to 0$, on a $z \to \infty$. L'équation différentielle (5.84) prend alors la forme suivante :

$$\frac{dq}{ds} = p, \quad \frac{dp}{ds} = q(1 + q^4r^2/4)^{-3/2}, \quad \frac{dt}{ds} = 4q^{-3}. \tag{5.92}$$

Au point fixe $(q,p) = (0,0)$, la matrice jacobienne de (5.92) a des valeurs propres égales à ± 1. Le point fixe $(0,0)$ est donc hyperbolique. On en déduit que les variétés stable et instable sont données par :

$$q = X(p,t) = p + \cdots, \quad q = X(-p,-t) = -p + \cdots$$

où $X(p,t)$ est de période 2π. Pour trouver le flot au voisinage de $(0,0)$ nous considérons la transformation de coordonnées suivantes :

$$x = \frac{1}{4}(q - X(-p,-t)) = \frac{1}{4}(q+p) + \cdots, \quad y = \frac{1}{4}(q - X(p,t)) = \frac{1}{4}(q-p) + \cdots,$$

et obtenons pour les équations différentielles :

$$\frac{dx}{ds} = x(1 + O_4), \quad \frac{dy}{ds} = -y(1 + O_4), \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{2}[(x+y)^3 + O_4]^{-1}. \tag{5.93}$$

Le système (5.93) est restreint au domaine $q = 2(x+y) + O_4 > 0$. Eliminant la variable s nous obtenons :

$$\frac{dx}{dt} = x(2(x+y)^3 + O_4), \quad \frac{dy}{dt} = -y(2(x+y)^3 + O_4). \tag{5.94}$$

Le flot au voisinage de $(x,y) = (0,0)$ est présentré sur la figure 5.24.

5.7.3 Transformation de Wodnar

Lorsque $e \neq 0$, les formules (5.85)-(5.86) ne permettent pas d'avoir une forme explicite de r en fonction de t et de ce fait on ne peut intégrer (5.84) facilement. Aussi Wodnar [166] propose, pour $e \neq 0$, de prendre l'anomalie vraie θ comme *variable indépendante*, car on connaît la forme explicite de r en fonction de θ :

$$r(\theta) = \frac{1 - e^2}{2(1 + e\cos\theta)} \tag{5.95}$$

et la loi des aires (Cf. exercice 5.1) :

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{4r^2}. \tag{5.96}$$

On pose ensuite :

$$z(\theta) = 2r(\theta)T(\theta). \tag{5.97}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} T &= \frac{z}{2r} = z\frac{1 + e\cos\theta}{1 - e^2}, \\ \frac{dT}{d\theta} &= T' = \dot{z}\frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + e\cos\theta} - z\frac{e\sin\theta}{1 - e^2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} z &= T\frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta}, \\ \dot{z} &= \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}[Te\sin\theta + T'(1 + e\cos\theta)]. \end{aligned}$$

L'équation (5.84) s'écrit alors :

$$T'' + \frac{e\cos\theta + (1/4 + T^2)^{-3/2}}{1 + e\cos\theta}T = 0, \quad (') = d/d\theta. \tag{5.98}$$

Cette équation peut être intégrée numériquement. T a la signification géométrique suivante :

$$T = \frac{1}{2}\tan\frac{\phi}{2}$$

où ϕ est l'angle (P_1P_3, P_2P_3).

Remarque 5.7.1 L'équation (5.98) linéarisée :

$$T'' + p(\theta)T = 0, \text{ avec } p(\theta) = \frac{e\cos\theta + 8}{1 + e\cos\theta} \tag{5.99}$$

est une équation de Hill (voir par exemple [71], [108]).

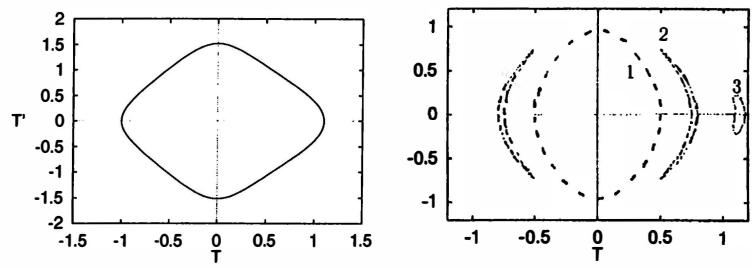


FIG. 5.25 – *Problème de Sitnikov : (a) mouvement périodique à* $e = 0.23$ *(b) section de Poincaré à* $e = 0.37$.

Le programme Pascal 5.4 intègre l'équation (5.98) pour e, $T(0)$, $T'(0)$ donnés quelconques.

La figure 5.25a montre un mouvement périodique dans le plan (T, T') pour $e = 0.23$, $T(0) = 1.1$, $T'(0) = 0$.

Le programme 5.5 donne la section de Poincaré (T, T') avec $\theta = 2k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ (vue stroboscopique dans l'espace des phases (T, T', θ)).

La figure 5.25b montre la section de Poincaré correspondant à $e = 0.37$ et successivement avec trois conditions initiales suivantes :

1) $T(0) = 0.5$, $T'(0) = 0$,
2) $T(0) = 0.8$, $T'(0) = 0$,
3) $T(0) = 1.1$, $T'(0) = 0$.

5.8 Orbites homoclines du problème restreint

Dans le problème restreint, la solution du système (5.17)-(5.18) est complètement définie par la donnée du module v_0 de la vitesse synodique et de l'angle α_0 entre l'axe Gx et la vitesse synodique au moment t_0 de passage de P_3 sur l'axe Gx, côté négatif (voir figure 5.26 gauche). On a alors :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= -r_0 \cos t_0, \quad \eta_0 = r_0 \sin t_0, \\ v_0^2 &= \dot{\xi}_0^2 + \dot{\eta}_0^2, \\ \dot{\xi}_0 &= v_0 \cos(\alpha_0 - t_0), \quad \dot{\eta}_0 = v_0 \sin(\alpha_0 - t_0), \end{aligned} \tag{5.100}$$

où $\alpha_0 \in [0, 2\pi]$ si $v_0 > 0$, $\alpha_0 = 0$ si $v_0 = 0$ et r_0 est donné par l'intégrale de Jacobi : $v_0^2 = 2\Omega(-r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0) - C$. Les points (v_0, α_0, t_0) sont les points d'un tore solide T (voir figure 5.26 droite). Soit t_1 le zéro suivant de $\eta(t)$ avec $\xi(t_1) < 0$, on a :

$$\begin{aligned} v_1 &= (\dot{\xi}^2(t_1) + \dot{\eta}^2(t_1))^{1/2}, \\ \alpha_1 &= \mathrm{Arg}(\dot{\zeta}(t_1)) + t_1 (\mathrm{mod}\, 2\pi) \text{ si } v_1 \neq 0, \\ &= 0, \text{ si } v_1 = 0, \quad \zeta = \xi + i\eta. \end{aligned}$$

Soit $(v_1, \alpha_1, t_1) = f(v_0, \alpha_0, t_0)$, une application de T dans T et soit E_0 l'ensemble des points de T tels que t_1 existe. E_0 est l'ensemble de définition de f. Les orbites

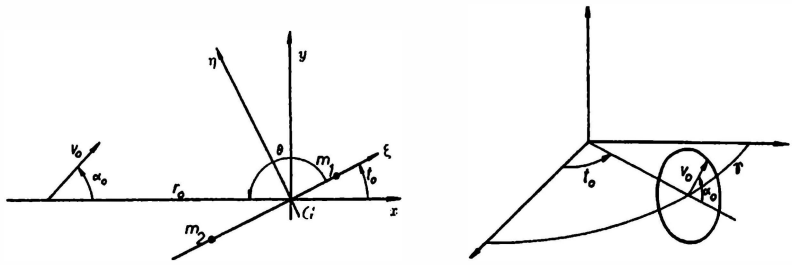


FIG. 5.26 – *Conditions initiales du problème restreint. D'après [109].*

correspondantes sont dites elliptiques. L'ensemble E_0 est ouvert. Considérons une solution $\xi(t)$, $\eta(t)$ avec $\eta(t_k) = 0$, $\xi(t_k) < 0$, $t_k < t_{k+1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Soient des entiers $s_k = (t_{k+1} - t_k)/2\pi$ qui mesurent le nombre de révolutions des primaires entre deux zéros de η. On associe à chaque solution une séquence doublement infinie d'entiers $s = \ldots, s_{-2}s_{-1}.s_0, s_1, s_2, \ldots$ de la dynamique symbolique. A l'application f correspond le décalage de Bernoulli σ (voir Section 4.7).

5.8.1 Transformation de McGehee

Nous étudions maintenant le complément de E_0 (correspondant à $\zeta(\infty) = \infty$). Les orbites correspondantes sont dites paraboliques ($\dot{\zeta}(\infty) = 0$) ou hyperboliques ($\dot{\zeta}(\infty) \neq 0$). Pour cela on ramène le point infini à 0. McGehee [120] considère une transformation des coordonnées synodiques :

$$(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) \to (q, p, \omega, \theta) \in \mathbb{R}^4$$

définie par :

$$\zeta = 2q^{-2}e^{i\theta}, \quad \dot{\zeta} = [p + i(q^2\omega/2 - 2q^{-2})]e^{i\theta}, \quad (\cdot) \equiv d/dt. \tag{5.101}$$

On vérifie immédiatement que, lorsque $q \to 0$, on a $\zeta \to \infty$. Portant (5.101) dans (5.20), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= -\frac{1}{4}q^3 p, \\
\dot{p} &= \frac{1}{8}q^6\omega^2 - 2q^4\left(\frac{1-\mu}{a_1^3} + \frac{\mu}{a_2^3}\right) + \mu(1-\mu)q^4\left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_2^3}\right)\cos\theta, \\
\dot{\omega} &= -2\mu(1-\mu)q^4\left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_2^3}\right)\sin\theta, \\
\dot{\theta} &= -1 + \frac{1}{4}q^4\omega,
\end{aligned} \tag{5.102}$$

avec

$$\begin{aligned}
a_1 &= [4 + \mu^2 q^4 - 4\mu q^2 \cos\theta]^{1/2}, \\
a_2 &= [4 + (1-\mu)^2 q^4 + 4(1-\mu)q^2 \cos\theta]^{1/2}.
\end{aligned}$$

L'intégrale de Jacobi (5.27) s'écrit :

$$2q^2\left(\frac{1-\mu}{a_1}+\frac{\mu}{a_2}\right)-p^2-\frac{1}{4}q^4\omega^2+2\omega+\mu(1-\mu)=C. \tag{5.103}$$

ω peut être calculé par l'intégrale de Jacobi. On peut donc supprimer l'équation donnant ω et on a le système suivant à résoudre :

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= -\frac{1}{4}q^3p, \\
\dot{p} &= \frac{1}{8}q^6\omega^2-2q^4\left(\frac{1-\mu}{a_1^3}+\frac{\mu}{a_2^3}\right)+\mu(1-\mu)q^4\left(\frac{1}{a_1^3}-\frac{1}{a_2^3}\right)\cos\theta, \\
\dot{\theta} &= -1+\frac{1}{4}q^4\omega,
\end{aligned} \tag{5.104}$$

ω est donné par (5.103). Pour $\mu = 0$, le système (5.104) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= -\frac{1}{4}q^3p, \\
\dot{p} &= -\frac{1}{4}q^4+\frac{1}{8}q^6\omega^2, \\
\dot{\theta} &= -1+\frac{1}{4}q^4\omega,
\end{aligned} \tag{5.105}$$

avec $\omega = \text{const.}$ (car $\dot{\omega} = 0$, d'après (5.102)). L'intégrale de Jacobi s'écrit ici :

$$q^2-p^2-\frac{1}{4}q^4\omega^2 = C-2\omega = \text{ const.} \tag{5.106}$$

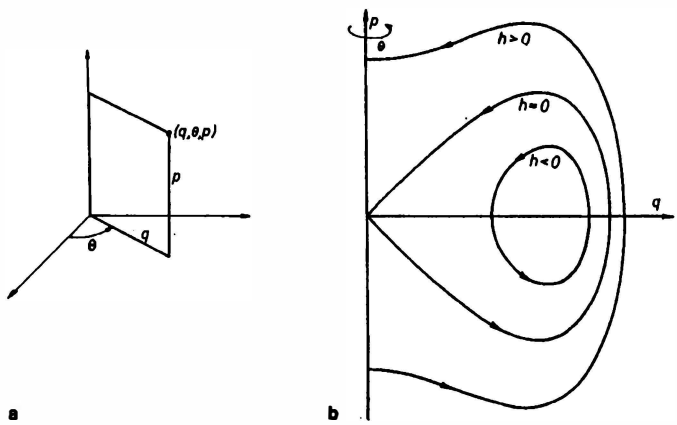


FIG. 5.27 – *a) : coordonnées de McGehee. b) : courbes de niveau dans le cas $\mu = 0$. D'après [109].*

Les courbes de niveaux, correspondant au cas physique $q > 0$, de la fonction :

$$H(q,p) = q^2-p^2-\frac{1}{4}q^4\omega^2 = -2h, \quad h = \omega-\frac{C}{2},$$

sont dessinées sur la figure 5.27 droite.

Pour $\mu \neq 0$ et petit, le système (5.104) a une solution périodique de période 2π : $(q,p,\omega) = (0,0,K/2)$, avec $K = C - \mu(1-\mu)$. Au voisinage de cette solution périodique, ω est donné par l'inégrale de Jacobi :

$$\omega = K/2 - q^2/2 + p^2/2 + K^2q^4/32 + O_6, \tag{5.107}$$

où O_k est une fonction d'ordre k en p,q, périodique de période 2π en θ. Le système (5.104) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -q^3p/4, \\ \dot{p} &= -q^4/4 + K^2q^6/32 + Kq^6p^2/16 + (s(\mu,\theta) - K/16)q^8 + O_{10}, \\ \dot{\theta} &= -1 + Kq^4/8 - q^6/8 + K^2q^8/128 + O_{10}, \end{aligned} \tag{5.108}$$

où l'on a posé $s(\mu,\theta) = 3\mu(1-\mu)(1-3\cos^2\theta)/32$. Eliminant t de (5.108) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{d\theta} &= -q^3p/4 + Kq^7p/32 + O_{10}, \\ \frac{dp}{d\theta} &= q^4/4 - K^2q^6/32 - Kq^6p^2/16 - s(\mu,\theta)q^8 + O_{10}. \end{aligned} \tag{5.109}$$

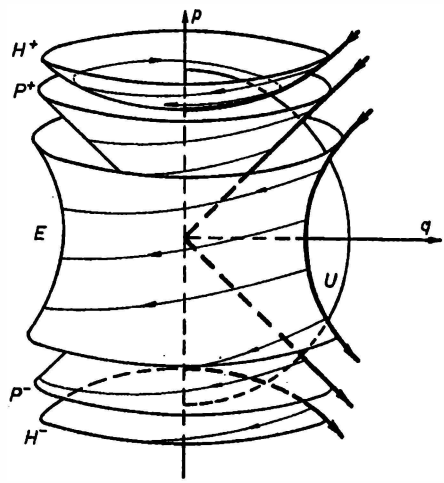


FIG. 5.28 – *Le flot du système de McGehee au voisinage U. D'après [109].*

Le flot du système (5.109) dans un voisinage U de l'origine est présenté sur la figure (5.28) où E, $P^{\pm}$, $H^{\pm}$ sont des orbites de type elliptique, parabolique et hyperbolique respectivement (à comparer avec la figure 5.27). A noter que le système (5.102) est invariant par rapport à la symétrie $(q,p,\theta,\omega,t) \to (q,-p,-\theta,\omega,-t)$, par conséquent le système (5.108) est invariant par rapport à la symétrie $(q,p,\theta) \to (q,-p,-\theta)$. On en déduit que si la variété stable est donnée par $q = F(p,\theta)$, la variété instable sera donnée par $q = F(-p,-\theta)$. Pour trouver le développement limité de $F(p,\theta)$ au voisinage de $(q,p) = (0,0)$, on remplace :

$$q = F(p,\theta) = \sum_{n\geq 0} a_n(\theta)p^n,$$

dans (5.108) et on égalise les coefficients de p^n. On obtient alors un système de la forme $da_n(\theta)/d\theta = g_n(\theta)$ que l'on résout récursivement. Le résultat est [109] :

$$\begin{aligned} a_0(\theta) &= a_2(\theta) = a_4(\theta) = a_6(\theta) = 0, \\ a_1(\theta) &= 1, \quad a_3(\theta) = K^2/32, \\ a_5(\theta) &= [7K^4/64 + \mu(\mu-1)]/32, \\ a_7(\theta) &= 3K^2[11K^4/64 + 3\mu(\mu-1)]/1024, \\ a_8(\theta) &= 9\mu(\mu-1)\sin(2\theta)/128. \end{aligned}$$

5.8.2 Transformation de Xia

Nous partons des équations (5.10) ou (5.11), dans le système fixe (ou sidéral), que nous écrivons sous la forme complexe :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{(1-\mu)(z-\mu e^{it})}{|z-\mu e^{it}|^3} - \frac{\mu(z+(1-\mu)e^{it})}{|z+(1-\mu)e^{it}|^3} \tag{5.110}$$

en posant $z = x + iy$. Quand $\mu = 0$, le problème se réduit à un problème de deux-corps :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{|z|^3} \tag{5.111}$$

qui est intégrable. Pour μ petit, nous traitons (5.110) comme une perturbation de (5.111) et nous nous intéressons particulièrement au cas où (5.111) admet une solution parabolique. Cette solution parabolique est une orbite homocline qui tend vers le point infini avec une vitesse nulle, lorsque $t \to \pm\infty$. Pour étudier cette orbite homocline, nous ramenons le point infini à l'origine par la transformation suivante [169] :

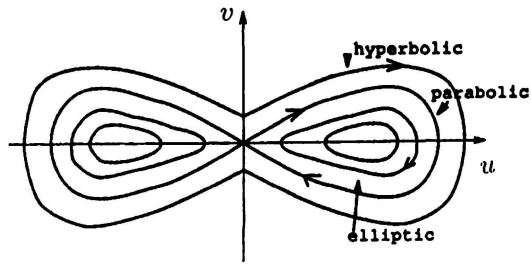


FIG. 5.29 – *Courbes de niveau du système non perturbé. D'après [169].*

$$(z, \dot{z}) \to (u, v, \rho, \theta) \in \mathbb{R}^4$$

avec

$$z = u^{-2}e^{i\theta}, \quad \dot{z} = (v + iu^2\rho)e^{i\theta}, \quad (\dot{}) \equiv d/dt. \tag{5.112}$$

Lorsque $(u,v) \to (0,0)$, on a $z \to \infty$, $\dot{z} \to 0$. Portant (5.112) dans (5.110), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -\frac{1}{2}u^3 v, \\
\dot{v} &= u^6\rho^2 - u^4\left(\frac{1-\mu}{a_1^3} + \frac{\mu}{a_2^3}\right) + \mu(1-\mu)u^6\left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_2^3}\right)\cos(t-\theta), \\
\dot{\rho} &= \mu(1-\mu)u^4\left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_2^3}\right)\sin(t-\theta), \\
\dot{\theta} &= u^4\rho,
\end{aligned} \tag{5.113}$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_1 &= [1 + \mu^2u^4 - 2\mu u^2\cos(t-\theta)]^{1/2}, \\
a_2 &= [1 + (1-\mu)^2u^4 + 2(1-\mu)u^2\cos(t-\theta)]^{1/2}.
\end{aligned}$$

L'intégrale de Jacobi s'écrit :

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^4\rho^2 - V - \rho = h = \text{ const.} \tag{5.114}$$

où

$$V = u^2\left(\frac{1-\mu}{a_1} + \frac{\mu}{a_2}\right).$$

A noter que (5.113) et (5.114) ne dépendent de t qu'à travers la variable $s = t - \theta$. De plus, comme dans le cas de la transformation de McGehee, ρ peut être calculé par l'intégrale de Jacobi. Ce qui permet, d'écrire (5.113) sous la forme d'un système de trois équations :

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -\frac{1}{2}u^3 v, \\
\dot{v} &= u^6\rho^2 - u^4\left(\frac{1-\mu}{a_1^3} + \frac{\mu}{a_2^3}\right) + \mu(1-\mu)u^6\left(\frac{1}{a_1^3} - \frac{1}{a_2^3}\right)\cos s, \\
\dot{s} &= 1 - u^4\rho,
\end{aligned} \tag{5.115}$$

où $\rho = \rho(u,v,s)$ est donné par (5.114). Au premier ordre en μ, le système (5.115) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -\frac{1}{2}u^3 v, \\
\dot{v} &= u^6\rho^2 - u^4 + \mu g_1(u,s) + O(\mu^2), \\
\dot{s} &= 1 - u^4\rho,
\end{aligned} \tag{5.116}$$

avec

$$\begin{aligned}
g_1(u,s) &= u^4\left(1 - 2u^2\cos s - \frac{1 + u^2\cos s}{(1 + 2u^2\cos s + u^4)^{3/2}}\right) + O(\mu^2), \\
\rho(u,v,s) &= \rho_0 - \frac{\mu u^2}{(1-u^4\rho_0)}\left(-1 + u^2\cos s + \frac{1}{(1 + 2u^2\cos s + u^4)^{3/2}}\right) + O(\mu^2), \\
\rho_0 &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - u^4(v^2 - 2u^2 - 2h)}}{u^4}.
\end{aligned} \tag{5.117}$$

Dans le cas $\mu = 0$, le système (5.116) devient :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2}u^3 v, \\ \dot{v} &= u^6\rho^2 - u^4, \\ \dot{s} &= 1 - u^4\rho, \end{aligned} \tag{5.118}$$

avec $\rho = \text{const.}$ car lorsque $\mu = 0$ on a $V = u^2$, indépendant de θ et, d'après (5.113), $\rho = \text{const.}$ On déduit donc de (5.114) que :

$$H(u,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^4\rho^2 - u^2 = \rho + h = \text{ const.} \tag{5.119}$$

Les deux premières équations de (5.118) sont indépendantes de s. On les ramène à un système hamiltonien en effectuant le changement d'échelle de temps :

$$t = t(\tau), \text{ avec } \frac{dt}{d\tau} = -\frac{2}{u^3}.$$

Elles s'écrivent alors :

$$\frac{du}{d\tau} = v = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \frac{dv}{d\tau} = 2(u - u^3\rho^2) = -\frac{\partial H}{\partial u} \tag{5.120}$$

où $H(u,v)$ est donné par (5.119). La figure 5.29 montre les courbes de niveau de $H(u,v)$ où les points $(u,v) = (\pm\rho^{-1}, 0)$ sont les points fixes du système (5.120). La courbe homocline $H(u,v) = 0$ correspond à la trajectoire parabolique du problème des deux corps, car, dans le cas parabolique lorsque $t \to \pm\infty$ on a $z \to \infty$, $\dot{z} \to 0$, $(u,v) \to (0,0)$. Cette courbe homocline est donnée explicitement par :

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(3t + \sqrt{9t^2 + h^6})^{2/3} + (3t - \sqrt{9t^2 + h^6})^{2/3} - h^2}}, \\ v_0(t) &= \begin{cases} \pm\sqrt{2u^2(t) - u^4(t)h^2} & \text{si } u \geq 0, \\ \mp\sqrt{2u^2(t) - u^4(t)h^2} & \text{si } u \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{5.121}$$

où $\pm$ dépend du signe de h. Le cas physique correspond à $u > 0$.

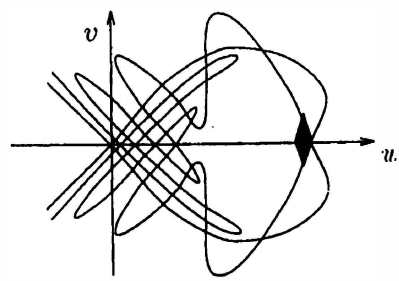


FIG. 5.30 – *Points homoclines sur Σ^π. D'après [170].*

Dans le cas $0 < \mu \ll 1$, on peut aussi écrire (5.116) sous la forme d'un système de deux équations :

$$\frac{du}{ds} = -\frac{u^3 v}{2(1 - u^4\rho)}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{-u^4 + u^6\rho^2}{1 - u^4\rho} + \frac{\mu g_1(u,s)}{1 - u^4\rho}, \tag{5.122}$$

où $g_1(u,s), \rho(u,v,s)$ sont des fonctions périodiques (de période 2π) en s et sont données par (5.117). Pour tout $s_0 \in [0, 2\pi]$, soit Σ^{s_0} une section définie par s_0 et soit $P(u,v)$ une application de Poincaré sur Σ^{s_0}, Xia [169] a montré, par la méthode de Melnikov, que les variétés stable et instable du point fixe $(0,0)$ se coupent transversalement sur Σ^{s_0}. On en déduit l'existence du fer à cheval de Smale à chaque niveau d'énergie (Cf. figure 5.30).

5.9 Programmes

Programme 5.1 *En posant :*

$$\begin{aligned} \xi_2 &= X_1, \quad \eta_2 = X_2, \quad \zeta_2 = X_3, \quad \xi_3 = X_4, \quad \eta_3 = X_5, \quad \zeta_3 = X_6, \\ \dot{\xi}_2 &= X_7, \quad \dot{\eta}_2 = X_8, \quad \dot{\zeta}_2 = X_9, \quad \dot{\xi}_3 = X_{10}, \quad \dot{\eta}_3 = X_{11}, \quad \dot{\zeta}_3 = X_{12}, \end{aligned}$$

le système (5.9) est ramené à un système de 12 équations différentielles du premier ordre :

$$\dot{X}_i = f_i(X), \quad i = 1, 2, \ldots, 12$$

qui sera intégré par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Pour l'exemple considéré, pris dans [146], les valeurs des masses m_1, m_2, m_3 et les conditions initiales sont les suivantes (valeurs données dans le système M. K. S.) :

- *corps 1 (la Terre, masse $m_1 = 5.974 \times 10^{24}$ kg), coordonnées $(0,0,0)$,*
- *corps 2 (la Lune, masse $m_2 = 7.348 \times 10^{22}$ kg), coordonnées (X_1, X_2, X_3), vecteur vitesse (X_7, X_8, X_9), à $t = 0$: $X_1(0) = 384600 \times 10^3$ m, $X_2(0) = X_3(0) = 0$, $X_7(0) = 0$, $X_8(0) = 1025$ m/s, $X_9(0) = 0$,*
- *corps 3 (le vaisseau spatial, masse $m_3 = 10000$ kg), coordonnées (X_4, X_5, X_6), vecteur vitesse (X_{10}, X_{11}, X_{12}), à $t = 0$: $X_4(0) = 1197000$ m, $X_5(0) = -9928000$ m, $X_6(0) = 0$, $X_{10}(0) = 8490$ m/s, $X_{11}(0) = -2455$ m/s, $X_{12}(0) = 100$ m/s.*

D'autre part, on prendra $g = 6.672 \times 10^{-11}$. La masse du vaisseau est ici négligeable vis-à-vis des deux autres masses et son influence est nulle dans ce cas particulier. Nous aurions pu, dans les équations, supprimer les termes où cette masse intervient, mais il est préférable de laisser au programme sa généralité.

```
(*************** PROBLEM DES TROIS CORPS spatial   ********/
Application au probl\'eme TERRE-LUNE-VAISSEAU SPATIAL :
              corps 1 = origine des coordonnes
/************** par la Methode de Runge-Kutta **************)

PROGRAM Troiscorps;
USES dos,crt, graph;
CONST MAX=12;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
var XO : vecteur;
```

```
    t,h,hx,hy,G,m1,m2,m3,r12,r13,r23 : real ;
    k2,l2,k3,l3 : integer ;    N,i : longint ;
    fs:text;  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
Function r(x,y,z:real):real;
begin
  r:=sqrt(x*x+y*y+z*z);
end;
Function f(x,y,b,c,d1,d2,d3:real):real;
begin
   f:=-G*(m1+b)*x/d1/d1/d1+G*c*((y-x)/d2/d2/d2-y/d3/d3/d3) ;
end;
PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
BEGIN
   YPRIME[1]:= Y[7] ;
   YPRIME[2]:= Y[8] ;
   YPRIME[3]:= Y[9] ;
   YPRIME[4]:= Y[10] ;
   YPRIME[5]:= Y[11] ;
   YPRIME[6]:= Y[12] ;
      r12:=r(Y[1],Y[2],Y[3]);
      r23:=r(Y[1]-Y[4],Y[2]-Y[5],Y[3]-Y[6]);
      r13:=r(Y[4],Y[5],Y[6]);
   YPRIME[7]:=f(Y[1],Y[4],m2,m3,r12,r23,r13) ;
   YPRIME[8]:=f(Y[2],Y[5],m2,m3,r12,r23,r13) ;
   YPRIME[9]:=f(Y[3],Y[6],m2,m3,r12,r23,r13) ;
   YPRIME[10]:=f(Y[4],Y[1],m3,m2,r13,r23,r12) ;
   YPRIME[11]:=f(Y[5],Y[2],m3,m2,r13,r23,r12) ;
   YPRIME[12]:=f(Y[6],Y[3],m3,m2,r13,r23,r12) ;
END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
clrScr;
      Assign(fs,'trois1.dat');
      rewrite(fs);
(* Unites : metre, kilogramme, seconde      *)
G:= 6.672E-11; m1:=5.974E24; m2:=7.348E22; m3:=10000 ; t:=0;
(* Coordonnees du corps 2 - LA LUNE     :   *)
X0[1]:= 384.6E6;X0[2]:=0;X0[3]:=0;
X0[7]:=0;X0[8]:=1025;X0[9]:=0;
(* Coordonnees du corps 3 - LE VAISSEAU SPATIAL     :   *)
X0[4]:=1197000;X0[5]:=-9928000;X0[6]:=0;
X0[10]:=8490;X0[11]:=-2455 ;X0[12]:=100;
(* Solution graphique :  *)
{Prendre la procedure Initialize du programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=-100.0E6;Xmax:=600.0E6;Ymin:=-100.0E6;Ymax:=400.0E6;
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
(* Pas de temps h en secondes et nombre d'iterations N  *)
t:=0; h := 600 ; (* = dix minutes *) N:=450 ;
 FOR i:=1 TO N DO
```

```
   BEGIN
{Prendre la procedure RUNGE_KUTTA du programme 1.1}
      RUNGE_KUTTA (X0);
      t := t+10 ;(* Temps en minutes *)
         k2:=round((X0[1]-Xmin)/hx) ;
         l2:=round((X0[2]-Ymin)/hy) ;
         PutPixel(k2,maxY-l2,1);
          writeln(fs,X0[1],' ',X0[2]);
         k3:=round((X0[4]-Xmin)/hx) ;
         l3:=round((X0[5]-Ymin)/hy) ;
         PutPixel(k3,maxY-l3,4);
          writeln(fs,X0[4],' ',X0[5]);
   END;     Close(fs);
 OutTextXY(250,20, ' Probleme des trois corps : ');
  readln;  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 5.1

Programme 5.2

```
      external fcn
      implicit double precision(a-h,o-z)
      parameter(n=4)
      real*8 x,xend, y(n), w(n,7)
      data ifail /0/
      data x,xend,fmu,C/0.,.001,0.5,4./
      y(1)=-0.424937316
      y(2)=0.
      y(3)=0.
      r1=((y(1)+fmu)**2+y(3)**2)**0.5
      r2=((y(1)-1+fmu)**2+y(3)**2)**0.5
      U=(1.-fmu)/r1+fmu/r2
      y(4) = (y(1)**2+y(3)**2+2*U-y(2)**2-C)**0.5
      do k=1,10000
      tol=0.001
      call d02baf(x,xend,n,y,tol,fcn,w,ifail)
      xend=xend+0.001
      if(ifail.eq.0)then
                  write(*,101)y(1),y(3)
      else
                  write(*,*)'k=,ifail=', k,ifail
      endif
      enddo
 100  format(4(1x,f14.10))
 101  format(2(1x,f14.10))
       stop
           end
            subroutine FCN(x,y,f)
      implicit double precision(a-h,o-z)
      parameter(n=4)
      real*8 x,y(n),f(n)
```

```
      data fmu/0.50/
      r1=((y(1)+fmu)**2+y(3)**2)**0.5
      r2=((y(1)-1+fmu)**2+y(3)**2)**0.5
      f(1)=y(2)
      f(2)=2*y(4)+y(1)-(1.-fmu)*(y(1)+fmu)/r1**3
     &     -fmu*(y(1)-1.+fmu)/r2**3
      f(3)=y(4)
      f(4)=-2*y(2)+y(3)-(1.-fmu)*y(3)/r1**3
     &     -fmu*y(3)/r2**3

      return
      end
```

Programme 5.3

```
c      SECTION DE POINCARE  ==================
      external fcn
      implicit double precision(a-h,o-z)
      parameter(n=4)
      real*8 x,xend, y(n), w(n,7)
      data ifail /0/
      data x,xend,fmu,C/0.,.001,0.5,4./
      y(1)=-0.42
      y(2)=0.
      y(3)=0.
      r1=((y(1)+fmu)**2+y(3)**2)**0.5
      r2=((y(1)-1+fmu)**2+y(3)**2)**0.5
      U=(1.-fmu)/r1+fmu/r2
      y(4) = (y(1)**2+y(3)**2+2*U-y(2)**2-C)**0.5
      do k=1,1000000
      tol=0.001
      call d02baf(x,xend,n,y,tol,fcn,w,ifail)
      if ((abs(y(3)).LT.0.0001).AND.(y(4).GT.0)) then
                  write(*,101)y(1),y(2)
      endif
      xend=xend+0.001
      enddo
 100  format(4(1x,f14.10))
 101  format(2(1x,f14.10))
       stop
           end
            subroutine FCN(x,y,f)
      implicit double precision(a-h,o-z)
      parameter(n=4)
      real*8 x,y(n),f(n)
      data fmu/0.50/
      r1=((y(1)+fmu)**2+y(3)**2)**0.5
      r2=((y(1)-1+fmu)**2+y(3)**2)**0.5
      f(1)=y(2)
      f(2)=2*y(4)+y(1)-(1.-fmu)*(y(1)+fmu)/r1**3
     &     -fmu*(y(1)-1.+fmu)/r2**3
```

```
      f(3)=y(4)
      f(4)=-2*y(2)+y(3)-(1.-fmu)*y(3)/r1**3
     &     -fmu*y(3)/r2**3

      return
      end
```

Programme 5.4

```
PROGRAM SITNIKOV1;
USES dos,crt,graph;
CONST MAX=3;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
var
    Y0 : vecteur;
    j,k,l : integer;  h,hx,hy,e : real ;
    N,i : longint ;  MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
var U : real;
BEGIN
   YPRIME[1]:= Y[2] ;
   U:=Ln(0.25+Y[1]*Y[1]) ;
   YPRIME[2]:= - (exp(-3*U/2) + e*cos (Y[3]))*Y[1]/(1+e*cos (Y[3])) ;
   YPRIME[3]:= 1 ;
END;
BEGIN   (*Programme principal  *)
(* periodic : e:=0.23; Y0[1]:=1.1; Y0[2]:=0;  *)
Writeln(' Entrez la valeur de e, exemple 0.23 : ');
Readln(e);
(* Valeurs initiales : *)
Writeln('Valeurs initiales T(0), T''(0) ? exemple 1.1 0  : ');
Readln(Y0[1],Y0[2]); Y0[3]:=0 ;
N :=10000; h := 2*Pi*1.0E-4 ;
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=-4.0;   Xmax:=4.0;   Ymin:=-4;   Ymax:=4;
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
         k:=round((Y0[1]-Xmin)/hx) ;
         l:=round((Y0[2]-Ymin)/hy) ;
         moveto(k,maxY-l);
   FOR i:=1 TO N DO
{Prendre la procedure RUNGE_KUTTA du  programme 1.1}
      BEGIN RUNGE_KUTTA(Y0);
        Begin
         k:=round((Y0[1]-Xmin)/hx) ; l:=round((Y0[2]-Ymin)/hy) ;
         lineto(k,maxY-l);
        End; END;
 OutTextXY(50,10, ' Probleme de Sitnikov : ');
  readln;  CloseGraph;
```

```
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 5.25

Programme 5.5

```
(*********PROBLEME DE  SITNIKOV 2   ********/
=========== SECTION DE POINCARE ==============)
PROGRAM SITNIKOV2;
USES dos,crt,graph;
CONST MAX=3;
TYPE     VECTEUR = ARRAY[1..MAX] OF REAL;
var
    Y0,Y1 : vecteur;
    Np,k,l,j : integer;
    h,hx,hy,e : real ;
    N,i : longint ;
    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
PROCEDURE FCN(Var Y,YPRIME:vecteur);
var U : real;
BEGIN
   YPRIME[1]:= Y[2] ;
   U:=Ln(0.25+Y[1]*Y[1]) ;
   YPRIME[2]:= - (exp(-3*U/2) + e*cos (Y[3]))*Y[1]/(1+e*cos (Y[3])) ;
   YPRIME[3]:= 1 ;
END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
Np:=10000 ; N :=100 ;
e:=0.37; Y0[1]:=0.5; Y0[2]:=0; Y0[3]:=0;
h := 2*Pi/Np ;
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=-5.0;   Xmax:=5.0;
   Ymin:=-5;   Ymax:=5;
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX;  hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
FOR i:=1 TO N DO
   BEGIN
    For j:=1 to Np Do
{Prendre la procedure RUNGE_KUTTA du  programme 1.1}
     RUNGE_KUTTA(Y0);
         k:=round((Y0[1]-Xmin)/hx) ;
         l:=round((Y0[2]-Ymin)/hy) ;
         PutPixel(k,maxY-l,2);
   END;
 OutTextXY(50,10, ' Probleme de Sitnikov : ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure 5.25

5.10 Exercices

(Les réponses sont données à l'Annexe A)

Exercice 5.1 1) Résoudre le système képlérien (1.92) avec les valeurs initiales suivantes: $r(0) = r_0$ = valeur minimale de r (périhélion), $\theta(0) = 0$ et $r_0\dot{\theta}(0) = v_0$ (vitesse initiale). Montrer que le système (1.92) est intégrable. Discuter suivant les valeurs de v_0, r_0 et M (orbites elliptique, parabolique ou hyperbolique).

2) Dans le cas d'une orbite elliptique, calculer la période et la vitesse angulaire moyenne en fonction de v_0, r_0 et M.

3) Dans le problème restreint avec $\mu = 0$, calculer la constante de Jacobi C en fonction de v_0 et r_0.

Exercice 5.2 On considère les équations du mouvement (5.2) des trois masses finies m_1, m_2, m_3 par rapport à leur centre de gravité G (voir (5.2) et (5.3)) sous forme vectorielle:

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{3} m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{r_{jk}^3}, \quad k = 1,2,3, \tag{5.123}$$

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 = 0 \tag{5.124}$$

avec $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k)^T$, $k = 1,2,3$, $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$. L'unité de temps a été choisie de façon que $g = 1$.

1) Montrer que si les trois masses forment un triangle équilatéral

$$r_{12} = r_{23} = r_{31} = r$$

(r n'est pas nécessairement constant), alors les équations du mouvement des 3 masses auront la forme suivante:

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = f(r_k)\mathbf{r}_k, \quad k = 1,2,3, \tag{5.125}$$

avec

$$f(r_k) = -\frac{(m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2)^{3/2}}{(m_1 + m_2 + m_3)^2}\frac{1}{r_k^3}.$$

2) Inversement, supposons que les équations du mouvement des 3 masses aient la forme (5.125). Montrer que dans ce cas, ou bien les 3 masses forment un triangle équilatéral, ou bien les trois masses sont alignées. (Ces solutions sont appelées solutions de Lagrange [35]).

3) Considérons le cas des solutions alignées et choisissons un système tournant autour de G avec la ligne des masses comme axe des x. Dans ce système, la masse m_k a pour coordonnées $(x_k, 0, 0)$, $k = 1, 2, 3$. On suppose qu'à l'état initial $x_1 - x_2 = 1$ et $x_1 < x_2 < x_3$. Montrer que la valeur initiale de x_3 est uniquement déterminée par une équation du 5e degré.

Exercice 5.3 Problème restreint à trois dimension. Considérons le même modèle que dans la section 5.2 mais supposons que les conditions initiales sur P_3, de masse nulle, soient telles que le corps P_3 ne soit plus astreint à rester dans le plan du

mouvement circulaire de P_2 autour de P_1. De ce fait P_3 aura trois degrés de liberté. Comme dans le cas du problème restreint plan, P_1 et P_2 sont sur l'axe tournant $G\xi$ de coordonnées $P_1(\mu,0,0)$ et $P_2(\mu-1,0,0)$ respectivement et le plan $G\xi\eta$ tourne autour de l'axe $G\zeta$ avec une vitesse $\omega = 1$ (Cf. figure 5.31).

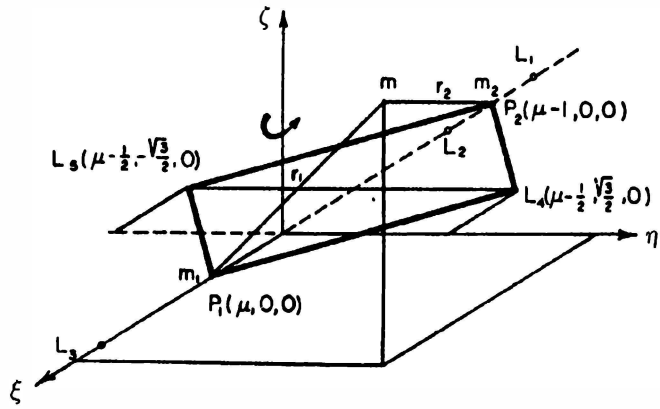


FIG. 5.31 – *Problème restreint à trois dimensions. D'après [153].*

1) Ecrire les équations du mouvement et l'intégrale de Jacobi dans le système tournant $G\xi\eta\zeta$.

2) On restreint le mouvement du corps P_3 à l'axe des ζ. Quelle est la condition sur μ pour que le problème soit possible? Montrer que dans ce cas la solution est obtenue par une quadrature [153]

Exercice 5.4 Problème restreint elliptique. Considérons le même modèle que la section 5.2 mais supposons que les constantes d'intégration ont été définies de façon que le mouvement de P_2 par rapport à P_1 soit une ellipse de demi grand axe a, d'excentricité e et ayant P_1 comme foyer. Dans ce cas la distance $r = |P_1P_2|$ n'est plus constante mais est donnée par (Cf. Exercice 5.1):

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}, \tag{5.126}$$

où θ est l'anomalie vraie.

1) Ecrire les équations du mouvement du corps P_3 dans un système de coordonnées fixe (système sidéral) Gxy où G est le centre de gravité de P_1 et P_2.

2) On introduit un système de coordonnées tournant $G\xi\eta$ (système synodique) en posant:

$$z = \zeta e^{i\theta} \tag{5.127}$$

avec $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. Ecrire l'équation différentielle pour ζ.

3) Soit:

$$\bar{\zeta} = \zeta/r = \bar{\xi} + i\bar{\eta}. \tag{5.128}$$

Ecrire l'équation différentielle pour $\bar{\zeta}$, la variable indépendante étant θ [153].

Exercice 5.5 Problème isocèle plan [43]. On considère dans le plan xOy les trois masses $m_1 = m_2$, m_3 disposées comme sur la figure 5.32, l'origine étant le centre de gravité des trois masses, $x_1 \geq 0$, $x_2 \in \mathbb{R}$. Les masses m_1 et m_2 ont des positions et vitesses initiales symétriques par rapport à l'axe des y tandis que la masse m_3 a une vitesse initiale parallèle à l'axe des y. On suppose que les masses s'attirent mutuellement selon la loi d'attraction newtonienne.

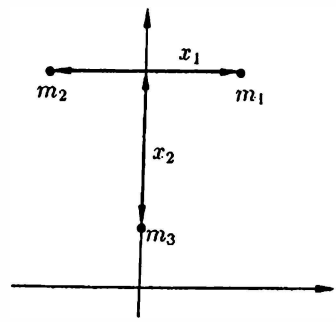


FIG. 5.32 – *Problème isocèle plan. D'après [43].*

1) Ecrire les équations du mouvement du système, les variables étant x_1, x_2.
2) Soient p_1, p_2 les moments conjugués de x_1, x_2 définis par :

$$p_1 = m_1\dot{x}_1/2, \quad p_2 = 2m_1m_3\dot{x}_2/M, \quad M = 2m_1 + m_3.$$

Montrer que les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme hamiltonienne :

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2$$

où $H(x_1, x_2, p_1, p_2)$ obéit à la relation d'énergie :

$$H(x_1, x_2, p_1, p_2) = h = \text{ const.} \tag{5.129}$$

Etudier le cas $m_3 = 0$, $h > 0$. On effectuera un changement de temps $dt = x_1 ds$.

Annexe A

Réponses aux exercices

A.1 Réponses aux exercices du chapitre 1

Exercice 1.1 : a) Les points fixes de (1.194) sont $(0,0)$ et $(c/\gamma, a/\alpha)$. Le système linéarisé à l'origine s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Les valeurs propres sont $-c$ et a. L'origine est un point selle pour (A.1) et (1.194) (donc instable).

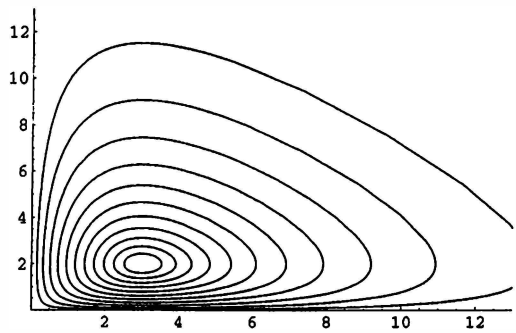


FIG. A.1 – *Portraits de phase de l'équation de Lotka-Volterra par le programme A.1.*

Pour obtenir le système linéarisé au point fixe $(c/\gamma, a/\alpha)$, on fait la substitution $x = c/\gamma + u$, $y = a/\alpha + v$ dans (1.194) puis on néglige les termes non-linéaires. Il vient :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Les valeurs propres sont $\lambda = \pm i\sqrt{ac}$. Le point fixe $(c/\gamma, a/\alpha)$ est un centre (donc stable) pour (A.2).

b) Eliminant y de (1.194) on obtient l'équation :

$$\ddot{x} - \frac{\dot{x}^2}{x} + (ax - \dot{x})(\gamma x - c) = 0. \tag{A.3}$$

L'intégrale première de cette équation est :

$$\frac{c}{a}\left(\frac{\gamma x}{c} - \log x\right) - \frac{\dot{x}}{ax} - \log\left(1 - \frac{\dot{x}}{ax}\right) = C. \tag{A.4}$$

c) Les portraits des phases sont dessinés par le programme Mathematica A.1. Les résultats sont présentés sur la figure A.1.

Exercice 1.2 : a) L'origine est un point d'équilibre pour ce système et

$$Df(0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$Df(0)$ a pour valeurs propres $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$. C'est un point elliptique (ou centre).

b) Essayons une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V(x) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2.$$

Nous avons :

$$\frac{1}{2}\dot{V}(x) = (a_1 - a_2 + a_3)xyz + (-2a_1 + a_2)xy.$$

On en déduit que si $a_2 = 2a_1$ et $a_3 = a_1 > 0$, on a $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $\dot{V}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. On en déduit que $x = 0$ est stable. De plus, en choisissant $a_1 = a_3 = 1$ et $a_2 = 2$, on voit que les trajectoires sont sur l'ellipsoïde :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = c^2.$$

Exercice 1.3 : a) Les courbes $y = x/(a+x^2)$ et $y = b/(a+x^2)$ sont données sur la figure A.2 en même temps que les directions $dy/dx = \dot{y}/\dot{x}$. Le point fixe a pour coordonnées :

$$x^* = b, \quad y^* = \frac{b}{a+b^2}.$$

Le domaine présenté sur la figure A.2 est le domaine d'attraction du système. En particulier sur la diagonale, de pente -1, rejoignant le point $(b, b/a)$ à la courbe $y = x/(a+x^2)$, on a :

$$\dot{x} - (\dot{y}) = -x + ay + x^2y + (b - ay - x^2y) = b - x.$$

On en déduit que $\dot{y}/\dot{x} < -1$ si $x > b$. De plus si le point fixe est répulsif, on peut appliquer le théorème de Poincaré-Bendixson à la région délimitée de la figure A.2 (où le cercle entourant le point fixe est de rayon infiniment petit).

b) Cherchons maintenant dans quelle condition le point fixe est répulsif. La matrice jacobienne du système (1.197) s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -(a + x^2) \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

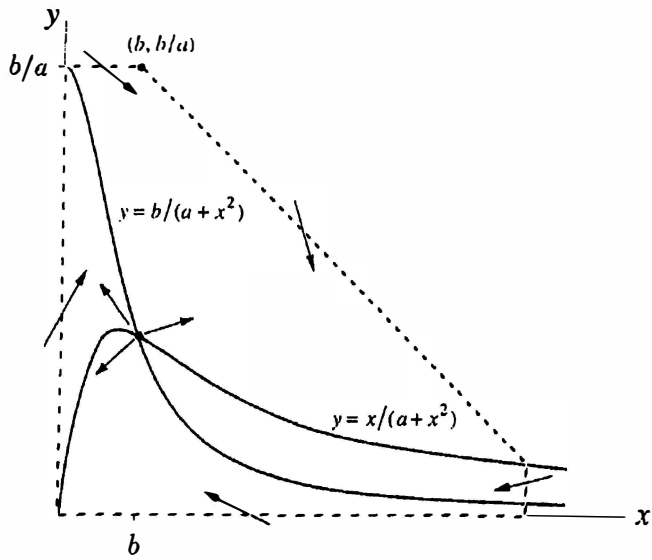


FIG. A.2 – *Domaine de Poincaré-Bendixson de l'oscillateur glycolytique. D'après [152].*

Pour $x = x^*$, $y = y^*$, on a :

$$\det A = a + b^2, \quad \text{Trace } A = -C/(a + b^2).$$

On en déduit que le point fixe est instable (resp. stable) si $C < 0$ (resp. $C > 0$). La courbe $C = 0$ est donnée sur la figure (A.3).

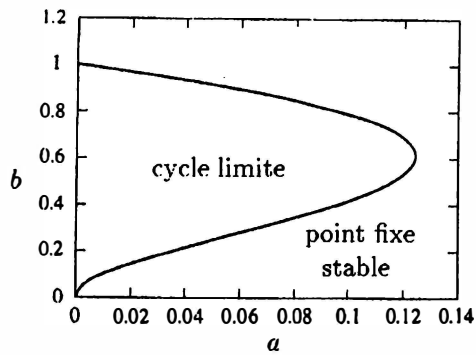


FIG. A.3 – *Diagramme de bifurcation de l'oscillateur glycolytique. D'après [152].*

La figure A.4a montre le cycle limite à $a = 0.08, b = 0.6$. K. Tomita et H. Daido (voir [85] p.33) ont ajouté à (1.197) un terme forcé sinusoïdal :

$$\dot{x} = -x + ay + x^2y, \quad \dot{y} = b - ay - x^2y + A\cos ft \tag{A.6}$$

et obtiennent pour $a = 0, b = 0.999, A = 0.42$, des orbites quasipériodiques à $f = 4.5, f = 3.5$, des doublements de période à $f = 2, f = 1.8$ et une solution chaotique pour $f = 1.75$. Cette dernière est représentée sur la figure A.4b.

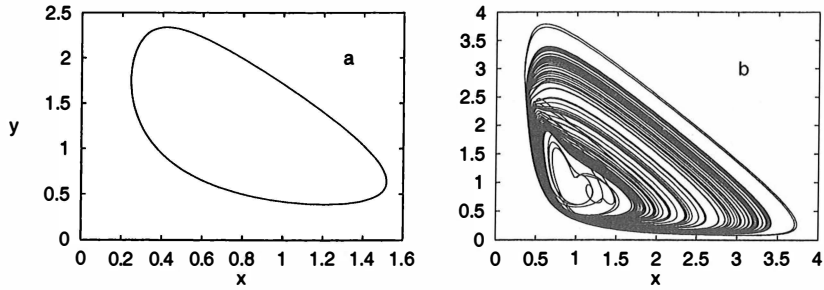


FIG. A.4 – *a) Cycle limite de l'oscillateur glycolytique à* $a = 0.08$, $b = 0.6$ *b) Orbite chaotique de l'oscillateur forcé à* $a = 0$, $b = 0.999$, $A = 0.42$, $f = 1.75$.

Exercice 1.4 : 1)

$$J(x) = \begin{bmatrix} y & x \\ -2x & -1 \end{bmatrix}, \quad J(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Valeurs propres: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$. L'origine est un point fixe non-hyperbolique avec $E^c(0) = \{(x,y)|y = 0\}$ et $E^s(0) = \{(x,y)|x = 0\}$.

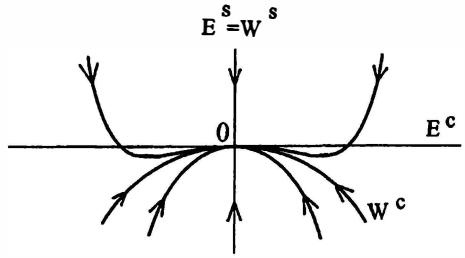


FIG. A.5 – W^c *et* W^s. *D'après [63].*

2) La variété centrale au voisinage de l'origine a pour équation $y = h(x)$, avec $h(0) = h'(0) = 0$. On pose:

$$y = h(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + O(x^6),$$

d'où:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= h'(x)\dot{x} = h'(x)xy = xh(x)h'(x) \\ &= x(ax^2 + bx^3 + \cdots)(2ax + 3bx^2 + \cdots) \\ &= 2a^2x^4 + 5abx^5 + O(x^6). \end{aligned} \tag{A.7}$$

De plus, d'après (1.198), on a:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -h(x) - x^2 \\ &= -(a+1)x^2 - bx^3 - cx^4 - dx^5 + O(x^6), \end{aligned} \tag{A.8}$$

d'où, en identifiant (A.7) et (A.8) : $a = -1$, $b = 0$, $c = -2$, $d = 0$. On obtient alors

$$y = h(x) = -x^2 - 2x^4 + O(x^6).$$

Le mouvement sur la variété centrale (qui est tangente à l'axe des x à l'origine) est alors donné par l'équation :

$$\dot{x} = xh(x) = -x^3 - 2x^5 + O(x^7).$$

On en déduit le graphe de la figure A.5. Noter que la variété centrale n'est pas unique [63].

Exercice 1.5 : 1) La figure A.6 gauche montre que $x/X = 1/Z$, $y/Y = 1/Z$. D'où (1.200). On en déduit :

$$X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

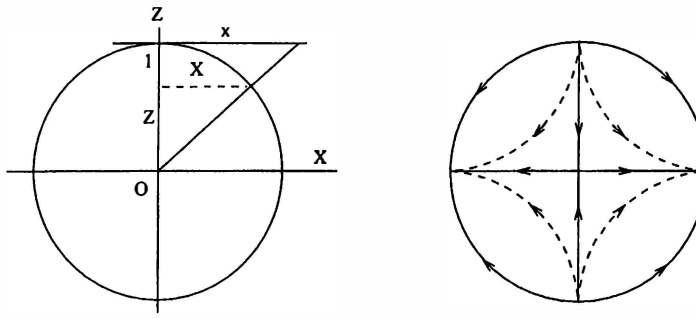


FIG. A.6 – *Une section de la sphère de Poincaré (à gauche) et portrait de phase global du système $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$ (à droite). D'après [133].*

2) On déduit de (1.199) la forme différentielle :

$$Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0. \tag{A.9}$$

En différentiant (1.200) on obtient :

$$dx = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2}, \quad dy = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2}. \tag{A.10}$$

Portant (1.200) et (A.10) dans (A.9) on obtient :

$$Q(X/Z,Y/Z)(ZdX - XdZ) - P(X/Z,Y/Z)(ZdY - YdZ) = 0. \tag{A.11}$$

Multipliant (A.11) par Z^m on obtient :

$$ZQ^*dX - ZP^*dY + (YP^* - XQ^*)dZ = 0, \tag{A.12}$$

avec $P^*(X,Y,Z) = Z^m P(X/Z, Y/Z)$, $Q^*(X,Y,Z) = Z^m Q(X/Z, Y/Z)$. Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme (1.201).

3) Les points fixes de (A.12) sur l'équateur de S^2 où $Z = 0$ sont donnés par:

$$YP^*(X,Y,Z) - XQ^*(X,Y,Z) = 0. \tag{A.13}$$

Si $P(x,y) = \sum_{j=1}^m P_j(x,y)$, $Q(x,y) = \sum_{j=1}^m Q_j(x,y)$, l'équation (A.13) s'écrit alors:

$$\begin{aligned} YP^* - XQ^* &= Z^m \sum_{j=1}^{m-1} \Big(YP_j(X/Z, Y/Z) - XQ_j(X/Z, Y/Z) \Big) \\ &\quad + YP_m(X,Y) - XQ_m(X,Y) \\ &= YP_m(X,Y) - XQ_m(X,Y) = 0, \end{aligned} \tag{A.14}$$

car $Z = 0$. Comme pour $Z = 0$, on a $X^2 + Y^2 = 1$, on peut écrire $X = \cos\theta$,

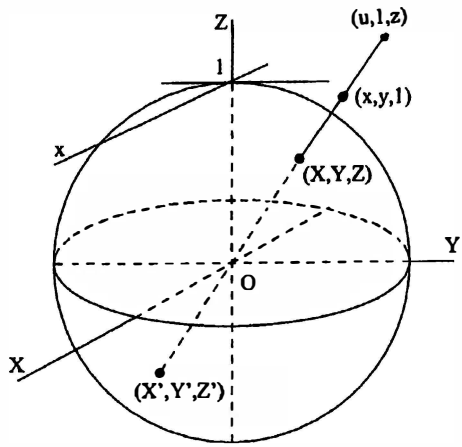


FIG. A.7 – *La sphère de Poincaré.*

$Y = \sin\theta$. L'équation (A.14) s'écrit alors

$$\sin\theta P_m(\cos\theta, \sin\theta) - \cos\theta Q_m(\cos\theta, \sin\theta) = 0.$$

Application:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y. \tag{A.15}$$

L'origine est un point selle ($\lambda = \pm 1$). Pour le point fixe à l'infini, l'équation (A.14) s'écrit:

$$YP_1(X,Y) - XQ_1(X,Y) = 2XY = 0.$$

Les points fixes sur l'équateur de S^2 sont donc:

$$(X,Y,Z) = (\pm 1, 0, 0) \text{ et } (X,Y,Z) = (0, \pm 1, 0).$$

Si l'on projette la demi-sphère de Poincaré orthogonalement sur le disque $x^2 + y^2 = 1$ du plan (x,y), on obtient la figure A.6 (droite), appelée portrait de phase global. A

noter que pour trouver le flot au voisinage du point fixe $(0,1,0)$, par exemple, on projette (X,Y,Z) sur le plan $Y=1$. Soit $(u,1,z)$ le point d'impact (figure A.7). Comme $(0,0,0)$, (X,Y,Z), $(x,y,1)$ et $(u,1,z)$ sont alignés, on a :

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{1}=\frac{1}{z}.$$

On en déduit :

$$x=\frac{u}{z},\quad y=\frac{1}{z}. \tag{A.16}$$

Portant (A.16) dans (A.15) on obtient :

$$\dot{u}=2u,\quad \dot{z}=z. \tag{A.17}$$

Au point $u=z=0$, le système (A.17) a pour valeurs propres $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$. On en déduit que le point $u=z=0$ est un nœud instable (ou une source) [133].

Exercice 1.6 : a) On a :

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_1 &= P_1,\quad \dot{Q}_2=P_2,\quad \dot{Q}_3=P_3,\\
\dot{P}_1 &= e^{Q_3-Q_1}-e^{Q_1-Q_2},\quad (\dot{\cdot})=d/dt,\\
\dot{P}_2 &= e^{Q_1-Q_2}-e^{Q_2-Q_3},\\
\dot{P}_3 &= e^{Q_2-Q_3}-e^{Q_3-Q_1}.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

On vérifie facilement que

$$\dot{P}_1+\dot{P}_2+\dot{P}_3=0. \tag{A.19}$$

On en déduit que $I_1=P_1+P_2+P_3=\text{Cte}$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(P_1P_2) &= P_1\dot{P}_2+P_2\dot{P}_1\\
&= \dot{Q}_1(e^{Q_1-Q_2}-e^{Q_2-Q_3})+\dot{Q}_2(e^{Q_3-Q_1}-e^{Q_1-Q_2})\\
&= \frac{d}{dt}e^{Q_1-Q_2}-\dot{Q}_1e^{Q_2-Q_3}+\dot{Q}_2e^{Q_3-Q_1}.
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(P_2P_3) &= \frac{d}{dt}e^{Q_2-Q_3}-\dot{Q}_2e^{Q_3-Q_1}+\dot{Q}_3e^{Q_1-Q_2},\\
\frac{d}{dt}(P_3P_1) &= \frac{d}{dt}e^{Q_3-Q_1}-\dot{Q}_3e^{Q_1-Q_2}+\dot{Q}_1e^{Q_2-Q_3}.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{d}{dt}(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1)=\frac{d}{dt}(e^{Q_1-Q_2}+e^{Q_2-Q_3}+e^{Q_3-Q_1}),$$

c'est-à-dire $I_2=P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1-(e^{Q_1-Q_2}+e^{Q_2-Q_3}+e^{Q_3-Q_1})=\text{Cte}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(P_1P_2P_3) &= P_1P_2(e^{Q_2-Q_3}-e^{Q_3-Q_1})\\ &+ P_2P_3(e^{Q_3-Q_1}-e^{Q_1-Q_2})+P_3P_1(e^{Q_1-Q_2}-e^{Q_2-Q_3})\\ &= P_1\frac{d}{dt}e^{Q_2-Q_3}+P_2\frac{d}{dt}e^{Q_3-Q_1}+P_3\frac{d}{dt}e^{Q_1-Q_2}\\ &= \frac{d}{dt}(P_1e^{Q_2-Q_3}+P_2e^{Q_3-Q_1}+P_3e^{Q_1-Q_2}.)\end{aligned}$$

On en déduit $I_3 = P_1P_2P_3 - (P_1e^{Q_2-Q_3}+P_2e^{Q_3-Q_1}+P_3e^{Q_1-Q_2})$= Cte. Le système est donc intégrable.

b) Les équations du mouvement pour les a_n, b_n s'écrivent :

$$\dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}), \quad \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \tag{A.20}$$

$n = 1, 2, 3$, avec $a_0 \equiv a_3$, $b_0 \equiv b_3$. On peut aussi écrire (A.20) sous la forme de Lax

$$\dot{L} = BL - LB,$$

avec

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & a_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) $\beta = (e^c - e^{-c})/2$, $k_n = (e^{-2(n+1)c})/(1-e^{-2c})$, où c est une constante quelconque.

Exercice 1.7 : 1) Les coordonnées de $P^{\pm}$ sont :

$$x^* = \pm\sqrt{\frac{\frac{\gamma}{\gamma+\beta}-c}{a}}, \quad y^* = \frac{\gamma x^*}{\gamma+\beta}, \quad z^* = -\frac{\beta x^*}{\gamma+\beta}.$$

Les matrices jacobiennes sont :

$$M_O = \begin{bmatrix} -\alpha c & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}, \quad M_{P^{\pm}} = \begin{bmatrix} 2\alpha c - \frac{3\alpha\gamma}{\gamma+\beta} & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & -\gamma \end{bmatrix}.$$

2) Les équations caractéristiques correspondantes sont :

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - M_O) &= \lambda^3 + (1+\gamma+\alpha c)\lambda^2 \\ &+[\gamma + \alpha c(1+\gamma) - \alpha + \beta]\lambda + \alpha\gamma c - \alpha\gamma + \beta\alpha c = 0, \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - M_{P^{\pm}}) &= \lambda^3 + \left(1+\gamma-2\alpha c+\frac{3\alpha\gamma}{\gamma+\beta}\right)\lambda^2 \\ &+[\gamma+\beta-\left(2\alpha c-\frac{3\alpha\gamma}{\gamma+\beta}\right)(1+\gamma)-\alpha]\lambda \\ &-2\alpha\gamma c + 2\alpha\gamma - 2\beta\alpha c = 0.\end{aligned} \tag{A.22}$$

a) Si l'une des valeurs propres est nulle, les termes constants de (A.21) et (A.22) sont nuls. On en déduit : $\alpha = 0$ ou $\beta = \gamma(1-c)/c$.

b) D'après les relations entre les coefficients et racines d'un polynôme :

$$\begin{aligned} \text{Pour } M_O : 1+\gamma+\alpha c &= -2\sigma-\rho, \\ \gamma+\alpha c(1+\gamma)-\alpha+\beta &= \sigma^2+2\sigma\rho+\omega^2, \\ \alpha\gamma c-\alpha\gamma+\beta\alpha c &= -\sigma^2\rho-\omega^2\rho. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } M_{P\pm} : 1+\gamma-2\alpha c+\frac{3\alpha\gamma}{\gamma+\beta} &= -2\sigma-\rho, \\ \gamma-2\alpha c(1+\gamma)+\frac{3\alpha\gamma}{\gamma+\beta}(1+\gamma)-\alpha+\beta &= \sigma^2+2\sigma\rho+\omega^2, \\ -2\alpha\gamma c+2\alpha\gamma-2\beta\alpha c &= -\sigma^2\rho-\omega^2\rho. \end{aligned}$$

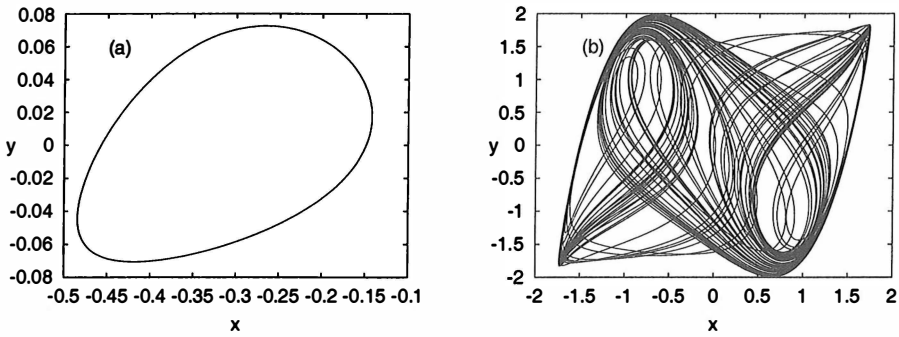


FIG. A.8 – *Oscillateur de Chua : orbite périodique (a) et orbite chaotique (b).*

3) Les valeurs propres de M_O sont : (a) 1.9356, $-0.872 \pm 3.015i$; (b) 7.8248, $-0.2229 \pm 4.6759i$ et celles de $M_{P\pm}$ sont : (a) -3.5648, $0.0908 \pm 3.2694i$; (b) -14.8642, $0.0522 \pm 4.8031i$.
Dans les deux cas, les points d'équilibre O et $P^{\pm}$ sont instables.

On peut utiliser un programme semblable au programme 1.1 de la section 1.10. Les résultats sont présentés sur la figure A.8. Les valeurs initiales sont [91] :
a) $x(0) = -0.256$; $y(0) = -0.049$; $z(0) = 0.067$,
b) $x(0) = -0.451$; $y(0) = 0.763$; $z(0) = -5.593$.

Exercice 1.8 : On peut écrire $f(x)$ sous la forme suivante :

$$f(x) = \begin{cases} bx+a-b, & x \geq 1, \\ ax, & |x| \leq 1, \\ bx-a+b, & x \leq -1. \end{cases} \tag{A.23}$$

Le système possède 3 points fixes : $O(0,0,0)$, $P^+(3/2,0,-3/2)$ et $P^-(-3/2,0,3/2)$. La matrice jacobienne s'écrit :

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} -\alpha(1+f') & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \tag{A.24}$$

avec, d'après (A.23), $f' \equiv f'(x) = a = -8/7$ si $|x| \leq 1$ et $f' = b = -5/7$ si $|x| \geq 1$. L'équation caractéristique s'écrit :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \tag{A.25}$$

avec $a_1 = \alpha(1 + f') + 1$, $a_2 = \alpha f' + \beta$, $a_3 = \alpha\beta(1 + f')$.

- Pour le point fixe O, on a :

$$a_1 = 1 - \alpha/7, \quad a_2 = (-8\alpha + 100)/7, \quad a_3 = -100\alpha/49. \tag{A.26}$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les racines de (A.25), on a :

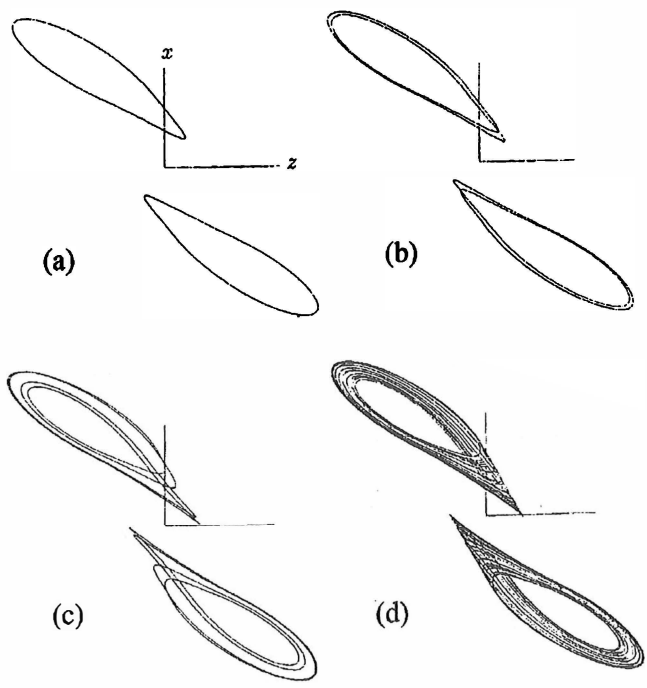


FIG. A.9 – *Circuit de Chua : a) orbite périodique à $\alpha = 8.0$, b) une paire d'orbites 2-périodiques ($\alpha = 8.2$), c) une paire d'orbites 4-périodiques ($\alpha = 8.44$), d) attracteur de type spiral ($\alpha = 8.5$). D'après [118].*

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -a_3 = 100\alpha/49 > 0.$$

On en déduit qu'il existe toujours une valeur propre réelle positive[1], donc O est instable.

- Pour les points fixes $P^{\pm}$, on a :

$$a_1 = 1 + 2\alpha/7, \quad a_2 = (100 - 5\alpha)/7, \quad a_3 = 200\alpha/49. \tag{A.27}$$

1. En effet, si λ_1, λ_2 sont complexes conjugués : $\lambda_1\lambda_2 = |\lambda_1|^2 > 0$, donc $\lambda_3 > 0$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont réels, il y aura, au moins, une valeur propre positive.

Les points $P^{\pm}$ sont stables seulement si (Algorithme de Routh [70]) $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ et $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Lorsque

$$a_1 a_2 = a_3, \tag{A.28}$$

la valeur propre complexe traverse l'axe imaginaire et on a :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{a_2}, \quad \lambda_3 = -a_1 \tag{A.29}$$

(en résolvant un système analogue à (1.63) avec $\lambda_r = 0$). Portant (A.27) dans (A.28), on obtient l'équation :

$$\alpha^2 + 3.5\alpha - 70 = 0.$$

D'où

$$\alpha_c = \frac{1}{2}\left[-3.5 + \sqrt{(3.5)^2 + 280}\right] \approx 6.8.$$

Si α croît encore, on obtient une cascade de doublements de période et du chaos (Cf. figure A.9).

Exercice 1.9 : 1) La matrice du système linéarisé est déjà diagonalisée et s_1, s_2 sont ses valeurs propres. (1.155) s'écrit ici :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{10} y_1^2 + \alpha_{11} y_1 y_2 + \alpha_{12} y_2^2 \\ \alpha_{20} y_1^2 + \alpha_{21} y_1 y_2 + \alpha_{22} y_2^2 \end{pmatrix}. \tag{A.30}$$

Dérivant (A.30) et reportant dans (1.206) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1(1 + 2\alpha_{10} y_1 + \alpha_{11} y_2) + \dot{y}_2(\alpha_{11} y_1 + 2\alpha_{12} y_2) \\
&= s_1 y_1 + (a_{10} + s_1\alpha_{10}) y_1^2 + (a_{11} + s_1\alpha_{11}) y_1 y_2 + (a_{12} + s_1\alpha_{12}) y_2^2 + O(3), \\
&\dot{y}_1(2\alpha_{20} y_1 + \alpha_{21} y_2) + \dot{y}_2(1 + \alpha_{21} y_1 + 2\alpha_{22} y_2) \\
&= s_2 y_2 + (a_{20} + s_2\alpha_{20}) y_1^2 + (a_{21} + s_2\alpha_{21}) y_1 y_2 + (a_{22} + s_2\alpha_{22}) y_2^2 + O(3).
\end{aligned}$$

A l'ordre un, $\dot{y}_{1,2} \sim s_{1,2} y_{1,2}$, $y_j \dot{y}_k \sim s_k y_j y_k$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= s_1 y_1 + (a_{10} - s_1\alpha_{10}) y_1^2 + (a_{11} - s_2\alpha_{11}) y_1 y_2 + (a_{12} + (s_1 - 2s_2)\alpha_{12}) y_2^2 + O(3), \\
\dot{y}_2 &= s_2 y_2 + (a_{20} + (s_2 - 2s_1)\alpha_{20}) y_1^2 + (a_{21} - s_1\alpha_{21}) y_1 y_2 + (a_{22} - s_2\alpha_{22}) y_2^2 + O(3).
\end{aligned}$$

Il est dès lors clair que la linéarisation complète à l'ordre 2 sera possible si

$$s_1 \neq 0, \quad s_2 \neq 0, \quad s_1 - 2s_2 \neq 0, \quad s_2 - 2s_1 \neq 0.$$

Considérons quelques cas résonnants :

a) $s_1 = s_2 = 0$: on ne peut rien supprimer ; (1.206) n'est pas simplifiable.

b) $s_1 = 0$, $s_2 \neq 0$ (donc $s_1 \neq 2s_2$) : annulant tous les coefficients qui peuvent l'être, nous obtenons :

$$\dot{y}_1 = a_{10} y_1^2, \quad \dot{y}_2 = s_2 y_2 + a_{21} y_1 y_2.$$

c) $s_1 = 2s_2 \neq 0$: on arrive à

$$\dot{y}_1 = s_1 y_1 + a_{12} y_2^2, \quad \dot{y}_2 = s_2 y_2.$$

2) La matrice du système linéarisé a pour valeurs propres $\sigma \pm i\omega$. Suivant la même stratégie nous aboutissons à

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \sigma y_1 + \omega y_2 + [a_{10} - \omega(\alpha_{11} + \alpha_{20}) - \sigma\alpha_{10}]y_1^2 \\
&+ [a_{11} - \omega(2\alpha_{10} - 2\alpha_{12} - \alpha_{21}) - \sigma\alpha_{11}]y_1y_2 + [a_{12} + \omega(\alpha_{22} - \alpha_{11}) - \sigma\alpha_{12}]y_2^2, \\
\dot{y}_2 &= -\omega y_1 + \sigma y_2 + [a_{20} - \omega(\alpha_{10} - \alpha_{21}) - \sigma\alpha_{20}]y_1^2 \\
&+ [a_{21} - \omega(\alpha_{11} + 2\alpha_{20} - \alpha_{22}) - \sigma\alpha_{21}]y_1y_2 + [a_{22} - \omega(\alpha_{12} + \alpha_{21}) - \sigma\alpha_{22}]y_2^2.
\end{aligned}$$

Annuler les coefficients des termes non-linéaires conduit à un système linéaire de 6 équations à 6 inconnues en α_{ij}. Calculant le déterminant de ce système on trouve $\Delta = 9\omega^6 + 19\omega^4\sigma^2 + 11\omega^2\sigma^4 + \sigma^6$ qui ne s'annule que pour $\sigma = \omega = 0$. Puisque le déterminant n'est pas nul, la solution du système est unique, ce qui signifie que, dans la forme normale, les termes quadratiques peuvent être supprimés (voir aussi l'exemple 1.9.2).

3) Le changement de variable non-linéaire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{10}y_1^3 + \alpha_{11}y_1^2y_2 + \alpha_{12}y_1y_2^2 + \alpha_{13}y_2^3 \\ \alpha_{20}y_1^3 + \alpha_{21}y_1^2y_2 + \alpha_{22}y_1y_2^2 + \alpha_{23}y_2^3 \end{pmatrix}.$$

conduit directement à un système de la forme (1.208) pour (y_1, y_2) avec un nouveau jeu de coefficients a_{ij} :

$$\begin{aligned}
&a_{10} \mapsto a_{10} + 2s_1\alpha_{10}, \quad a_{11} \mapsto a_{11} + (s_1 + s_2)\alpha_{11}, \\
&a_{12} \mapsto a_{12} + 2s_2\alpha_{12}, \quad a_{13} \mapsto a_{13} - (s_1 - 3s_2)\alpha_{13}, \\
&a_{20} \mapsto a_{20} + (3s_1 - s_2)\alpha_{20}, \quad a_{21} \mapsto a_{21} + 2s_1\alpha_{21}, \\
&a_{22} \mapsto a_{22} + (s_1 + s_2)\alpha_{22}, \quad a_{23} \mapsto a_{23} + 2s_2\alpha_{23}.
\end{aligned}$$

A côté des conditions $s_1 \neq 0$ et $s_2 \neq 0$, nous voyons apparaître les conditions de non-résonnance à l'ordre 3 :

$$s_1 + s_2 \neq 0, \quad 3s_1 - s_2 \neq 0, \quad 3s_2 - s_1 \neq 0.$$

Dans le cas $s_2 = 3s_1$ on obtient

$$\dot{y}_1 = s_1y_1, \quad \dot{y}_2 = s_2y_2 + a_{20}y_1^3.$$

Dans le cas $s_1 = -s_2 = s$ on obtient

$$\dot{y}_1 = sy_1 + a_{11}y_1^2y_2, \quad \dot{y}_2 = -sy_2 + a_{22}y_1y_2^2.$$

Exercice 1.10 : Posons $\psi = x + iy$, $\bar{\psi} = x - iy$. La matrice du système linéarisé sera alors diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \lambda_3 = 0.$$

Les résonances

$$\lambda_i = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 \equiv (k,\lambda)$$

sont :

-pour $i = 1$: $k = (m+1, m, n)$,
-pour $i = 2$: $k = (m, m+1, n)$,
-pour $i = 3$: $k = (m, m, n)$.

Les termes résonnants sont donc $\psi(\psi\bar{\psi})^m z^n \partial_\psi$, $\bar{\psi}(\psi\bar{\psi})^m z^n \partial_{\bar{\psi}}$, $(\psi\bar{\psi})^m z^n \partial_z$. La forme normale s'écrira alors, en coordonnées cylindriques, $r^2 = \psi\bar{\psi}$, $\theta = \arg\psi$,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= a_1 rz + a_2 r^3 + a_3 rz^2 + O(4), \\ \dot{z} &= b_1 r^2 + b_2 z^2 + b_3 r^2 z + b_4 z^3 + O(4), \\ \dot{\theta} &= \omega + c_1 z + c_2 r^2 + c_3 z^2 + O(3). \end{aligned} \tag{A.31}$$

Par raison de symétrie, $\dot{\theta}$, $\dot{z}$ et $r\dot{r}$ sont des fonctions de (r^2, z) seulement. Pour calculer les a_j, b_j et c_j en fonction de f, g et h, on considère le changement de variables :

$$\begin{aligned} \psi &= u + \sum_{\substack{n=2 \\ i+j+k=n}}^{N} a_{ijk} u^i v^j w^k, \\ \bar{\psi} &= v + \sum_{\substack{n=2 \\ i+j+k=n}}^{N} b_{ijk} u^i v^j w^k, \quad b_{ijk} = \bar{a}_{jik}, \\ z &= w + \sum_{\substack{n=2 \\ i+j+k=n}}^{N} c_{ijk} u^i v^j w^k. \end{aligned} \tag{A.32}$$

Portant (A.32), avec $N = 2$, dans (A.31) et par un calcul analogue à celui de l'exercice 1.9 on obtient les résultats suivants [165] :

- pour les termes quadratiques :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(f_{xz} + g_{yz}), \quad b_1 = \frac{1}{4}(h_{xx} + h_{yy}), \\ b_2 &= \frac{1}{2}h_{zz}, \quad c_1 = \frac{1}{2}(g_{xz} - f_{yz}), \end{aligned}$$

- pour les termes cubiques :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) \\ &\quad + \frac{1}{16\omega}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}) \\ &\quad + \frac{1}{32\omega}((f_{yz} + g_{xz})(h_{xx} - h_{yy}) + 2h_{xy}(g_{yz} - f_{xz})) \\ &\quad + \frac{1}{2}(f_{xz} + g_{yz})c_{110} - \frac{1}{4}(h_{xx} + h_{yy})\alpha_{101}, \\ a_3 &= \frac{1}{4}(f_{xzz} + g_{yzz}) + \frac{1}{4\omega}(f_{zz}(f_{xy} + g_{yy}) - g_{zz}(g_{xy} + f_{xx}) \\ &\quad + 2(g_{zz}h_{xz} - f_{zz}h_{yz})) + \frac{1}{2}(f_{xz} + g_{yz})c_{002} - \frac{1}{2}h_{zz}\alpha_{101}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_3 &= \frac{1}{4}(h_{xxz}+h_{yyz})+\frac{1}{4\omega}(h_{yz}(f_{xx}+f_{yy})-h_{xz}(g_{xx}+g_{yy}) \\
&\quad +h_{xy}(f_{xz}-g_{yz}))+\frac{1}{8\omega}(f_{yz}+g_{xz})(h_{yy}-h_{xx}) \\
&\quad \frac{1}{2}(h_{xx}+h_{yy})(\alpha_{101}-c_{002})+(h_{zz}-f_{xz}-g_{yz})c_{110}, \\
b_4 &= \frac{1}{6}h_{zzz}+\frac{1}{2\omega}(f_{zz}h_{yz}-g_{zz}h_{xz}), \\
c_2 &= \frac{1}{16}(g_{xxx}+g_{xyy}-f_{xxy}-f_{yyy}) \\
&\quad +\frac{1}{48\omega}(f_{xy}g_{xx}+f_{yy}g_{xy}-2(f_{xx}^2+f_{xy}^2+g_{xy}^2+g_{yy}^2)) \\
&\quad +\frac{5}{48\omega}(f_{xx}g_{xy}+f_{xy}g_{yy}-f_{yy}(f_{xx}+f_{yy})-g_{xx}(g_{xx}+g_{yy})) \\
&\quad \frac{1}{32\omega}((g_{yz}-f_{xz})(h_{xx}-h_{yy})-2h_{xy}(f_{yz}+g_{xz})) \\
&\quad \frac{1}{2}(g_{xz}-f_{yz})c_{110}-\frac{1}{4}(h_{xx}+h_{yy})\tilde{\alpha}_{101}, \\
c_3 &= \frac{1}{4}(g_{xzz}-f_{yzz})-\frac{1}{2\omega}(f_{zz}h_{xz}+g_{zz}h_{yz}) \\
&\quad +\frac{1}{4\omega}(f_{xz}g_{yz}-f_{yz}g_{xz}-f_{zz}(f_{yy}-g_{xy})+g_{zz}(f_{xy}-g_{xx})) \\
&\quad -\frac{1}{8\omega}(f_{xz}^2+f_{yz}^2+g_{xz}^2+g_{yz}^2)+\frac{1}{2}(g_{xz}-f_{yz})c_{002}-\frac{1}{2}h_{zz}\tilde{\alpha}_{101},
\end{aligned}
$$

où $a_{101} \equiv \alpha_{101} + i\tilde{\alpha}_{101}$ et α_{101}, $\tilde{\alpha}_{101}$, c_{110} et c_{002} sont arbitraires.

A.2 Réponses aux exercices du chapitre 2

Exercice 2.1 : a) Le système mono-dimensionnel :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1 \tag{A.33}$$

est tel que $(0,0)$ est un point fixe non-hyperbolique :

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 \neq 0.$$

b) Le système mono-dimensionnel :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1 \tag{A.34}$$

est tel que $(0,0)$ est un point fixe non-hyperbolique :

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

et

$$f_\mu = \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 \neq 0.$$

c) Le système mono-dimensionnel :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \mu \in \mathbb{R}^1 \tag{A.35}$$

est tel que $(0,0)$ est un point fixe non-hyperbolique :

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,$$

et

$$f_\mu = \frac{\partial f}{\partial \mu}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}(0,0) = 1 \neq 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = -6 \neq 0.$$

Exercice 2.2 : 1) Posons $z = x + iy$, l'équation (2.178) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + b(x^3 - 3xy^2) + \cos\phi(x^3 + xy^2) - \sin\phi(x^2y + y^3), \\ \dot{y} &= y\cos\alpha + x\sin\alpha + b(y^3 - 3x^2y) + \cos\phi(x^2y + y^3) + \sin\phi(x^3 + xy^2). \end{aligned}$$

Le système linéarisé à l'origine a pour matrice :

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $A(\alpha)$ sont : $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. On en déduit que, pour $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, l'origine est instable. Pour $\alpha = \pm\pi/2$, on a $\lambda_{1,2} = \pm i$. C'est une bifurcation de Hopf et le calcul du nombre de Lyapunov (Cf. formule (2.133)) montre que $a_1 = 16\cos\phi$. On en déduit que la bifurcation est sur-critique (resp. sous-critique) si $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$ (resp. $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$).

2) On peut écrire (2.178) sous la forme (2.179) en posant :

$$\epsilon = \frac{1}{b}e^{i\alpha}, \quad A = \frac{1}{b}e^{i\phi}$$

et en changeant l'unité de temps.

3) Posons $z = x + iy$, l'équation (2.179) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \nu_1 x - \nu_2 y + (x^2 + y^2)(a_1 x - a_2 y) + x^3 - 3xy^2 = f(x,y), \\ \dot{y} &= \nu_2 x + \nu_1 y + (x^2 + y^2)(a_2 x + a_1 y) + y^3 - 3x^2 y = g(x,y) \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\epsilon = \nu_1 + i\nu_2 = \frac{1}{b}(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad A = a_1 + ia_2 = \frac{1}{b}(\cos\phi + i\sin\phi). \tag{A.36}$$

D'où :

$$\text{Div}\,(f,g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 2\nu_1 + 4a_1(x^2+y^2). \tag{A.37}$$

On en déduit que si $\nu_1 < 0$, $a_1 \leq 0$ ou si $\nu_1 > 0$, $a_1 \geq 0$, alors Div $(f,g) \neq 0$ et ne change pas de signe. Par conséquent, d'après le critère de Bendixson, le système n'a pas d'orbite périodique.

4) Pour $z = re^{i\theta}$, le système (2.179) s'écrit :

$$\dot{r} = \nu_1 r + a_1 r^3 + r^3\cos 4\theta, \quad \dot{\theta} = \nu_2 + a_2 r^2 - r^2\sin 4\theta \tag{A.38}$$

où ν_1, ν_2, a_1, a_2 sont définis par (A.36).
Si $\alpha = \pm\pi/2$ et $\phi = 3\pi/2$, le système (A.38) s'écrit :

$$\dot{r} = r^3\cos 4\theta, \quad \dot{\theta} = \pm\frac{1}{b} - \frac{1}{b}r^2 - r^2\sin 4\theta. \tag{A.39}$$

Posons $r^2 = 2\rho$, le système (A.39) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= 4\rho^2\cos 4\theta = -\frac{\partial H}{\partial\theta}, \\ \dot{\theta} &= \pm\frac{1}{b} - \frac{2}{b}\rho - 2\rho\sin 4\theta = \frac{\partial H}{\partial\rho} \end{aligned}$$

avec

$$H = \pm\frac{\rho}{b} - \frac{\rho^2}{b} - \rho^2\sin 4\theta.$$

La figure A.10 présente quelques courbes de niveau du hamiltonien H (d'après Krauskopf [102]).

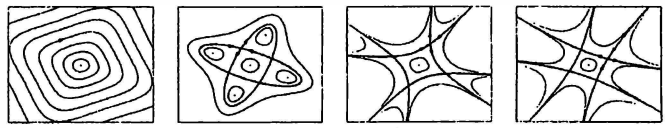


FIG. A.10 – *Courbes de niveau du hamiltonien H : $\alpha = -\pi/2$ et $0 < b < 1$, $\alpha = \pi/2$ et $0 < b < 1$, $\alpha = -\pi/2$ et $b > 1$, $\alpha = \pi/2$ et $b > 1$ (de gauche à droite). D'après [102].*

5) Les points fixes sont obtenus en annulant les seconds membres de (A.38). On obtient alors :

$$(|A|^2 - 1)r^4 + 2X_2r^2 + X_1^2 = 0, \tag{A.40}$$

$$\cos 4\theta = -\frac{\nu_1 + a_1r^2}{r^2}, \quad \sin 4\theta = \frac{\nu_2 + a_2r^2}{r^2} \tag{A.41}$$

où l'on a posé :

$$X_1^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 = \frac{1}{b^2}, \quad X_2 = \nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 = \frac{\cos(\alpha - \phi)}{b^2}.$$

On déduit de (A.40) :

$$r^2 = \frac{-X_2 \pm \sqrt{X_2^2 + (1 - |A|^2)X_1^2}}{|A|^2 - 1}, \quad \text{si } |A| \neq 1, \tag{A.42}$$

$$= \frac{-\cos(\alpha - \phi) \pm \sqrt{b^2 - \sin^2(\alpha - \phi)}}{1 - b^2}, \text{ si } b \neq 1,$$

$$r^2 = -\frac{X_1^2}{2X_2} = -\frac{1}{2\cos(\alpha - \phi)}, \text{ si } |A| = 1 \text{ ou si } b = 1. \tag{A.43}$$

FIG. A.11 – *Portraits de phase : a) $|A| < 1$ (en haut). b) $|A| > 1$ (en bas). D'après [6].*

Trois cas sont à considérer :

a) $|A| < 1$ (ou $b > 1$). L'équation (A.42) donne alors une seule valeur positive de r^2 pour tout $X_2 \in \mathbb{R}$. Portant cette valeur positive dans (A.41), on obtient alors 4 valeurs de θ.

b) $|A| = 1$ ou ($b = 1$). D'après (A.43) et (A.41), il y aura 4 points fixes non-nuls si $X_2 < 0$ (ou si $\cos(\alpha - \phi) < 0$) et 0 point fixe non-nul si $X_2 > 0$.

c) $|A| > 1$ (ou $b < 1$). Si $X_2 < 0$ (ou $\cos(\alpha - \phi) < 0$), l'équation (A.42) donne deux solutions positives de r^2 si $\Delta = X_2^2 + (1 - |A|^2)X_1^2 > 0$. Quand $\Delta \to 0$, les deux solutions coagulent et quand $\Delta < 0$ il n'y a plus de solution réelle. On aura donc 8, 4 ou 0 points fixes suivant que $\Delta >$, $=$ ou < 0. Si $X_2 > 0$ (ou $\cos(\alpha - \phi) > 0$), l'équation (A.42) n'a pas de solution positive, donc il y a 0 point fixe non-nul.

La figure A.11 présente quelques portraits de phase du système (D'après Arnold [6]).

Exercice 2.3 : 1) On trouve deux points fixes $(x_1, x_2) = (0,0)$ et $(1,1)$. Les matrices jacobiennes aux points fixes sont :

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Df(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

avec pour valeurs propres $0, -1$ et $\pm i$ respectivement. Notons que si $x_1(0) = 0$, on a $\dot{x}_1 \equiv 0$. L'axe des x_2 est donc une variété invariante. En fait on peut vérifier facilement que c'est une variété invariante stable.

2) Portant $x_2 = h(x_1)$ et $\dot{x}_2 = h'(x)\dot{x}$ dans (2.180) on obtient:

$$(x_1^2 - x_1 h)h' = -h + x_1^2. \tag{A.44}$$

Portant $h(x_1) = ax_1^2 + bx_1^3 + O(x_1^4)$ dans (A.44) et égalisant les coefficients des puissances de x_1 nous obtenons $a = 1, b = -2$. Portant $x_2 = h(x_1) = x_1^2 - 2x_1^3 + O(x_1^4)$ dans (2.180) on obtient:

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + O(x_1^3),$$

d'où $\dot{x} > 0$. La variété centrale de $(0,0)$ est donc instable.

3) Pour ramener le point fixe $(1,1)$ à l'origine, on remplace dans (2.180) (x_1, x_2) par $(1 + x_1, 1 + x_2)$. On obtient alors le système:

$$\dot{x} = Ax + \hat{F}(x), \quad A = Df(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{A.45}$$

avec $\hat{F}^1 = x_1^2 - x_1 x_2$, $\hat{F}^2 = x_1^2$.

On procède maintenant comme dans (2.140)-(2.142) et on obtient successivement:

$$T = [\Re v_1 - \Im v_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$F^1 = x_1 x_2 - x_2^2, \quad F^2 = x_1 x_2. \tag{A.46}$$

Portant (A.46) dans (2.133), on obtient $a_1 = -1/8$.

Exercice 2.4: On vérifie facilement que (2.182) annule les seconds membres de (2.181).

La matrice jacobienne s'écrit:

$$A(\nu) = \begin{pmatrix} \frac{\nu ab}{(c-b)^2}[c - b - \nu(c+b)] & -\frac{\nu cb}{c-b} \\ \frac{\nu a[c-b(1+\nu)}{c-b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres: $\lambda_{1,2} = \alpha(\nu) \pm i\omega(\nu)$ avec

$$\alpha(\nu) = \Re\lambda_1 = \Re\lambda_2 = \frac{1}{2} \text{ Trace } A(\nu) = \frac{\nu ab}{2(c-b)^2}[c - b - \nu(c+b)].$$

On a $\alpha(\nu) = 0$ pour $\nu = \nu_c = (c-b)/(c+b)$ avec:

$$\omega^2(\nu_c) = \omega_0^2 = \frac{ac^2 b(c-b)}{(c+b)^3}.$$

On trouvera

$$g_{10} = \frac{cb(c^2 - b^2 - ab)}{c+b} + i(\omega_0 c(c+b), \quad g_{11} = -\frac{acb^2}{c+b}, \quad g_{21} = -3ab^2c^2.$$

D'où $a_1 = -ab^2c^2 < 0$.

Exercice 2.5 : La matrice jacobienne évaluée à l'origine s'écrit :

$$A(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\nu & a \end{pmatrix}.$$

Elle a pour équation caractéristique :

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + \nu\lambda + 1 = 0.$$

On a une paire de racines purement imaginaires $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ pour $\nu = \nu_c = 1/a$, avec $\omega_0^2 = \nu_c$. Il suffit alors d'appliquer l'algorithme de Hassard, Kazarinoff et Wan. On trouve :

$$a_1 = -\frac{(a^3+8)a^2}{(a^3+1)(a^3+4)} < 0.$$

Exercice 2.6 : Les deux points fixes sont donnés par :

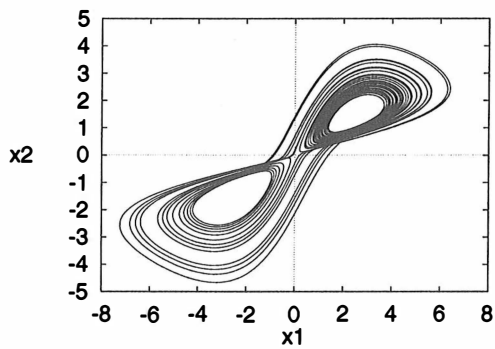


FIG. A.12 – *Trajectoire à* $\nu = 0$.

$$x_\pm = (\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \frac{17}{8}).$$

La matrice jacobienne à ces points est donnée par :

$$Df(x_\pm) = \begin{bmatrix} \frac{9}{8(1+\nu)} & \frac{-15}{8(1+\nu)} & \frac{\pm 5}{2(1+\nu)} \\ \frac{15}{8(1-\nu)} & \frac{-25}{8(1-\nu)} & \frac{\mp 3}{2(1-\nu)} \\ \frac{\mp 5}{4} & \frac{\pm 3}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Au premier ordre en ν, les valeurs propres de $Df(x_+)$ sont :

$$\lambda_1 = -2 - 2.54\nu, \quad \lambda_{2,3} = -0.825\nu \pm i\left(\frac{\sqrt{17}}{2} - 1.31\nu\right).$$

Pour $\nu = 0$, il y a une variété centrale à deux dimensions, et pour $\nu < 0$, les points fixes ont une variété instable à deux dimensions. Le point $\nu = 0$ est un point de bifurcation de Hopf sous-critique. Une trajectoire à $\nu = 0$ est donnée sur la figure A.12. Pour la dessiner, on a utilisé un programme semblable au programme 1.1 de la section 1.10, avec les mêmes valeurs initiales.

Exercice 2.7 : 1) La transformation de coordonnées demandée s'écrit :

$$x_1 = x, \quad x_2 = y - (x^3 - 3\mu_2 x)/3.$$

2) L'origine est un point fixe. La matrice jacobienne à l'origine est :

$$\begin{bmatrix} \mu_2 & 1 \\ \mu_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle a pour valeurs propres $\lambda_{1,2} = (\mu_2 \pm \sqrt{\mu_2^2 + 4\mu_1})/2$.

Si $\mu_1 > 0$, l'origine est un point selle ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$).

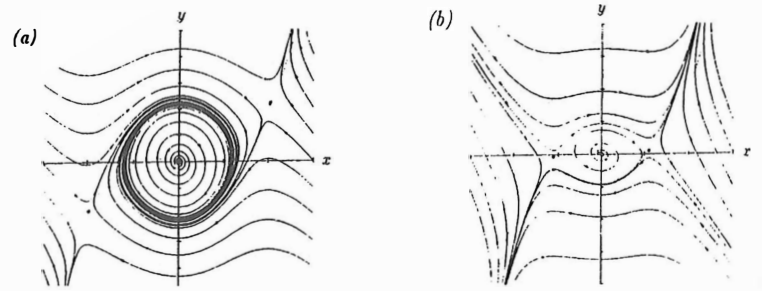


FIG. A.13 – *a)* $\mu_1 = -4$, $\mu_2 = 1/3$ *b)* $\mu_1 = -1.21$, $\mu_2 = 1/3$. *D'après [75].*

Si $\mu_1 < 0$, l'origine est un nœud si $\mu_2^2 > -4\mu_1$, un foyer si $\mu_2^2 < -4\mu_1$ (avec la possibilité d'avoir un cycle limite ou non Cf. figure A.13, [75]). Si $\mu_1 < 0$, il y a deux autres points fixes : $A_1(-\sqrt{-\mu_1}, F(-\sqrt{-\mu_1}))$ et $A_2(\sqrt{-\mu_1}, F(\sqrt{-\mu_1}))$. La matrice jacobienne en ces points fixes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mu_1 + \mu_2 & 1 \\ -2\mu_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Elle a pour valeurs propres $\lambda_{1,2} = (\mu_1 + \mu_2 \pm \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)^2 - 8\mu_1})/2$. Ce sont donc des points selles car $\mu_1 < 0$.

Exercice 2.8 : Les points fixes de (2.187) sont : $O = (0, 0)$ et $P^{\pm} = (x^{\pm}, y^{\pm})$ avec :

$$x^{\pm} = (\beta + y^{\pm})y^{\pm}, \quad y^{\pm} = \frac{\alpha - \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2 - 4\gamma^2}}{2}.$$

Les points fixes P^+ et P^- coagulent si $\gamma = 0$. La matrice jacobienne de (2.187) a la forme suivante :

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & \beta + 2y \\ \alpha - c - y & \beta(c-\alpha) - \gamma^2 + 2cy - x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & d \end{pmatrix}. \tag{A.47}$$

Si $(x,y) = (0,0)$, on a $a = \beta$, $b = \alpha - c$, $d = \beta(c-\alpha) - \gamma^2$.

Si $(x,y) = (x^\pm, y^\pm)$, on a : $a = \alpha \pm S$, $b = (\alpha + \beta - 2c \mp S)/2$, $d = [(\alpha \pm S)(2c - \alpha) - \alpha\beta]/2$, avec $S = \sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4\gamma^2}$.

On a $|A(0,0)| = \gamma^2 \geq 0$, $|A(x^\pm, y^\pm)| = \pm S y^\pm$ et les valeurs propres de $A(x,y)$ sont :

$$\lambda = \frac{d - 1 \pm \sqrt{(d+1)^2 + 4ab}}{2}.$$

Il y a bifurcation de Hopf ($d = 1$) à l'origine si $c = (1 + \alpha\beta + \gamma^2)/\beta$, à P^+ si $c = [1 + \alpha(\alpha + \beta + S)/2]/(\alpha + S)$ avec $S = \sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4\gamma^2}$.

Si $\alpha = \beta + 2\gamma$, on a $S = 0$, $x^\pm = y^\pm$, $\det A(x^\pm, y^\pm) = 0$. Dans ce cas :

a) Si $c \neq 1/(\beta + 2\gamma) + \beta + \gamma$, la matrice $A(x^\pm, y^\pm)$ a une valeur propre nulle : la bifurcation est du type nœud-col.

b) Si $c = 1/(\beta + 2\gamma) + \beta + \gamma$, la matrice :

$$A(x^\pm, y^\pm) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1/\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

a deux valeurs propres nulles : la bifurcation est du type Takens-Bogdanov.

Exercice 2.9 : 1)

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 4x_3 & 4x_2 & 4x_5 & 4x_4 \\ 3x_3 & -9 & 3x_1 & 0 & 0 \\ -7x_2 & -7x_1 & -5 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & 0 & -5 & -x_1 \\ -3x_4 & 0 & 0 & -3x_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2) Etudions les points fixes de (2.188).

a) Pour $0 \leq r \leq R_1 = 5\sqrt{3/2}$, il n'y a qu'un seul point fixe P_0, de composantes :

$$x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_3 = r/5$$

qui est stable pour $r \leq R_1$ car les valeurs propres de la matrice jacobienne $J(P_0)$ ont leur partie réelle négative.

b) Pour $R_1 \leq r \leq R_2 = \frac{80}{9}\sqrt{3/2}$, il y a 3 points fixes : l'ancien point fixe P_0, qui devient instable car l'une des valeurs propres de $J(P_0)$ traverse l'axe imaginaire, et deux nouveaux points fixes $P_\pm$ de composantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm\sqrt{\sqrt{6}/7}\sqrt{r - R_1}, \\ x_2 &= \pm\sqrt{1/7\sqrt{6}}\sqrt{r - R_1}, \\ r_3 &= \sqrt{3/2}, \quad x_4 = x_5 = 0 \end{aligned}$$

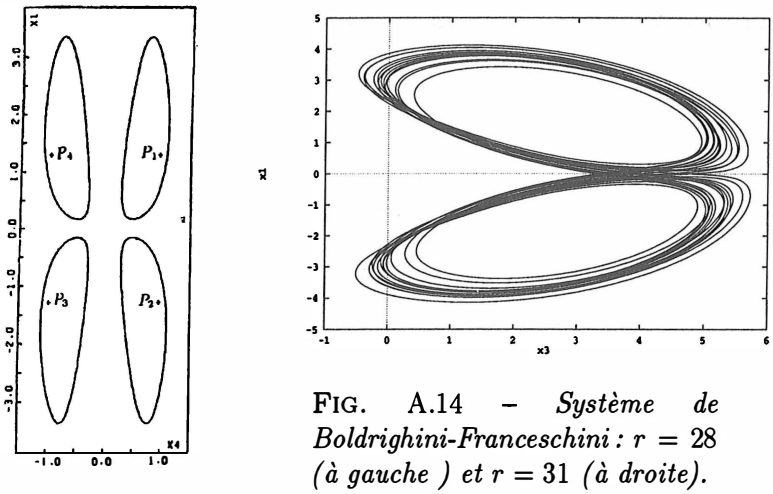


FIG. A.14 – *Système de Boldrighini-Franceschini : $r = 28$ (à gauche) et $r = 31$ (à droite).*

qui sont stables.

c) Pour $r > R_2$, il y a 7 points fixes : les trois anciens points fixes $P_0, P_\pm$ et 4 nouveaux points fixes P_1, P_2, P_3, P_4 de composantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \epsilon\sqrt{5/3}, \quad x_2 = \epsilon\frac{3}{80}\sqrt{5/3}r, \quad x_3 = \frac{9}{80}r, \\ x_4 &= \frac{\epsilon\sigma}{3}\sqrt{\left(\frac{9r}{80}\right)^2 - \frac{3}{2}}, \\ x_5 &= -\sigma\sqrt{\left(\frac{9r}{80}\right)^2 - \frac{3}{2}}\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad \epsilon = \pm 1, \quad \sigma = \pm 1. \end{aligned}$$

Les points fixes $P_0, P_\pm$ sont maintenant instables tandis que les 4 nouveaux points P_1, P_2, P_3, P_4 sont stables pour $r \leq R_3 = 22.85370163...$

d) A $r = R_3$, les 4 points fixes P_1, P_2, P_3, P_4 sont devenus instables via une bifurcation de Hopf (une paire de valeurs propres traverse l'axe imaginaire). On observe alors 4 cycles limites entourant les 4 points P_1, P_2, P_3, P_4. (Cf. figure A.14 gauche, où les cycles limites sont projetés sur le plan (x_4, x_1)). Ces cycles limites sont stables jusqu'à $r = R_4 = 28.41...$ [16].

3) A $r = R_4$, les cycles perdent leur stabilité et on assiste à une cascade de doublements de période. Les trajectoires deviennent de plus en plus compliquées et le chaos est atteint vers $r \approx 29$.

Exercice 2.10 :

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1(1 + u_1 + u_2 + u_3)/10 - u_1u_2, \\ \dot{u}_2 &= \nu[u_1u_3 - (1 + u_1 + u_2 + u_3)/10 - 3u_1u_2], \\ \dot{u}_3 &= (1 - 5u_3/4)(1 + u_1 + u_2 + u_3) + 5u_1u_3(1 - u_3/2). \end{aligned} \tag{A.48}$$

On vérifie facilement que (2.189) est un point fixe de (A.48). Effectuons dans (A.48)

le remplacement $u \to u^* + u$ pour ramener (A.48) à la forme (2.86) :

$$\dot{u} = A(\nu)u + \hat{F}(u, \nu).$$

On a :

$$A = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 9\nu & -41\nu & 9\nu \\ 90 & -10 & -135 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{F}^1(u) &= \frac{1}{10}u_1(u_1 - 9u_2 + u_3), \\ \hat{F}^2(u) &= -\frac{\nu}{10}u_2(31u_1 + u_2 + u_3) + \nu u_1 u_3, \\ \hat{F}^3(u) &= -\frac{5}{4}u_3(u_1 + u_2 + 3u_3/2 + 2u_1 u_3). \end{aligned} \tag{A.49}$$

L'équation caractéristique de A est :

$$\lambda^3 + \frac{41\nu + 134}{40}\lambda^2 + \frac{1133\nu - 45}{320}\lambda + \frac{9\nu}{64} = 0. \tag{A.50}$$

Les conditions pour qu'il y ait une paire de valeurs propres imaginaires pures et une valeur propre négative à $\nu = \nu_c$ sont, d'après (2.89) :

$$1133\nu_c > 45, \quad \left(\frac{41\nu_c + 134}{40}\right)\left(\frac{1133\nu_c - 45}{320}\right) = \frac{9\nu_c}{64}. \tag{A.51}$$

L'unique ν_c qui satisfait à ces conditions est (la dernière condition est une équation du second ordre en ν_c) :

$$\nu_c \approx 0.0401882473.$$

On en déduit :

$$\omega_0 = 0.0401882473, \quad \lambda_3 = -(41\nu_c + 134)/40 < 0$$

et (2.91) donne :

$$\alpha'(\nu_c) = -0.5. \tag{A.52}$$

Les conditions du théorème de Hopf sont donc satisfaites. En choisissant dans (2.96) $\alpha_1 = 2$, $\alpha_3 = 1$, on obtient :

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0.367362 & -0.3616500 & +0.357458 \\ 1.306254 & -0.0109887 & -133.4330 \end{bmatrix}.$$

D'où :

$$T^{-1} \approx \frac{1}{96.98063}\begin{bmatrix} +48.252090 & -0.01098870 & +0.3616498 \\ +49.485090 & -268.172300 & -0.3475546 \\ +0.4764434 & +0.02197741 & -0.7232997 \end{bmatrix}.$$

Portant $F(x) = T^{-1}\hat{F}(Tx, \nu_c)$ dans (2.101), on obtient, après un long calcul :

$$16a_1 \approx -0.0406975. \tag{A.53}$$

On en déduit que la bifurcation de Hopf est sur-critique et que la direction de bifurcation est du côté $\nu < \nu_c$.

Exercice 2.11 : 1) Portant $A = A^* = A_0 e^{ikx}$ dans (2.190), on obtient $A_0^2 = r - k^2$. Il faut donc que $k^2 \leq r$.

2) Portant $A = A^* + a$, $a = u + iv$ dans (2.190), l'équation pour a est ensuite linéarisée. Après séparation des parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= (-2r + 2k^2 + \partial_{xx}^2)u - 2k\partial_x v, \\ \partial_t v &= 2k\partial_x u + \partial_{xx}^2 v. \end{aligned}$$

3) Le système algébrique résultant s'écrit :

$$\begin{aligned} (s + 2(r - k^2) + q^2)U + 2kqV &= 0, \\ 2kqU + (s + q^2)V &= 0. \end{aligned}$$

D'où la condition (déterminant des coefficients = 0) pour s :

$$s^2 + 2(r - k^2 + q^2)s + (2(r - k^2) + q^2)q^2 - 4k^2q^2 = 0.$$

On en déduit :

$$s = s_\pm = -(r - k^2 + q^2) \pm [(r - k^2)^2 + 4k^2q^2]^{1/2}.$$

Les deux racines sont réelles. s_- est toujours négative. La perturbation est stable aussi longtemps que les deux racines sont négatives, donc leur produit positif. Elle devient instable lorsque le produit change de signe, soit lorsque

$$q^2 = 2(3k^2 - r),$$

ce qui impose $k^2 \geq r/3$. Cette condition, combinée avec 1), définit le domaine de l'*instabilité d'Eckhaus*: $r/3 \leq k^2 \leq r$ [114].

A.3 Réponses aux exercices du chapitre 3

Exercice 3.1 : 1) ϕ est une transformation linéaire dont la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

est de déterminant 1. L'application ϕ est donc conservative.

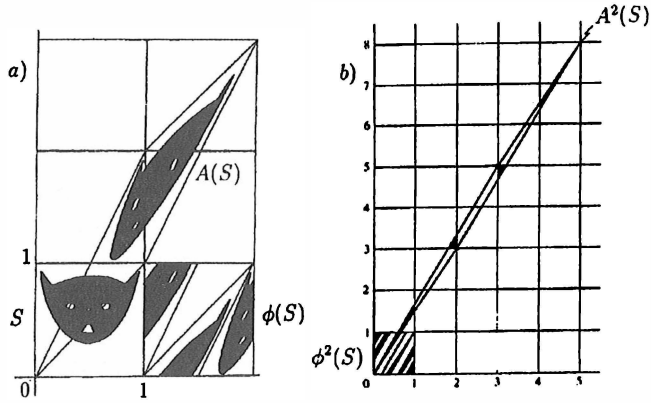


FIG. A.15 – *L'automorphisme d'Anosov. D'après [7] et [8].*

2) Le point fixe (x, y) est défini par le système:

$$x + y = x \bmod 1, \quad x + 2y = y \bmod 1.$$

On en déduit que $(0,0)$ est le seul point fixe.

Un 2-cycle $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ est défini par le système:

$$\begin{aligned} x_1 \ + \ y_1 &= x_2 \bmod 1, \quad x_1 + 2y_1 = y_2 \bmod 1, \\ x_2 \ + \ y_2 &= x_1 \bmod 1, \quad x_2 + 2y_2 = y_1 \bmod 1, \end{aligned}$$

ou:

$$x_i + 3y_i = 0 \bmod 1, \quad 3x_i + 4y_i = 0 \bmod 1, \quad i = 1, 2$$

avec $0 \leq x_i = p/r, y_i = q/r < 1$, $i = 1, 2$. On en déduit deux solutions possibles: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \{(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}), (\frac{4}{5}, \frac{2}{5})\}$ et $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \{(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}), (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})\}$.

Plus généralement, soit $p \in T^2$ tel que $p = (\frac{r}{m}, \frac{s}{n})$, $0 \leq \frac{r}{m}, \frac{s}{n} < 1$ et soit k le ppcm de m, n, alors on peut écrire p sous la forme:

$$p = (\frac{a}{k}, \frac{b}{k}) \quad a, b \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a, b < k. \tag{A.54}$$

Sur le tore T^2, il y a exactement k^2 points de la forme (A.54). D'autre part, l'image d'un point de la forme (A.54) par ϕ est encore un point de la forme (A.54) car les éléments de la matrice A sont des entiers. Cela veut dire que ϕ permute ces points. Il existe donc des entiers i et j tels que

$$\phi^i(p) = \phi^j(p), \quad \text{avec } i < j \text{ et } j - i \leq k^2. \tag{A.55}$$

Appliquant ϕ^{-i} à cette équation, on obtient:

$$p = \phi^{j-i}(p). \tag{A.56}$$

Cela veut dire que p est périodique avec une période $j - i \leq k^2$. Comme k est arbitraire, on en déduit que les points p sont denses sur T^2.

3) Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = (3+\sqrt{5})/2 > 1$ et $\lambda_2 = (3-\sqrt{5})/2 < 1$. Par conséquent l'origine est un point selle. Les espaces propres de A sont les droites :

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}x, \tag{A.57}$$

$$y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}x. \tag{A.58}$$

Soit $S = [0,1] \times [0,1]$, on voit sur la figure A.15 les images $A(S)$, $A^2(S)$, $\phi(S)$ et $\phi^2(S)$. Par suite, $A^k(S)$ est un parallélogramme très allongé qui tend vers la droite (A.57), lorsque $k \to \infty$. Comme $(1+\sqrt{5})/2$ est irrationnel, $\phi^k(S)$ tend vers une hélice W^u, dense sur T^2. De même, à la droite (A.58), correspond une hélice W^s, dense sur T^2. On en déduit que les points d'intersection de W^u et W^s sont denses sur T^2.

Exercice 3.2 : 1) x est un point fixe superstable si $P(x) = x$ et $P'(x) = 0$. On en déduit $q = \pm 5\sqrt{2}/27$. Il y a bifurcation de doublement de période si $P(x) = x$ et $P'(x) = -1$. On en déduit $q = \pm 8\sqrt{5}/27$. Pour $-8\sqrt{5}/27 < q < 8\sqrt{5}/27$, on a $|P'(x)| < 1$ et le point fixe x solution de

$$P(x) = x$$

sera stable.

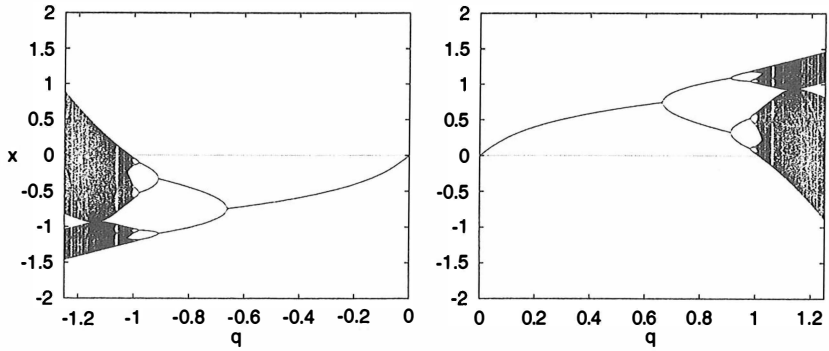


FIG. A.16 – *Diagrammes de bifurcation de* $P(x) = -x^3 + \frac{2}{3}x + q$.

2) Le programme A.2 dessine les diagrammes de bifurcation pour $-1.25 \leq q \leq 0$ et $0 \leq q \leq 1.25$. Le résultat est présenté sur la figure A.16 (Noter la symétrie entre $q < 0$ et $q > 0$).

Exercice 3.3 : 1) On a $(x,y) = T^{-1}(x_1,y_1)$ avec :

$$x = x_1 - a(y - y^3), \quad y = y_1 + a(x_1 - x_1^3). \tag{A.59}$$

2a) La matrice jacobienne de T s'écrit :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a(1-3y^2) \\ -a(1-3x_1^2) & 1 - a^2(1-3x_1^2)(1-3y^2) \end{pmatrix}.$$

On en déduit $|J(x,y)| = 1$. L'application (3.119) conserve donc les aires.

2b)

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1-a^2 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice a pour valeurs propres :

$$\lambda = \frac{2 - a^2 \pm a\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

Par conséquent, pour $0 < a < 2$, l'origine est elliptique et pour $a > 2$, l'origine est hyperbolique.

3a) Il faut que $T(e_i) = e_{i+1}$, d'où pour $i = 0$:

$$-t = -a(t - t^3)$$

ou

$$t = \sqrt{\frac{a-1}{a}}.$$

Dans ce cas, on vérifie facilement que les e_i, $i = 0, \ldots, 5$ sont des points fixes de T^6. Pour que t existe, il faut que $a > 1$. Lorsque $a \to 1$, $t \to 0$, tous les e_i tendent vers l'origine.

3b) De même, on a $T(h_i) = h_{i+1}$, d'où :

$$r = s + a(s - s^3), \tag{A.60}$$

$$-s = s - a(r - r^3). \tag{A.61}$$

Portant (A.60) dans (A.61), on obtient une équation du 9e degré en s :

$$as + a^2(s - s^3) - a(s + as - as^3)^3 - 2s = 0$$

qui sera factorisée :

$$s(as^2 - a - 2)[a^3s^6 - a^2(2a+1)s^4 + a(a^2+a+1)s^2 + 1 - a] = 0.$$

On en déduit $s = 0$ et $s = [(a+2)/a]^{1/2}$ qui correspondent aux points fixes de T et T^2 respectivement et l'équation du troisième degré en s^2 :

$$a^3s^6 - a^2(2a+1)s^4 + a(a^2+a+1)s^2 + 1 - a = 0. \tag{A.62}$$

Pour $a = 1.6$, l'équation (A.62) possède une seule racine réelle positive $s = 0.2845067$. On en déduit $r = 0.70287083$. Ces valeurs vont générer les 6 points h_i de (3.121).

3c) La matrice jacobienne de T^n est donnée par la règle de la chaîne :

$$DT^n(x,y) = J(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdots J(x_1, y_1) J(x,y). \tag{A.63}$$

On en déduit :

$$DT^6(e_0) = E = L^2 \tag{A.64}$$

avec :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & a\tau \\ -a & 1-a^2\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a\tau \\ -a\tau & 1-a^2\tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a\tau & 1-a^2\tau \end{pmatrix}, \tag{A.65}$$

où on a posé $\tau = 1 - 3t^2$.

De même :

$$DT^6(h_0) = H = M^2 \tag{A.66}$$

avec :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a\sigma \\ -a\sigma & 1-a^2\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a\rho \\ -a\sigma & 1-a^2\rho\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a\sigma \\ -a\rho & 1-a^2\rho\sigma \end{pmatrix} \tag{A.67}$$

où on a posé $\sigma = 1 - 3s^2$, $\rho = 1 - 3r^2$.

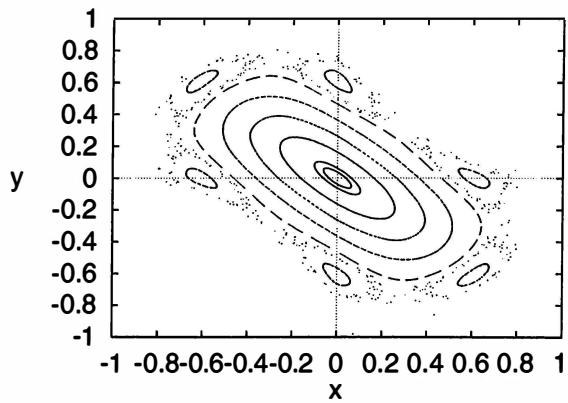


FIG. A.17 – *L'application de Hénon-Heiles pour $a = 1.6$: courbes invariantes entourant les points elliptiques (structure d'archipel).*

Les valeurs propres de E et H sont données par les équations caractéristiques :

$$\begin{vmatrix} E_{11}-\lambda & E_{12} \\ E_{21} & E_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} \\ H_{21} & H_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Comme les déterminants des matrices de (A.65) et (A.67) sont égaux à 1, on a aussi $|E| = |H| = 1$. Les valeurs propres de E et H sont donc données par :

$$\lambda_{1,2} = \frac{E_{11} + E_{22} \pm \sqrt{(E_{11}+E_{22})^2 - 4}}{2} \tag{A.68}$$

et

$$\lambda_{1,2} = \frac{H_{11} + H_{22} \pm \sqrt{(H_{11}+H_{22})^2 - 4}}{2} \tag{A.69}$$

respectivement. Pour $a = 1.6$ (A.64)-(A.66) donnent :

$$E = \begin{pmatrix} -0.12929672309 & 1.06391540610 \\ -0.77375666415 & -1.3673073857 \end{pmatrix},$$
$$H = \begin{pmatrix} 12.637776291 & 7.4836577347 \\ 30.955909700 & 18.410156004 \end{pmatrix}.$$

D'où $E_{11} + E_{22} = -1.4966041088$ et $H_{11} + H_{22} = 31.047932295$. On en déduit que e_i est un point elliptique et que h_i est un point hyperbolique.

4a) Voir le programme A.3. La figure A.17 montre les résultats du programme pour $a = 1.6$. On trouve près de l'origine des courbes fermées qui entourent l'origine (qui est un point elliptique pour cette valeur de a). Il y a ensuite 6 ovales (pour une seule valeur initiale $x = t + 0.05$, $t = 0,612372435$, $y = 0$) qui entourent les points elliptiques e_i (structure d'archipel). Alternant avec ces points fixes, il y a 6 points fixes hyperboliques h_i de (3.121) avec $s = 0.284506704$ et $r = 0.7028708$.

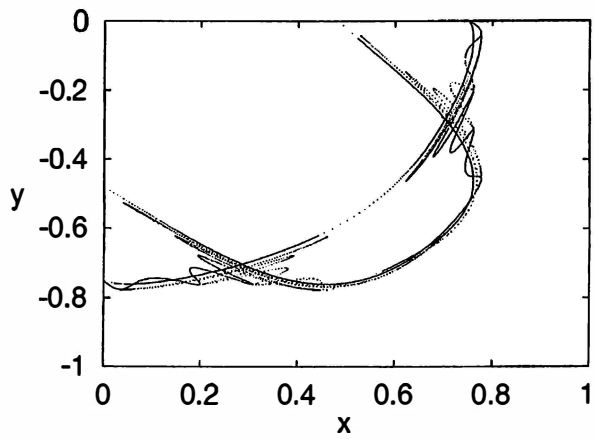


FIG. A.18 – *L'application de Hénon-Heiles pour $a = 1.6$: Variétés W^s et W^u aux points fixes hyperboliques h_0 et h_1.*

4b) Pour $a = 1.6$, les valeurs propres de H sont, d'après (A.69) :

$$\lambda_1 = 31.01569055, \quad \lambda_2 = 1/31.01569055$$

Les vecteurs propres correspondants sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{u_1(\lambda_1 - H11)}{H_{12}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2(\lambda_2 - H11)}{H_{12}} \end{pmatrix}$$

où u_1, u_2 sont des constantes quelconques. Par leur construction, les points de P_1 et P_2 sont à proximité des variétés invariantes W^u et W^s respectivement. La dynamique obtenue est celle du fer à cheval de Smale décrite à la section 4.7 (Cf. figure A.18, par le programme A.4).

Exercice 3.4 : 1) La matrice jacobienne s'écrit :

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \cos a + 2x \sin a & -\sin a \\ \sin a - 2x \cos a & \cos a \end{pmatrix}. \tag{A.70}$$

On en déduit $|J(x,y)| = 1$. L'inverse de T est :

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n+1} \cos a + y_{n+1} \sin a, \\ y_n &= -x_{n+1} \sin a + y_{n+1} \cos a + (x_{n+1} \cos a + y_{n+1} \sin a)^2. \end{aligned}$$

2) T a deux points fixes I_1 et I_1' : I_1 est l'origine $x = y = 0$ avec :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}. \tag{A.71}$$

La matrice $J(0,0)$ a pour valeurs propres $\lambda_{1,2} = e^{\pm ia}$. On en déduit que $I_1 = (0,0)$ est un point fixe elliptique.

Le second point fixe I_1' a pour coordonnées :

$$x_1' = 2\tan(a/2), \quad y_1' = 2\tan^2(a/2).$$

Pour étudier la stabilité de I_1', nous considérons le changement de coordonnées :

$$x = 2\tan(a/2) + X, \quad y = 2\tan^2(a/2) + Y,$$

et l'application T devient :

$$\begin{aligned} X_1 &= X(\cos a + 4\tan\frac{a}{2}\sin a) - Y\sin a + X^2 \sin a, \\ Y_1 &= X(\sin a - 4\tan\frac{a}{2}\cos a) + Y\cos a - X^2 \cos a. \end{aligned}$$

La trace de la matrice jacobienne est :

$$\cos a + 4\tan(a/2)\sin a + \cos a = 2 + 4\sin^2(a/2) > 2.$$

On en déduit, d'après (A.69), que I_1' est un point fixe hyperbolique (Cf. fig. A.19).

Un calcul analogue montre que T^2 a quatre points fixes. Deux de ces points sont I_1 et I_1', déjà connus ; les deux autres, que nous appelons I_{21} et I_{22}, forment un 2-cycle :

$$I_{22} = T(I_{21}), \quad I_{21} = T(I_{22}).$$

Ils ont des coordonnées complexes :

$$\begin{aligned} x &= -\cot(a/2) \pm i(1 + 1/\sin^2(a/2))^{1/2}, \\ y &= -1 \mp i\cot(a/2)(1 - 1/\sin^2(a/2))^{1/2}. \end{aligned}$$

On peut donc les négliger.

T^3 a huit points fixes dont deux sont I_1 et I_1'. Les six autres, appelés I_{31}, I_{32}, I_{33} et $I_{31}', I_{32}', I_{33}'$ (figure A.20), forment deux groupes de 3-cycles :

$$I_{32} = T(I_{31}), \quad I_{33} = T(I_{32}), \quad I_{31} = T(I_{33})$$

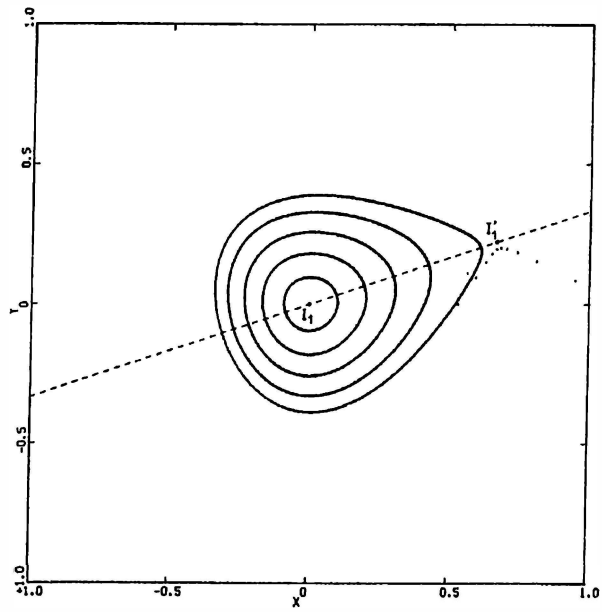


FIG. A.19 – *Quelques orbites à* $\cos a = 0.8$ *D'après [79].*

et des relations analogues pour $I'_{31}, I'_{32}, I'_{33}$. Leurs coordonnées sont :

$$\begin{aligned}
x_{31} &= \frac{-(1+\cos a)+Q}{\sin a}, \quad y_{31} = \frac{\cos^2 a - (1+\cos a)Q}{\sin^2 a}, \\
x_{32} &= \frac{-\cos a - Q}{\sin a}, \quad y_{32} = \frac{\cos^2 a - \cos a - 1 + (1+\cos a)Q}{\sin^2 a}, \\
x_{33} &= \frac{-\cos a - Q}{\sin a}, \quad y_{33} = \frac{\cos^2 a - \cos a + (\cos a - 1)Q}{\sin^2 a},
\end{aligned}$$

avec :

$$Q = \pm(\cos^2 a - 2\cos a - 1)^{1/2}$$

(le signe + est pour le premier groupe et le signe − est pour le second groupe). Q est réel seulement si $\cos a \leq 1 - 2^{1/2}$. L'examen de la matrice jacobienne montre que les points I_{31}, I_{32}, I_{33}, s'ils existent, sont toujours instables ; les points I'_{31}, I'_{32}, I'_{33} sont stables si $-1/2 < \cos a < 1 - 2^{1/2}$ et instables si $-1 < \cos a \leq -1/2$ (Cf. fig. A.20).

T^4 a seize points fixes. Les quatre points $I_1, I'_1, I_{21}, I_{22}$. Les douze autres sont associés en trois groupes de 4-cycles :

$$I_{42} = T(I_{41}), \quad I_{43} = T(I_{42}), \quad I_{44} = T(I_{43}), \quad I_{41} = T(I_{44})$$

et des relations analogues pour I'_{41}, I'_{42}, I'_{43}, I'_{44} et I''_{41}, I''_{42}, I''_{43}, I''_{44}. Les coordonnées

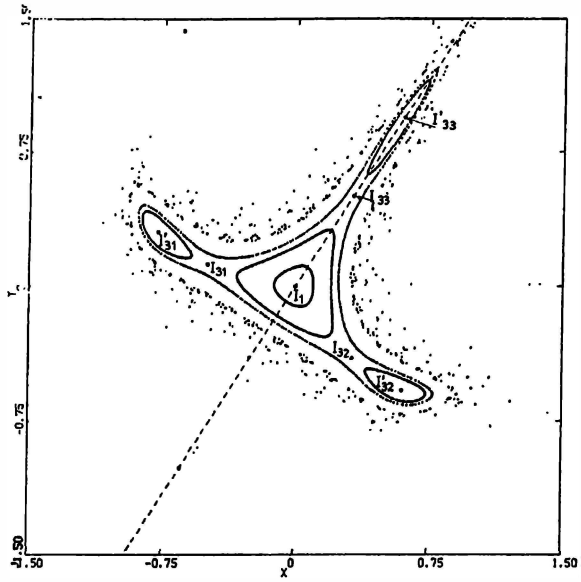


FIG. A.20 – *Quelques orbites à* $a = \frac{2\pi}{3} - 0.09$ *ou* $\cos a = -0.42$. *D'après [79].*

du premier groupe sont :

$$x_{41} = \frac{-\cos a + Q'}{\sin a}, \quad y_{41} = \frac{\cos^2 a - \cos a - (\cos a + 1))Q'}{\sin^2 a},$$
$$x_{42} = \frac{-\cos a + Q'}{\sin a}, \quad y_{42} = \frac{\cos^2 a - \cos a + (1 - \cos a)Q'}{\sin^2 a},$$
$$x_{43} = -\frac{\cos a + Q'}{\sin a}, \quad y_{43} = \frac{\cos^2 a - \cos a + (\cos a + 1)Q'}{\sin^2 a},$$
$$x_{44} = -\frac{\cos a + Q'}{\sin a}, \quad y_{44} = \frac{\cos^2 a - \cos a + (\cos a - 1)Q'}{\sin^2 a},$$

avec :

$$Q' = (\cos^2 a - 2\cos a)^{1/2}.$$

Ces coordonnées sont réelles si $\cos a \leq 0$. L'étude de stabilité montre que ces points sont toujours instables.

Les coordonnées de I'_{41}, I'_{42}, I'_{43}, I'_{44} sont :

$$x'_{41} = \frac{-\cos a + Q''}{\sin a}, \quad y'_{41} = \frac{\cos^2 a - \cos a + Q' - Q'' \cos a}{\sin^2 a},$$
$$x'_{42} = \frac{-\cos a + Q'}{\sin a}, \quad y'_{42} = \frac{\cos^2 a - \cos a + Q'' - Q' \cos a}{\sin^2 a},$$
$$x'_{43} = -\frac{\cos a + Q''}{\sin a}, \quad y'_{43} = \frac{\cos^2 a - \cos a + Q' + Q'' \cos a}{\sin^2 a},$$
$$x'_{44} = \frac{-\cos a + Q'}{\sin a}, \quad y'_{44} = \frac{\cos^2 a - \cos a - Q'' - Q' \cos a}{\sin^2 a},$$

avec :

$$Q'' = (Q'^2 + 2Q')^{1/2}.$$

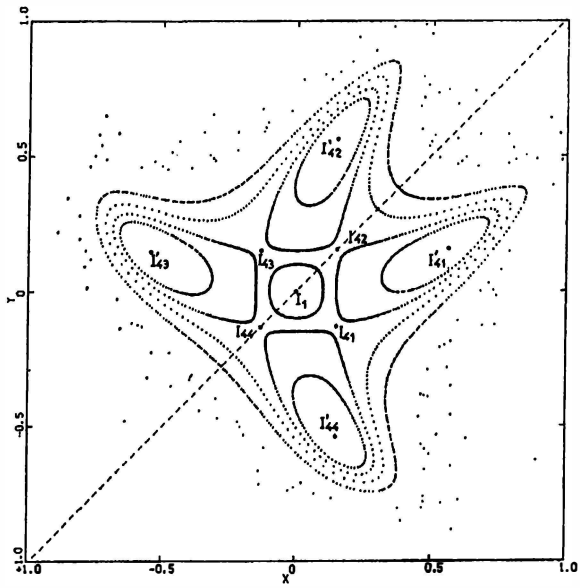


FIG. A.21 – *Quelques orbites à* $a = \frac{2\pi}{4} - 0.01$ *ou* $\cos a = -0.01$. *D'après [79].*

Ces points fixes sont réels si $\cos a \leq 0$ et, dans ce cas, ils sont stables si :

$$Q'^2(Q'^2 + 2Q') < 1/4,$$

c'est-à-dire si :

$$-0.10336015\ldots < \cos a < 0$$

et ils sont instables si :

$$-1 < \cos a \leq -0.10336015\ldots .$$

Les coordonnées de I''_{41}, I''_{42}, I''_{43}, I''_{44} sont obtenues à partir de celles de I'_{41}, I'_{42}, I'_{43}, I'_{44} en remplaçant Q' par $-Q'$. Ces points ne sont jamais réels et peuvent être négligés. Les points I_{41}, I_{42}, I_{43}, I_{44}, I'_{41}, I'_{42}, I'_{43}, I'_{44} sont présentés sur la figure A.21.

Exercice 3.5 : On a :

$$f(\alpha) = \alpha - \frac{p(\alpha)}{p'(\alpha)} = \alpha.$$

D'autre part, en dérivant (3.122) on obtient :

$$f'(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}.$$

D'où $f'(\alpha) = 0$.

On a donc, d'après le théorème 3.6.1, qui reste valable pour les fractions rationnelles,

$$J(f) = \partial A(\alpha) \tag{A.72}$$

où $A(\alpha)$ est le domaine d'attraction de α et $\partial A(\alpha)$ est la frontière de $A(\alpha)$.

Considérons le cas :

$$p(z) = z^3 - 1.$$

Les zéros de p sont : 1, $e^{i2\pi/3}$, $e^{i4\pi/3}$ et la fonction de Newton s'écrit :

$$f(z) = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}. \tag{A.73}$$

D'après (A.72), l'ensemble de Julia de $f(z)$ est la frontière du domaine d'attraction de *n'importe quelle racine* 1, $e^{i2\pi/3}$ ou $e^{i4\pi/3}$:

$$J(f) = \partial A(1) = \partial A(e^{i2\pi/3}) = \partial A(e^{i4\pi/3})$$

Le programme A.5 dessine les bassins d'attraction des trois racines de l'unité. Leur frontière est l'ensemble de Julia $J(f)$. Le résultat est présenté sur la figure A.22. Il est à noter que $J(f)$ n'est pas borné car f est une fraction rationnelle.

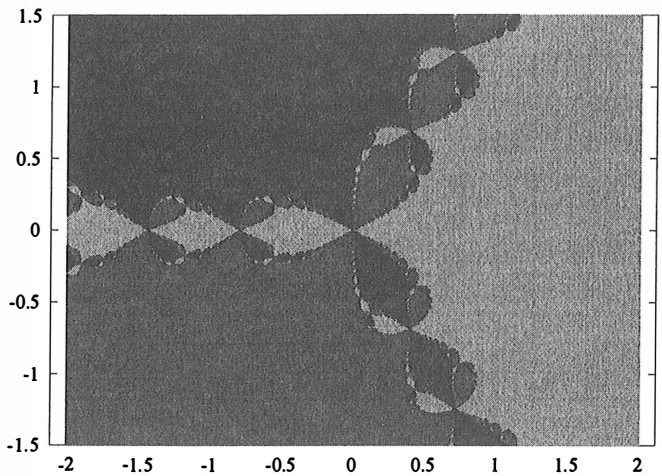


FIG. A.22 – *Méthode de Newton : bassins d'attraction des zéros de* $z^3 - 1$.

Exercice 3.6 : 1) α étant une racine de $P(z) - z$, le développement de Taylor au voisinage de α s'écrit :

$$P(z) - z = [P'(\alpha) - 1](z - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(z - \alpha)^2 + \frac{P'''(\alpha)}{3!}(z - \alpha)^3 + \cdots .$$

D'où la conclusion :

2) comme les α_k, $k = 1, 2, \ldots, d$ sont des racines simples de $P(z) - z$, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(z)-z}$ s'écrit :

$$\frac{1}{P(z) - z} = \sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{z - \alpha_k} \tag{A.74}$$

avec $a_k = \frac{1}{P'(\alpha_k)-1}$. Multiplions les deux membres de (A.74) par z et faisons $z = \infty$ nous obtenons (3.123).

Posons $P'(\alpha_k) = u + iv$, $a_k = \xi + i\eta$. Il s'ensuit :

$$\xi = \frac{u-1}{u^2+v^2-2u+1}.$$

Les relations $\xi = -\frac{1}{2}$, $\xi > -\frac{1}{2}$, $\xi < -\frac{1}{2}$ équivalent respectivement à $u^2+v^2 = 1$, $u^2+v^2 > 1$, $u^2+v^2 < 1$. Par conséquent, si $\Re a_k < -\frac{1}{2}$ quel que soit $k = 1,2,\ldots,d$, on aura :

$$\sum_{k=1}^{d} \Re a_k < -\frac{d}{2} < 0$$

en contradiction avec (3.123). Il y aura donc au moins un α_k tel que $\Re a_k > -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $|P'(\alpha_k)|^2 = u^2+v^2 > 1$.

3) Supposons maintenant que certains multiplicateurs $P'(\alpha_k)$ soient égaux à 1. Nous aurons alors, pour la fraction $\frac{1}{P(z)-z}$, une décomposition en éléments simples de la forme :

$$\frac{1}{P(z)-z} = \sum_{\alpha} \frac{1}{P'(\alpha)-1}\frac{1}{z-\alpha} + \sum_{\beta}\left(\frac{a_{-2}}{(z-\beta)^2} + \frac{a_{-1}}{z-\beta}\right) \tag{A.75}$$

la première sommation étant étendue aux points fixes α avec $P'(\alpha) \neq 1$ et la deuxième sommation étant étendue aux points fixes β avec $P'(\beta) = 1$, $P''(\beta) \neq 0$. Les coefficients a_{-2}, a_{-1} sont obtenus en divisant 1 par :

$$\frac{P''(\beta)}{2!} + \frac{P'''(\beta)}{3!}x + \cdots$$

suivant les puissances croissantes de x. Il vient :

$$a_{-2} = a_{-2}(\beta) = \frac{2}{P''(\beta)}, \quad a_{-1} = a_{-1}(\beta) = -\frac{2P'''(\beta)}{3[P''(\beta)]^2}.$$

Multiplions les deux membres de (A.75) par z et faisons $z = \infty$, nous obtenons :

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{P'(\alpha)-1} + \sum_{\beta} a_{-1}(\beta) = 0.$$

Exercice 3.7 : 1) L'intervalle $K = [-2,2]$ est complètement invariant par p_{-2} : $p_{-2}(K) = p_{-2}^{-1}(K) = K$. Comme $0 \in K$ et l'ensemble de Julia est connexe on en déduit que l'ensemble de Julia de p_{-2} est K.

2) $z = (x + \sqrt{x^2-4})/2$, donc z est solution de l'équation $z^2 - zx + 1 = 0$. D'où $x = z + z^{-1} = \phi^{-1}(z)$ et on vérifie facilement que $\phi \circ p_{-2} \circ \phi^{-1} = p_0$.

3) Si $z = re^{i2\pi\alpha}$, alors :

$$\begin{aligned} x &= X + iY = re^{i2\pi\alpha} + r^{-1}e^{-i2\pi\alpha} \\ &= (r + r^{-1})\cos 2\pi\alpha + i(r - r^{-1})\sin 2\pi\alpha. \end{aligned}$$

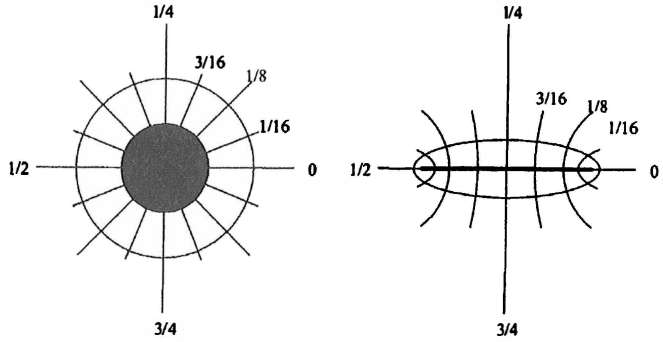


FIG. A.23 – *Lignes équipotentielles et lignes de champs pour* $K = [-2, 2]$ *(Le plan des z est à gauche et le plan des x est à droite). D'après [131].*

a) *Lignes équipotentielles :* la relation $\cos^2 2\pi\alpha + \sin^2 2\pi\alpha = 1$ s'écrit alors :

$$\frac{X^2}{(r + r^{-1})^2} + \frac{Y^2}{(r - r^{-1})^2} = 1.$$

C'est l'équation d'une ellipse.

b) *Lignes de champs :* de même en éliminant r entre X et Y on obtient :

$$\frac{X^2}{4\cos^2 2\pi\alpha} - \frac{Y^2}{4\sin^2 2\pi\alpha} = 1.$$

C'est l'équation d'une hyperbole.

Le résultat de la transformation ϕ^{-1} est présenté sur la figure A.23 avec des lignes de champs $\alpha = 0{,}1/16,\ 1/8,\ 3/16,\ 1/4$ etc..

Exercice 3.8 : 1) Cherchons un point fixe x de $P(x)$ tel que $P'(x) = \lambda$. Comme dans le cas quadratique (Cf. formule (3.101)), il est plus commode d'utiliser le polynôme :

$$Q_\lambda = x^3 + 3kx^2 + \lambda x \tag{A.76}$$

conjugué de $P(x)$ par la conjugaison (3.105), avec :

$$a) \quad p = \lambda - 3k^2, \quad b) \quad q = k(1 - p - k^2). \tag{A.77}$$

Dans ce cas le point fixe est $x = 0$ et $Q'_\lambda(0) = \lambda$. Eliminant k entre (A.77a) et (A.77b), nous obtenons :

$$q = \frac{(3 - 2p - \lambda)}{3}\sqrt{\frac{\lambda - p}{3}} \tag{A.78}$$

La courbe existe si $\lambda - p \geq 0$. On en déduit :

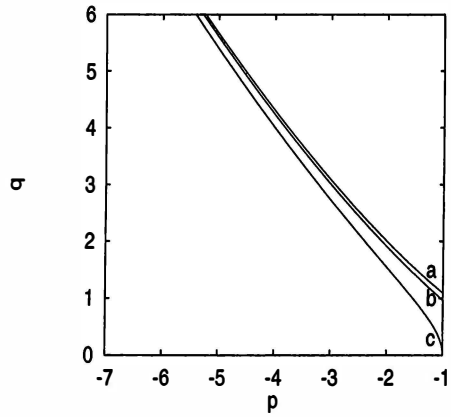


FIG. A.24 – *Points (p,q) donnant a) : une bifurcation nœud-col, b) un point fixe superstable, c) : une bifurcation de doublage de période.*

a) pour $\lambda = 1$ (Bifurcation nœud-col) :

$$q = \frac{2(1-p)^{3/2}}{3\sqrt{3}}$$

b) pour $\lambda = 0$ (Point fixe superstable) :

$$q = \frac{3-2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

c) pour $\lambda = -1$ (Bifurcation de doublement de période) :

$$q = \frac{2(2-p)}{3}\sqrt{-\frac{1+p}{3}}.$$

Les trois courbes sont présentées sur la figure A.24.

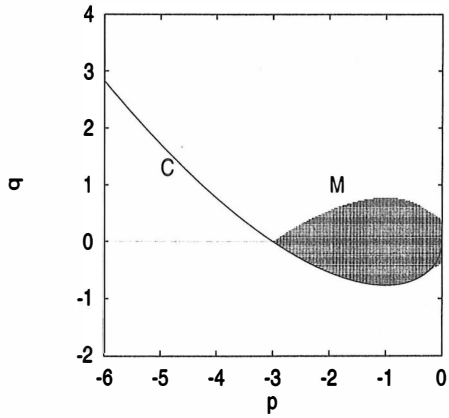


FIG. A.25 – *L'ensemble M et la courbe C.*

2) Cherchons dans quelle condition, il existe pour (3.125) un point fixe x_1 tel que

$$P(x_1) = P(a) = x_1, \quad a = \sqrt{-p/3},$$

c'est-à-dire :

$$(a) \quad x_1^3 - 3a^2 x_1 = -2a^3, \quad (b) \quad -2a^3 + q = x_1. \tag{A.79}$$

On déduit de (A.79a) que $x_1 = -2a$ et (A.79b) donne $q = 2a(a^2-1)$. D'où l'équation de la courbe C :

$$C : \quad q = -\frac{2(3+p)}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}. \tag{A.80}$$

On vérifie facilement que le polynôme (3.113) satisfait cette condition.

L'ensemble M et la courbe C sont présentés sur la figure A.25. On voit que si (p,q) appartient à la partie $p \leq -3$ de C, $P(x)$ possède les mêmes propriétés que (3.113).

Exercice 3.9 : a) $P'(z) = 3z^2 + p$. Les points critiques sont donc $z = \pm\sqrt{-p/3}$. Il est à noter que les orbites de $\pm\sqrt{-p/3}$ sont sur l'axe réel si $p \leq 0$ et sont sur l'axe imaginaire si $p \geq 0$. Posons :

$$x_\pm = P\left(\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \pm\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}. \tag{A.81}$$

Supposons que $p < -3$, alors $|x|_\pm > 2$. Soit x un réel avec :

$$|x| > \sqrt{1-p} > 2,$$

alors on a :

$$\frac{|P(x)|}{|x|} = x^2 + p > 1, \text{ car } x^2 > 1 - p.$$

On en déduit que si $|x| > 2$, alors x s'échappe vers l'infini. Or $|x_\pm| > 2$; on en déduit que les points critiques $\pm\sqrt{-p/3}$ s'échappent vers l'infini. D'où, d'après le théorème 3.6.3, J_P est un ensemble de Cantor.

Supposons que $p > 3$, alors :

$$P\left(\pm\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \pm i\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} = iy_\pm. \tag{A.82}$$

Soit y un réel avec :

$$|y| > \sqrt{1+p} > 2,$$

alors on a :

$$\frac{|P(iy)|}{|iy|} = |-y^2 + p| = |y^2 - p| > 1, \text{ car } y^2 > 1 + p.$$

On en déduit que si $|y| > 2$, iy s'échappe vers l'infini. Or $|y_\pm| > 2$ car $p > 3$; on en déduit que les points critiques $\pm\sqrt{-p/3}$ s'échappent vers l'infini. D'où, d'après le théorème 3.6.3, J_P est un ensemble de Cantor.

b) Si $-3 \leq p \leq 0$, alors les points fixes de $P(x)$ sont $x = 0$, $x = \pm\sqrt{1-p}$ et on a $|x_\pm| \leq \sqrt{1-p}$, $|P^k(x_+)| = |P^k(x_-)| \leq \sqrt{1-p}$. On en déduit que les points critiques $\pm\sqrt{-p/3}$ ne séchappent pas vers l'infini. Donc J_P est connexe.

Si $0 \leq p \leq 3$, posons dans ce cas $P^*(y) = y^3 - py$. On a alors $|P(iy)| = |P^*(y)|$, $|P^k(iy)| = |P^{*k}(y)|$. Comme les points fixes de $P^*(y)$ sont $y = 0$, $y = \pm\sqrt{1+p}$. On en déduit que $|y_\pm| \leq \sqrt{1+p}$ et $|P^{*k}(y_\pm)| \leq \sqrt{1+p}$. Donc les points critiques $\pm\sqrt{-p/3}$ ne s'échappent pas vers l'infini et J_P est connexe.

c) Si $p = -3$, alors $z = \pm 2$ est un point fixe répulsif, car $P(\pm 2) = \pm 2$ et $|P'(\pm 2) = 9 > 1$. Donc $\pm 2 \in J_P$. Comme l'intervalle $[-2, 2]$ est complètement invariant sous $P(z)$ et comme J_P est connexe (les points critiques appartiennent à $[-2, 2]$), on en déduit que $J_P = [-2, 2]$. De même, si $p = 3$ alors $J_P = [-2i, 2i]$.

A.4 Réponses aux exercices du chapitre 4

Exercice 4.1 : 1) On a :

$$\begin{aligned} \dot{I} &= n_2\dot{j}_1 + n_1\dot{j}_2 \\ &= -n_2\frac{\partial H}{\partial \theta_1} - n_1\frac{\partial H}{\partial \theta_2} \\ &= n_1 n_2 \epsilon H_1(j_1, j_2)[\sin(n_1\theta_1 - n_2\theta_2) - \sin(n_1\theta_1 - n_2\theta_2)] = 0, \end{aligned}$$

d'où I =Cte.

2) Résonance (2,2). Dans la transformation canonique (4.158), le hamiltonien devient :

$$\mathcal{H} = J_1 - J_1^2 - J_1 J_2 + 3J_2^2 + \alpha J_2(J_1 - J_2)\cos(2\Theta_2) = E$$

et $I = 2J_1$. Les nouvelles équations hamiltoniennes sont :

$$\dot{J}_1 = 0, \tag{A.83}$$

$$\dot{\Theta}_1 = 1 - 2J_1 - J_2 + \alpha J_2 \cos 2\Theta_2, \tag{A.84}$$

$$\dot{J}_2 = 2\alpha(\frac{I}{2} - J_2)J_2 \sin 2\Theta_2, \tag{A.85}$$

$$\dot{\Theta}_2 = -\frac{I}{2} + 6J_2 + \alpha(\frac{I}{2} - 2J_2)\cos 2\Theta_2. \tag{A.86}$$

Comme J_1 est constant, on résout d'abord le système (A.85)-(A.86) pour J_2, Θ_2. On les remplace ensuite dans (A.84) pour avoir Θ_1.

Cherchons maintenant les points fixes du système (A.85)-(A.86) ; ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} 2\alpha(\frac{I}{2} - J_2)J_2 \sin 2\Theta_2 = 0, \\ -\frac{I}{2} + 6J_2 + \alpha(\frac{I}{2} - 2J_2)\cos 2\Theta_2 = 0. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \Theta = \Theta_2^* = \frac{n\pi}{2}, \\ J_2 = J_2^* = \frac{I(1 - \alpha\cos n\pi)}{2(6 - 2\alpha\cos n\pi)} \approx \frac{I}{12} \text{ pour } \alpha \ll 1. \end{aligned}$$

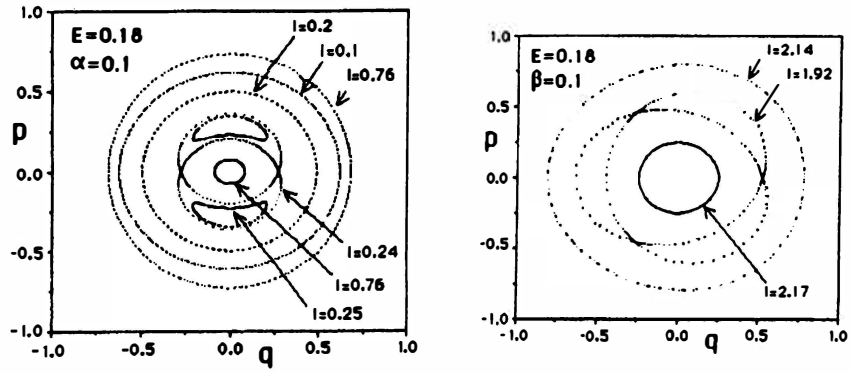


FIG. A.26 – *Résonance* (2, 2) *(à gauche) et résonance* (2, 3) *(à droite). D'après [139].*

La nature de ces points fixes peut être déterminée en linéarisant le système (A.85)-(A.86) autour de (J_2^*, Θ_2^*). Posons :

$$J_2 = J_2^* + \delta J_2, \quad \Theta_2 = \Theta_2^* + \delta\Theta_2,$$

nous obtenons le système linéarisé suivant :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta J_2\\ \delta\Theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4\alpha J_2^*(\frac{I}{2} - J_2^*)\cos n\pi\\ 6 - 2\alpha\cos n\pi & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta J_2\\ \delta\Theta_2\end{bmatrix}. \tag{A.87}$$

Si $\alpha \ll 1$, on a $J_2^* \approx I/12$ et (A.87) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\delta J_2\\ \delta\Theta_2\end{bmatrix} \approx A\begin{bmatrix}\delta J_2\\ \delta\Theta_2\end{bmatrix}, \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix}0 & \frac{5\alpha I^2}{36}\cos n\pi\\ 6 & 0\end{bmatrix}. \tag{A.88}$$

La solution du système linéaire (A.88) s'écrit :

$$\begin{bmatrix}\delta J_2\\ \delta\Theta_2\end{bmatrix} = e^{\lambda_+ t}A_+\begin{bmatrix}\frac{b}{\lambda_+}\\ 1\end{bmatrix} + e^{\lambda_- t}A_-\begin{bmatrix}\frac{b}{\lambda_-}\\ 1\end{bmatrix}$$

où l'on a posé $b = 5\alpha I^2/36$; $(b/\lambda_+, 1)$, $(b/\lambda_-, 1)$ sont les vecteurs propres de A correspondant aux valeurs propres $\lambda_\pm = \pm\sqrt{6b\cos n\pi}$ respectivement. $A_\pm$ sont deux constantes déterminées par les conditions initiales.

Pour n pair, $\lambda_\pm$ sont réels et de signes contraires. Dans ce cas (J_2^*, Θ_2^*) est un point hyperbolique. Pour n impair, $\lambda_\pm$ sont purement imaginaires et (J_2^*, Θ_2^*) est un point elliptique.

Pour $\alpha \ll 1$, on a $J_2 = J_2^* \approx I/12$, d'où $J_1 \approx 6J_2$. Portant $J_2 = J_1/6$ et $\alpha = 0$ dans (4.156), nous obtenons :

$$J_1^2 - \frac{12J_1}{13} + \frac{12E}{13} = 0 \text{ ou } J_1 = \frac{6}{13}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{13E}{3}}\right] = 6J_2.$$

Par conséquent, pour que les points fixes existent, il faut que $E < 3/13 \approx 0.23...$; dans ce cas J_1 sera réel. La figure A.26 montre les sections de Poincaré dans le

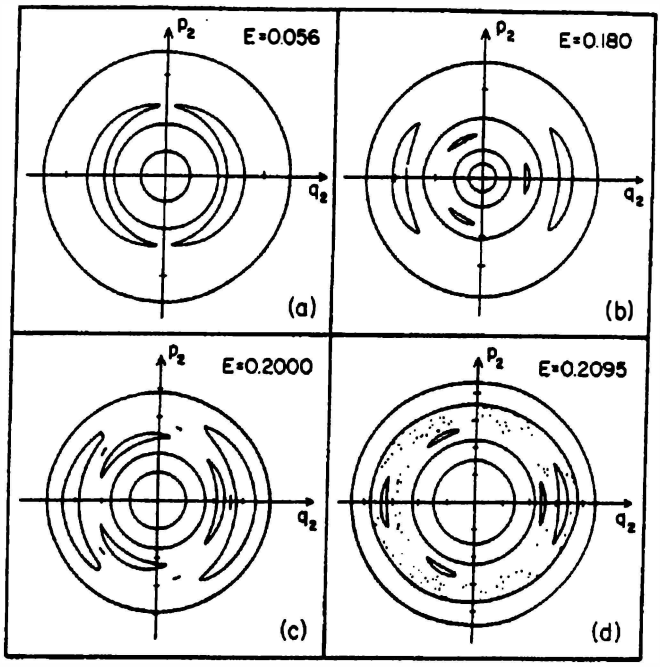


FIG. A.27 – *Double résonance* (2, 2) *et* (2, 3). *D'après Walker et Ford [139].*

plan cartésien ($p = -\sqrt{J_2}\sin\Theta_2, q = \sqrt{2J_2}\cos\Theta_2$) pour $E = 0.18$, $\alpha = 0.1$ et $I = 0.1, 0.2, 0.24, 0.25, 0.76$. Sur la figure on voit clairement les points hyperboliques et elliptiques et leurs séparatrices.

3) Résonance (2,3). Considérons maintenant le hamiltonien (4.159). Il est également intégrable et la seconde intégrale du mouvement est :

$$I = 3J_1 + 2J_2 = \text{ Cte.}$$

Dans la transformation canonique (4.160), on obtient le nouvel hamiltonien :

$$\mathcal{H} = J_1 - J_1^2 + \frac{J_2}{3} - \frac{5J_1J_2}{3} + \frac{23}{9}J_2^2 + \frac{\beta}{3}J_2^{3/2}(3J_1 - 2J_2)\cos 3\Theta_2 = E$$

et J_1 est une constante du mouvement car $\mathcal{H}$ est indépendant de Θ_1. Les équations hamiltoniennes pour J_2 et Θ_2 s'écrivent :

$$\dot{J}_2 = \beta J_2^{3/2}(3J_1 - 2J_2)\sin 3\Theta_2, \tag{A.89}$$

$$\dot{\Theta}_2 = \frac{1}{3} - \frac{5J_1}{3} + \frac{46J_2}{9} + \beta J_2^{1/2}(\frac{3}{2}J_1 - \frac{5}{3}J_2)\cos 3\Theta_2. \tag{A.90}$$

On montre, comme dans la question précédente, que les points fixes du système (A.89)-(A.90) sont $\Theta_2 = \Theta_2^* = n\pi/3$, $J_2 = J_2^*$ où J_2^* est solution de l'équation :

$$\frac{1}{3} - \frac{5I}{9} + \frac{56J_2^*}{9} + \beta\sqrt{J_2^*}(\frac{I}{2} - \frac{8}{3}J_2^*)\cos n\pi = 0.$$

On peut de nouveau linéariser le système (A.89)-(A.90) autour du point fixe (J_2^*, Θ_2^*) et trouver des solutions pour le système linéarisé comme dans (A.88). On trouvera

que pour n pair ($n = 0, 2, 4$) les points fixes sont hyperboliques, tandis que pour n impair ($n = 1, 3, 5$) les points fixes sont elliptiques. Les sections de Poincaré dans le plan cartésien ($p = -(2J_2)^{1/2} \sin \Theta_2, q = (2J_2)^{1/2} \cos \Theta_2$) sont présentées sur la figure A.26 (à droite), avec $E = 0.18$, $\beta = 0.1$ et $I = 1.92, 2.14, 2.17$. On voit clairement sur la figure les trois points hyperboliques, les trois points elliptiques et les séparatrices.

4) Double résonance (2,2) et (2,3). Considérons maintenant le hamiltonien à deux résonances (4.161). Les équations hamiltoniennes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\dot{j}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} = 2\alpha j_1 j_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\beta j_1 j_2^{3/2} \sin(2\theta_1 - 3\theta_2), \\
\dot{j}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_2} = -2\alpha j_1 j_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - 3\beta j_1 j_2^{3/2} \sin(2\theta_1 - 3\theta_2), \\
\dot{\theta}_1 &= \frac{\partial H}{\partial j_1} = 1 - 2j_1 - 3j_2 + \alpha j_2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + \beta j_2^{3/2} \cos(2\theta_1 - 3\theta_2), \\
\dot{\theta}_2 &= \frac{\partial H}{\partial j_2} = 1 - 3j_1 + 2j_2 + \alpha j_1 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + \frac{3}{2}\beta j_1 j_2^{1/2} \cos(2\theta_1 - 3\theta_2).
\end{aligned}$$

La figure A.27 montre les sections de Poincaré dans le plan ($p = -\sqrt{2j_2} \sin \theta_2$, $q = \sqrt{2j_2} \cos \theta_2$) correspondant à $\theta_1 = 3\pi/2$, $\alpha = \beta = 0.02$. On remarquera que la résonance $(2, 2)$ est présente pour $E < 3/13 \approx 0.23...$ Pour $E = 0.056$ seule la résonance $92, 2)$ existe (fig. A.27a). Pour $E = 0.18$ (fig. A.27b), les deux résonances sont présentes et séparées. A $E = 0.2$ (fig. A.27c), elles occupent de larges régions de l'espace des phases mais restent séparées. Finalement, à $E = 0.2095$ les deux résonances se superposent et on trouve une trajectoire chaotique.

Exercice 4.2 : 1) On vérifie facilement que $x = 0$ est le point fixe de f. Au

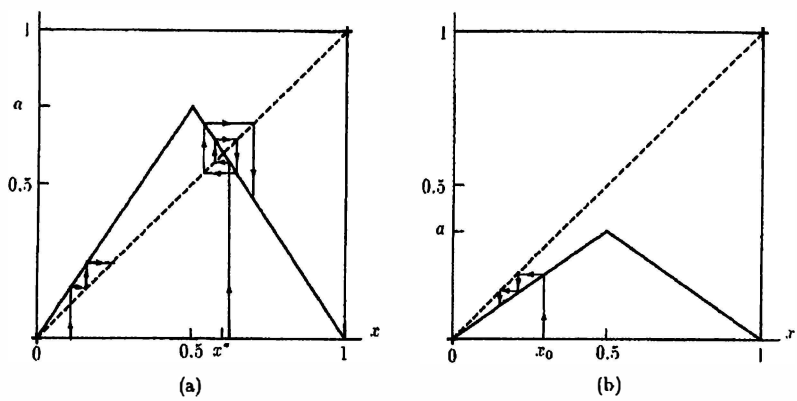


FIG. A.28 – *L'application tente et ses points fixes : (a) $a > 1/2$, les points fixes x^* et 0 sont instables. (b) $a < 1/2$, le point fixe 0 est stable.*

point $x = 0$, on a $df/dx = 2a$. Par conséquent le point fixe $x = 0$ est stable (resp. instable) si $a < 1/2$ (resp. $a > 1/2$). Si $a > 1/2$, l'application tente possède un point fixe non nul :

$$x^* = \frac{2a}{1 + 2a}. \tag{A.91}$$

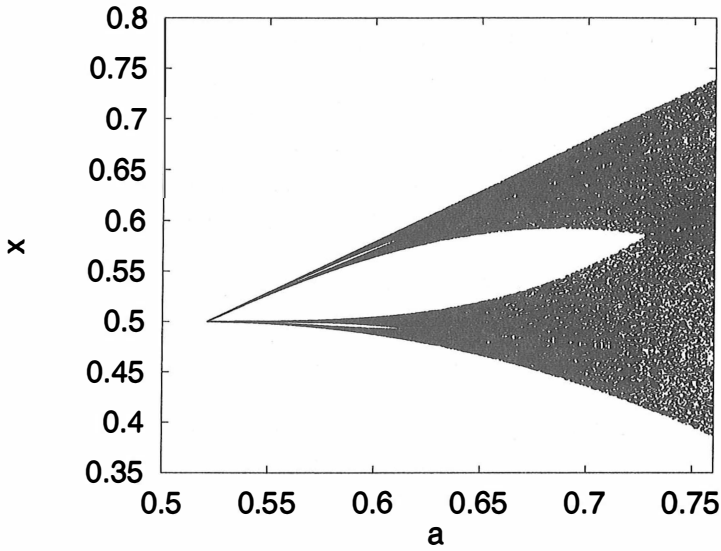


FIG. A.29 – *Diagramme de bifurcation de l'application tente.*

Au point x^*, on a $df/dx = -2a$. Le point x^* est donc instable car $a > 1/2$ (Cf. figure A.28).

Si $a = 1/2$, on a:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

L'application a donc une infinité de points fixes situés dans l'intervalle $[0, 1/2]$.

2) On a $|f'(x)| = 2a$ pour tout $x \in [0,1]$. On en déduit, d'après (4.88), l'exposant de Lyapunov $\lambda = \log 2a$; d'où $\lambda < 0$ si $a < 1/2$ et $\lambda > 0$ si $a > 1/2$. Le programme A.6 dessine le diagramme de bifurcation de l'application tente. Le résultat est présenté sur la figure A.29.

Exercice 4.3 : a) L'étoile de von Koch est une courbe fermée de longueur infinie

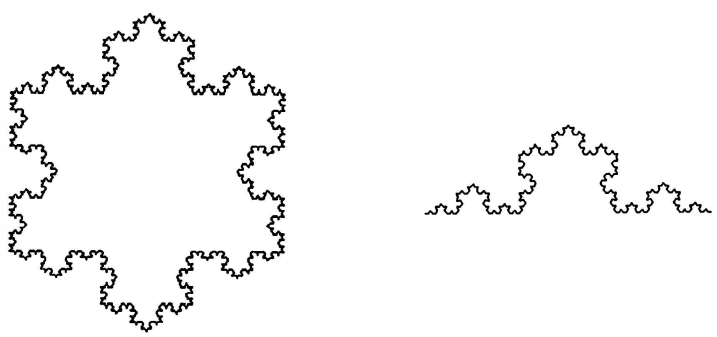


FIG. A.30 – *Étoile de von Koch et courbe de von Koch.*

entourant une surface finie. En effet, la longueur de l'étoile de von Koch est :

$$L = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty.$$

Soit S_n la surface entourée par l'étoile de von Koch à l'étape n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. On a, en posant $s = 4/9$:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \sqrt{3}/4, \text{ surface d'un triangle équilatéral de côté 1,} \\
S_1 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) S_0, \\
S_2 &= S_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2, S_0 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s\right) S_0,
\end{aligned}$$

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}, S_0 = \left(1 + \frac{1}{3}(1 + s + s^2 + \cdots + s^{n-1})\right) S_0.$$

On en déduit :

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{1-s}\right) S_0 = \frac{8}{5} S_0.$$

b) Le tableau suivant permet de calculer la dimension fractale de l'étoile de von Koch :

n	$N(\epsilon)$	ϵ
0	3	1
1	3×4	$\frac{1}{3}$
2	3×4^2	$\frac{1}{3^2}$
n	3×4^n	3^{-n}

On en déduit :

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(3 \times 4^n)}{\log(3^n)} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.2618.$$

c) Le programme A.7 est écrit d'après [140] [132]. Le résultat est présenté sur la figure A.30.

Exercice 4.4 : Le tableau suivant permet de calculer la dimension fractale de l'ensemble de Cantor à deux dimensions :

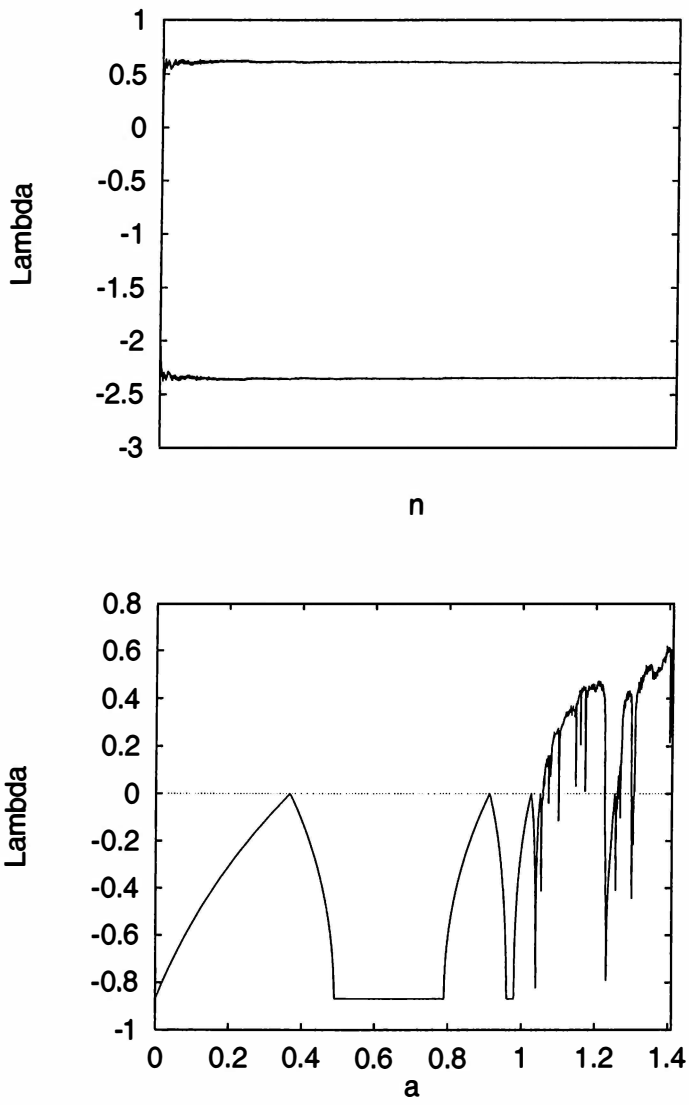


FIG. A.31 – *Application de Hénon. En haut : les exposants de Lyapunov en fonction de n* ($1 \leq n \leq 10000$, $a = 1.4$, $b = 0.3$). *En bas : le plus grand exposant de Lyapunov en fonction de a* ($b = 0.3$).

n	$N(\epsilon)$	ϵ
0	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$
2	4^2	$\frac{1}{3^2}$
n	4^n	3^{-n}

D'où

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(4^n)}{\log(3^n)} = \frac{\log 4}{\log 3} = 2\frac{\log 2}{\log 3}.$$

On pourrait aussi appliquer les formules (4.75)-(4.80).

Exercice 4.5 : 1) Le programme A.8 calcule les exposants de Lyapunov en fonction de n. Le résultat est présenté sur la figure A.31 (haut).

2) Le programme A.9 calcule le plus grand exposant de Lyapunov en fonction de a. Le résultat est présenté sur la figure A.31 (bas).

Exercice 4.6 : 1) Matrice jacobienne de M :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\sin t \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{A.92}$$

a pour valeurs propres : $\lambda^{-1} > 1$ et $\beta > 1$. On en déduit que M n'a pas d'attracteur fini.

2) Pour un couple (x_n, t_n) donné, on peut trouver un couple (x_0, t_0) tel que $(x_n, t_n) = M^n(x_0, t_0)$ avec :

$$x_0 = \lambda^n x_n - \sum_{l=0}^{n-1} \lambda^{l+1} \cos(\beta^l t_0), \quad t_0 = \beta^{-n} t_n.$$

On en déduit que si x_n est fini quand $n \to \infty$, le couple (x_0, t_0) vérifie la relation :

$$x = -\sum_{l=0}^{\infty} \lambda^{l+1} \cos(\beta^l t) \equiv f(t) \quad \text{fonction de Weierstrass.} \tag{A.93}$$

3) Comme $0 < \lambda < 1$ la somme (A.93) est absolument convergente. Par contre la somme :

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\infty} (\beta\lambda)^{l+1} \sin(\beta^l t)$$

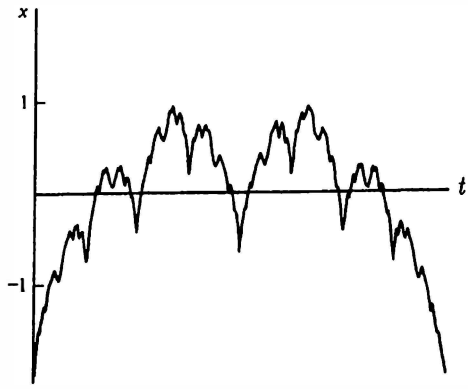


FIG. A.32 – *Fonction de Weierstrass avec* $\beta = 2$, $\lambda = 2/3$. *D'après [96].*

diverge car $\beta\lambda > 1$. Donc $f(t)$ est non-différentiable (voir la figure A.32). En fait la courbe (A.93) a pour dimension fractale $d = 2 - |\log\lambda/\log\beta|$. La démonstration n'est pas facile [101]. Grosso modo, on montre que pour tout intervalle petit $J = [t_1, t_2]$ de longueur ϵ, on a:

$$\max_{t\in J} f(t) - \min_{t\in J} f(t) \sim \epsilon^\alpha \text{ avec } \alpha = |\log\lambda/\log\beta|. \tag{A.94}$$

Pour un petit intervalle J de longueur ϵ, combien faudra-t-il de carrés de dimension $\epsilon \times \epsilon$ pour recouvrir le graphe de f restreint à J? D'après (A.94) ce nombre est $(\epsilon \times \epsilon^\alpha)/\epsilon^2 = \epsilon^{\alpha-1}$. Comme dans $[0,1]$ il y a $1/\epsilon$ intervalles de longueur ϵ, le nombre de carrés $\epsilon \times \epsilon$ nécessaire pour recouvrir le graphe f dans l'intervalle $[0,1]$ est $N(\epsilon) = \epsilon^{\alpha-1}/\epsilon = \epsilon^{\alpha-2}$. On en déduit la dimension fractale:

$$d = -\log N(\epsilon)/\log\epsilon = 2 - \alpha.$$

Exercice 4.7 : 1) Le programme A.10 dessine les diagrammes de bifurcation. Le résultat est présenté sur la figure A.33.

2) Le programme A.11 calcule les exposants de Lyapunov en fonction de a. Le résultat est présenté sur la figure A.34.

Exercice 4.8 : (L'application de Lauwerier [105]). Les points fixes de (4.165) sont $(0,0)$ et $(3/(4+2b), 3/4)$ (Cf. figure A.35).

Dans l'application (4.165), la ligne verticale $x = \xi$, $0 \le y \le 1$ se transforme en un arc parabolique d'équation:

$$y = 1 - \left(\frac{1-2x}{1-2b\xi}\right)^2$$

(obtenue en éliminant y entre $x_1 = b\xi(1-2y) + y$ et $y_1 = 4y(1-y)$) et la ligne horizontale $y = \eta$, $0 \le x \le 1$ se transforme en une ligne horizontale $y = 4\eta(1-\eta)$.

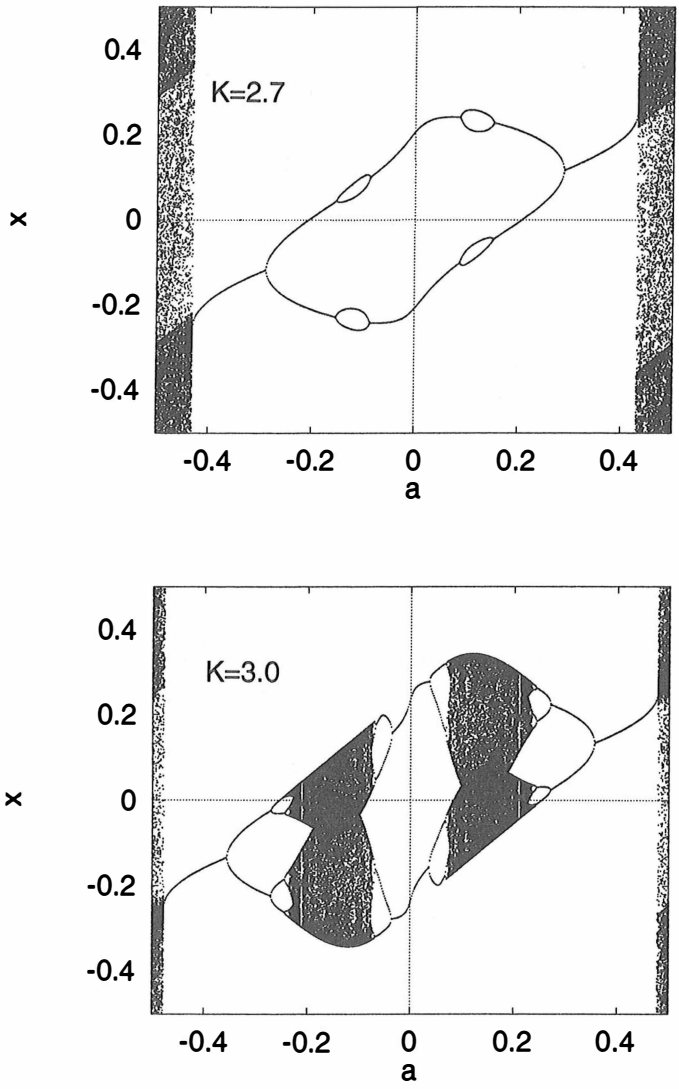


FIG. A.33 – *Endomorphisme du cercle : diagrammes de bifurcation à* $K = 2.7$ *et* $K = 3.$.

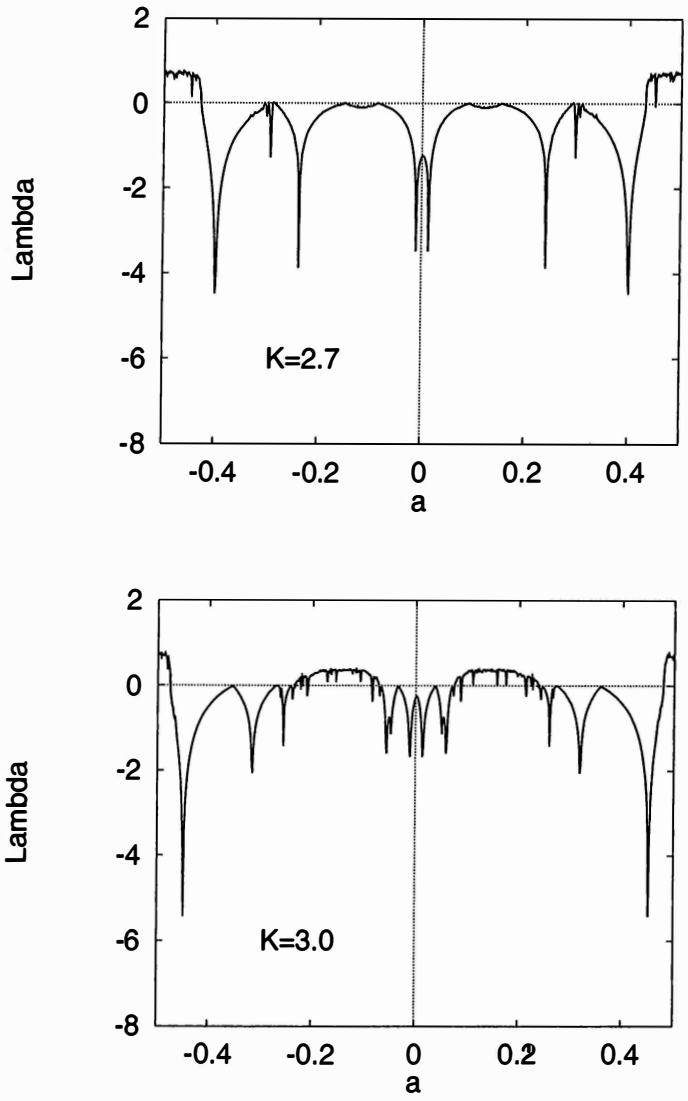


FIG. A.34 – *Endomorphisme du cercle : exposants de Lyapunov à* $K = 2.7$ *et* $K = 3$.

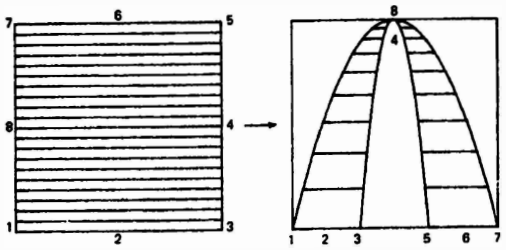


FIG. A.35 – *L'application de Lauwerier. D'après [105].*

On observe que les lignes $y = 0$ et $y = 3/4$ sont invariantes. Elles sont interprétées comme les variétés stables de $(0,0)$ et $(3/(4+2b), 3/4)$ respectivement.

Pour trouver les variétés instables des points fixes, portons le changement de variables :

$$2bx = b - (1-b)u, \quad 2y = 1 - v,$$

dans (4.165) ; nous obtenons l'application itérée :

$$u_{n+1} = b(1+u_n)v_n, \quad v_{n+1} = 2v_n^2 - 1. \tag{A.95}$$

On en déduit :

$$u_n = bv_{n-1} + b^2 v_{n-1}v_{n-2} + b^3 v_{n-1}v_{n-2}v_{n-3} + \cdots + b^n v_{n-1}v_{n-2}v_{n-3}\ldots v_0(1+u_0).$$

Pour le point fixe $(0,0)$, la séquence v_n peut être paramétrée par

$$v_n = \cos(2^n z). \tag{A.96}$$

Notons la relation connue :

$$v_0 v_1 v_2 \ldots v_{n-1} = \frac{2^{-n}\sin(2^n z)}{\sin z}.$$

On en déduit :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b/2)^k \sin(2^n z)}{\sin(2^{n-k} z)} + \frac{(b/2)^n \sin(2^n z)}{\sin z} u_0, \quad v_n = \cos(2^n z). \tag{A.97}$$

On voit que pour $n \to \infty$, le deuxième terme de u_n disparaît et (A.97) s'écrit, en posant $t = 2^n z$:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(b/2)^k \sin t}{\sin(2^{-k} t)}, \quad v(t) = \cos t. \tag{A.98}$$

(A.98) peut être considéré comme une paramétrisation de la variété instable à l'origine. Par rapport aux variables (x, y), (A.98) s'écrit :

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(t) b^k, \quad y = \frac{1}{2}(1 - \cos t), \tag{A.99}$$

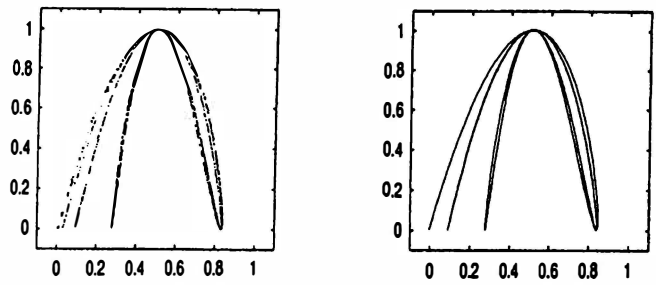


FIG. A.36 – *Application de Lauwerier à $b = 1/3$: les 5000 premiers points (à gauche) et variété instable de $(0,0)$ (à droite).*

où

$$\phi_k(t) = \frac{\sin t}{2^k \sin(2^{-k}t)} = \cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2^2}\cdots\cos\frac{t}{2^k}.$$

Le graphe de (A.99) est montré sur la figure A.36 (droite).

La variété instable de $(3/(4+2b), 3/4)$ se calcule de la même façon. On pose dans ce cas, au lieu de (A.96),

$$v_n = \cos\Big(\frac{2\pi}{3} + (-2)^n z\Big). \tag{A.100}$$

Noter que :

$$v_0 v_1 v_2 \ldots v_{m-1} = \frac{(-2)^{-m}\sin(\frac{2}{3}\pi + (-2)^m z)}{\sin(\frac{2}{3}\pi + z)}.$$

Le résultat est :

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{b} - 1)\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)b^k, \quad y = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(\frac{2\pi}{3} + t\Big), \tag{A.101}$$

où

$$\psi_k(t) = \frac{(-2)^{-k}\sin(\frac{2}{3}\pi + t)}{\sin\Big(\frac{2}{3}\pi + (-2)^{-k}t\Big)}.$$

Le programme Turbo Pascal A.12 calcule les 5000 premiers points de l'application de Lauwerier avec $b = 1/3$. Le résultat est présenté sur la figure A.36 gauche.

Exercice 4.9 :

1)

d'où :

$$J(0,0,0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega \end{bmatrix}.$$

Il existe une variété centrale de dimension 3.

2) a) L'équation en θ est découplée : $\dot{\theta} = \omega$, d'où $\theta = \omega t + \theta_0$.

b)

$$\dot{x} = \mu_1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2, \quad \dot{y} = y(x - \mu_2 + y^2).$$

Les points fixes sont donnés par :

$$\mu_1 - \frac{1}{2}x^2 - y^2 = 0, \quad y(x - \mu_2 + y^2) = 0.$$

1er cas (trivial) : $y = 0$ et $x_\pm = \pm\sqrt{2\mu_1}$ si $\mu_1 > 0$.

2e cas (non-trivial) : $y^2 = \mu_2 - x$ et $\mu_1 = \frac{1}{2}x^2 + y^2$.

La stabilité des points fixes est déterminée par les valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$J(x,y,\mu_1,\mu_2) = \begin{pmatrix} -x & -2y \\ y & x - \mu_2 + 3y^2 \end{pmatrix}. \tag{A.102}$$

c) Stabilité de la branche triviale : pour $x_\pm = \pm\sqrt{2\mu_1}$, $y = 0$, la matrice (A.102) s'écrit :

$$J(\pm\sqrt{2\mu_1},0,\mu_1,\mu_2) = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{2\mu_1} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2\mu_1} - \mu_2 \end{pmatrix}. \tag{A.103}$$

Cette matrice a pour valeurs propres $\lambda_1 = \mp\sqrt{2\mu_1}$, $\lambda_2 = \pm\sqrt{2\mu_1} - \mu_2$. On en déduit la stabilité des points $x_\pm$ (il est conseillé de faire un diagramme de bifurcation dans le plan (μ_1, μ_2) car il s'agit d'une bifurcation de codimension 2).

d) La stabilité de la branche non-triviale est déterminée par les valeurs propres de la matrice (A.102) avec $y^2 = \mu_2 - x$. Or une matrice 2×2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a pour valeurs propres :

$$\lambda = \frac{\text{trace } A \pm \sqrt{(\text{trace } A)^2 - 4\det A}}{2}.$$

Par conséquent, $\lambda = \pm i\omega \Leftrightarrow$ trace $A = 0$ et $\det A > 0$. D'après (A.102), on a :

$$\begin{aligned} \text{trace } J &= -\mu_2 + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{\mu_2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\mu_2 \\ \det J &= 2(\mu_2 - x)(1 - x) > 0. \end{aligned}$$

Pour $x = 2\mu_2/3$, le déterminant est positif si $2\mu_2(3 - 2\mu_2) > 0 \Leftrightarrow \mu_2 < 3/2$, car on suppose que $\mu_2 > 0$.

Remarque : Si $\mu_2 < 0$, trace J n'est jamais nulle sur la branche non-triviale car l'équation $y^2 = \mu_2/3$ n'a pas de sens. Donc il n'y aura pas de bifurcation de Hopf sur la branche non-triviale dans le cas $\mu_2 < 0$.

3) On obtient :

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \frac{1}{2}u^2 - v^2, \quad \frac{dv}{d\tau} = uv + \epsilon(v^3 - \beta v).$$

Ce système a la forme (4.118) avec comme hamiltonien du système non perturbé :

$$H(u,v) = v - \frac{1}{2}u^2 v - \frac{1}{3}v^3$$

et une perturbation $\epsilon g(u,v,\beta) = \epsilon(0, v^3 - \beta v)$ qui ne dépend pas explicitement du temps. La fonction de Melnikov est dans ce cas donnée par (4.131) :

$$M = \iint_S \left(\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\right) du dv \tag{A.104}$$

où S est l'intérieur de la courbe séparatrice d'équation :

$$H(u,v) \equiv v - \frac{1}{2}u^2 v - \frac{1}{3}v^3 = 0, \quad v \neq 0,$$

c'est-à-dire l'ellipse Γ_0 d'équation :

$$1 = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}v^2.$$

Si $M = 0$, les variétés stable et instable de x_+ et x_- se rejoignent. Utilisant la symétrie de l'ellipse Γ_0, il suffit d'intégrer (A.104) dans le premier cadran :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{3(1-\frac{1}{2}u^2)}} \left(\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial v}\right) du dv = \int_0^{\sqrt{2}} du \int_0^{\sqrt{3(1-\frac{1}{2}u^2)}} (3v^2 - \beta)\, dv = 0.$$

On en déduit :

$$\sqrt{3}(3-\beta)\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}u^2}du - \frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^{\sqrt{2}} u^2\sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}du = 0.$$

On a d'autre part :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}u^2\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}du = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1-\frac{1}{2}u^2\right)^{3/2} du = \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{2}} u^2\sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}du.$$

Cette dernière égalité est obtenue par intégration par parties. On en déduit :

$$M = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(\frac{9}{4} - \beta)\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}du = 0,$$

d'où $\beta = 9/4$ ou $\mu_1 = 4\mu_2/9$.

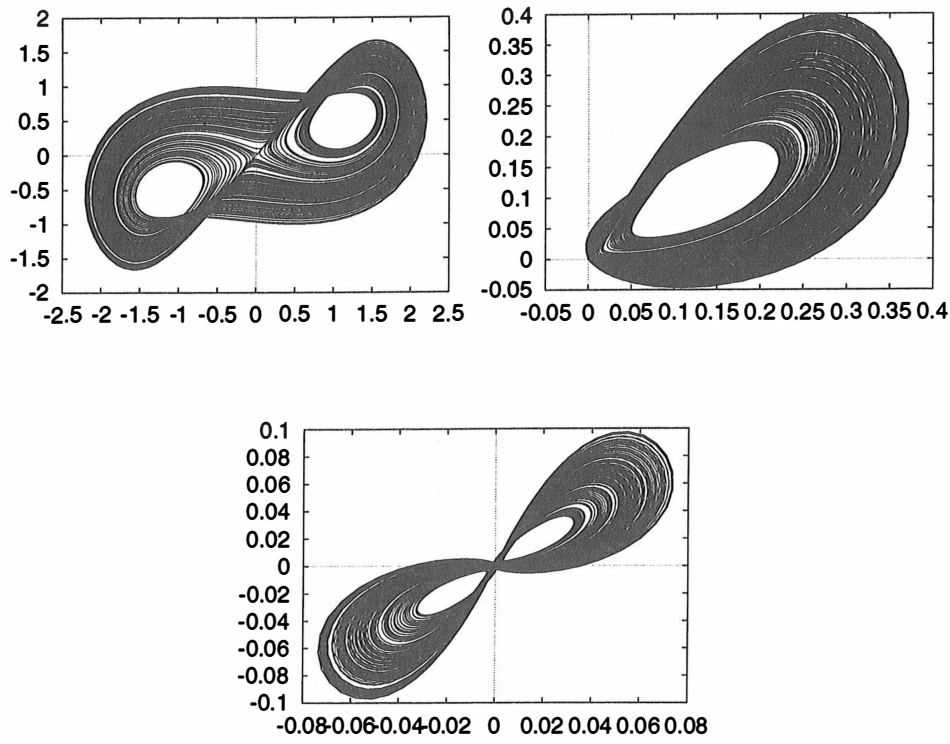


FIG. A.37 – *Projection sur les plans* (b_1, c_1), (b_2, c_2) *et* (b_3, c_3) *respectivement.*

Exercice 4.10 :

Portant (4.170) dans (4.169) et annulant les coefficients de $\exp(i2\pi nx)$, on obtient le système suivant :

$$i\dot{\theta}W_n + \dot{W}_n = (R - (2\pi n)^2(1 + i\nu))W_n - (1 + i\mu) \sum_{k-l+m=n} W_k W_l^* W_m, \tag{A.105}$$

où $\dot{\theta}$ est obtenu en prenant la partie imaginaire de $\dot{W}_0$ car $W_0 = a_0$ est réel,

$$\dot{\theta} = \Im\left(R - \frac{(1 + i\mu)}{W_0} \sum_{k-l+m=0} W_k W_l^* W_m\right). \tag{A.106}$$

Le programme A.13[1] résout le système (A.105)-(A.106) pour $R = 43.74$, $\nu = -\mu = 4$ et $n = 3$, la valeur initiale étant :

$$A(x, 0) = R^{1/2}(1 + 0.02\cos(2\pi x)).$$

Les résultats sont présentés sur la figure (A.37).

1. Écrit par Mlle Laure Goura, étudiante en D.E.A. de Dynamique des Fluides et des Transferts.

A.5 Réponses aux exercices du chapitre 5

Exercice 5.1 : 1) Le système (1.92) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{mM}{r^2}, \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{p}_\theta = 0, \end{aligned}$$

ou :

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta} r^2) = \frac{\dot{p}_\theta}{m} = 0, \tag{A.107}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r^2} = 0. \tag{A.108}$$

On déduit de (A.107) la seconde loi de Kepler ou loi des aires :

$$\dot{\theta} r^2 = \dot{\theta}_0 r_0^2 = r_0 v_0 = \text{ const.} \tag{A.109}$$

Le système hamiltonien (1.92) possède deux intégrales premières $H = E = \text{const.}$ (énergie) et $p_\theta = m r_0 v_0 = k = \text{const.}$ (constante des aires); il est donc intégrable. (A.108) s'écrit encore, en tenant compte de (A.109) :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{M}{r^2} - \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r^3} = 0 \tag{A.110}$$

Pour résoudre (A.110) on pose $r = 1/\rho$. (A.110) s'écrit alors :

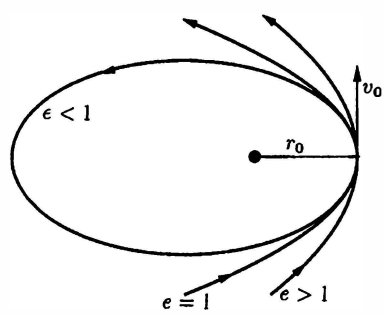


FIG. A.38 – *Problème de Képler*

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{M}{r_0^2 v_0^2}, \tag{A.111}$$

où $v_0 = r_0 \dot{\theta}_0$ est la vitesse initiale. La solution de (A.111) est :

$$\rho(\theta) = \frac{M}{r_0^2 v_0^2} + \frac{(r_0 v_0^2 - M)}{r_0^2 v_0^2} \cos\theta.$$

On en déduit :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \text{ avec } p = \frac{r_0^2 v_0^2}{M}, \quad e = \frac{r_0 v_0^2}{M} - 1.$$

L'orbite de m est une ellipse si $0 < e < 1$, une parabole si $e = 1$ et une hyperbole si $e > 1$ (Cf. fig A.38). La vitesse initiale qui donne l'orbite elliptique doit satisfaire les conditions $0 < e < 1$ ou $M < r_0 v_0^2 < 2M$ avec $r_0 = a(1-e)$, $v_0^2 = M(1+e)/a(1-e)$, où a est le demi grand-axe de l'ellipse. La vitesse initiale v_0 qui donne l'orbite parabolique (vitesse d'échappement) est $v_0^2 = 2M/r_0$ et la vitesse initiale qui donne l'orbite hyperbolique doit satisfaire la condition $v_0^2 > 2M/r_0$.

2) La surface balayée par le rayon vecteur r est :

$$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^t r^2\dot{\theta}dt = \frac{1}{2}r_0^2\dot{\theta}_0 t.$$

On a donc pour une période T :

$$\pi ab = \frac{1}{2}r_0^2\dot{\theta}_0 T, \quad a = r_0/(1-e), \quad b = a\sqrt{1-e^2}$$

(avec $p = a(1-e^2)$), d'où :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{M}}a^{\frac{3}{2}}.$$

On en déduit la vitesse angulaire moyenne :

$$\omega = \pm\sqrt{M}a^{-\frac{3}{2}}.$$

$\omega > 0$ (resp. $\omega < 0$) si le mouvement est direct (resp. rétrograde).

3) La vitesse initiale dans le repère synodique est $v_0' = v_0 - r_0\omega_0 = v_0 - r_0$ car la vitesse angulaire du repère synodique est $\omega_0 = 1$. Portant cette valeur dans (5.26), on obtient, pour $\mu = 0$, $M = 1$:

$$(v_0 - r_0)^2 = r_0^2 + \frac{2}{r_0} - C,$$

d'où :

$$C = -v_0^2 + 2v_0 r_0 + 2/r_0 = 2v_0 r_0 + \frac{1}{a} = 2\sqrt{a(1-e^2)} + \frac{1}{a}. \tag{A.112}$$

Exercice 5.2 : 1) Portant $r_{12} = r_{23} = r_{31} = r$ dans (5.123) on obtient, pour $k = 1$,

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{1}{r^3}[m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + (m_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] \tag{A.113}$$

et des équations analogues pour $k = 2$ et $k = 3$. D'après (5.124) on a :

$$m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + m_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = -(m_1 + m_2 + m_3)\mathbf{r}_1. \tag{A.114}$$

(A.113) s'écrit donc:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -(m_1 + m_2 + m_3)\frac{\mathbf{r}_1}{r^3} \tag{A.115}$$

et des équations analogues pour les 2 autres masses. Elevant (A.114) au carré on obtient:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1^2(m_1 + m_2 + m_3)^2 &= m_2^2 r_{12}^2 + 2m_2 m_3 r_{12} r_{13} \cos\frac{\pi}{3} + m_3^2 r_{13}^2 \\ &= r^2(m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2).\end{aligned}$$

On en déduit (5.125).

2) Inversement, supposons que les équations du mouvement soient de la forme (5.125). Nous avons donc $\mathbf{r}_k \wedge \ddot{\mathbf{r}}_k = 0$. Appliquons cette condition à (5.123), nous obtenons pour $k = 1$ par exemple:

$$\mathbf{r}_1 \wedge \left(\frac{m_2\mathbf{r}_2}{r_{12}^3} + \frac{m_3\mathbf{r}_3}{r_{13}^3}\right) = 0$$

ou, en tenant compte de (5.124),

$$m_2\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2\left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) = 0$$

et des équations analogues pour les 2 autres masses. On en déduit:

$$r_{12} = r_{23} = r_{31} \text{ ou } \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{r}_1 = 0.$$

Dans le premier cas, les trois masses forment un triangle équilatéral, dans le second cas, les trois masses sont alignées.

3) En comparant (5.123) et (5.125), on voit que les valeurs initiales x_1, x_2, x_3 vérifient les conditions suivantes:

$$Rx_1 = m_2\frac{x_1 - x_2}{x_{12}^3} + m_3\frac{x_1 - x_3}{x_{13}^3}, \tag{A.116}$$

$$Rx_2 = m_3\frac{x_2 - x_3}{x_{23}^3} + m_1\frac{x_2 - x_1}{x_{21}^3}, \tag{A.117}$$

$$Rx_3 = m_1\frac{x_3 - x_1}{x_{31}^3} + m_2\frac{x_3 - x_2}{x_{32}^3}, \tag{A.118}$$

où R est une constante qui dépend des conditions initiales. Retranchant (A.117) de (A.116) et (A.118) de (A.117) on obtient:

$$\begin{aligned}R &= m_1 + m_2 - \frac{m_3}{X^2} + \frac{m_3}{(1+X)^2}, \\ RX &= \frac{m_3}{X^2} - m_1 + \frac{m_1}{(1+X)^2} + \frac{m_2}{X^2},\end{aligned}$$

où on a tenu compte de ce que $x_1 - x_2 = 1$ et posé $x_2 - x_3 = X$ avec $X > 0$. Eliminant R, on obtient:

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)X^5 &+ (3m_1 + 2m_2)X^4 + (3m_1 + m_2)X^3 \\ &- (m_2 + 3m_3)X^2 - (2m_2 + 3m_3)X - (m_2 + m_3) = 0.\end{aligned} \tag{A.119}$$

Les coefficients de (A.119) changent de signe une fois seulement, on en déduit, par la règle de Descartes que (A.119) ne possède qu'une racine positive X.

Exercice 5.3 : 1) Les équations du mouvement du corps P_3 sont dans ce cas :

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \Omega_\xi, \quad \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \Omega_\eta, \quad \ddot{\zeta} = \Omega_\zeta, \tag{A.120}$$

avec :

$$\Omega = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu)$$

où l'on a posé :

$$r_1^2 = (\xi - \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad r_2^2 = (\xi - \mu + 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

L'intégrale de Jacobi est obtenue en multipliant les équations (A.120) respectivement par $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ et $\dot{\zeta}$, en additionnant les résultats et en intégrant par rapport au temps :

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = 2\Omega(\xi, \eta, \zeta) - C.$$

2) Si l'on restreint le mouvement du corps trois à l'axe des ζ, la solution sera de la forme :

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \zeta(t)$$

et les équations (A.120) s'écriront :

$$(a) \quad \Omega_\xi(0,0,\zeta) = 0, \quad (b) \quad \Omega_\eta(0,0,\zeta) = 0, \quad (c) \quad \Omega_\zeta(0,0,\zeta) = \ddot{\zeta}. \tag{A.121}$$

On déduit de (A.121a) : $r_1(0,0,\zeta) = r_2(0,0,\zeta)$, d'où : $\mu = 1/2$. (A.121c) s'écrit alors :

$$\ddot{\zeta} = -\frac{\zeta}{(\zeta^2 + \frac{1}{4})^{3/2}}$$

et l'intégrale de Jacobi donne :

$$\dot{\zeta}^2 = \frac{2}{(\zeta^2 + 1/4)^{1/2}} - \bar{C}, \quad \bar{C} = C - \frac{1}{4}. \tag{A.122}$$

Par deux changements de variables successifs :

$$r = (\zeta^2 + 1/4)^{1/2}, \quad u = \frac{1}{2r},$$

on ramène l'intégration de (A.122) à une quadrature :

$$\int_1^u \frac{du}{4u^2[(u-c)(1-u^2)]^{1/2}} = t, \quad c = \frac{\bar{C}}{4}. \tag{A.123}$$

Par le changement de variables :

$$v^2 = \frac{1-u}{1-c}, \quad k^2 = \frac{1-c}{2},$$

l'intégrale de (A.123) peut être ramenée à une intégrale elliptique:

$$\int_1^v \frac{dv}{(1-2k^2v^2)^2[(1-v^2)(1-k^2v^2)]^{1/2}} = 2^{3/2}t. \tag{A.124}$$

Exercice 5.4 : Le problème a quatre ellipses d'excentricité e:

- les mouvements de P_1 et P_2 par rapport à P_2 et P_1 respectivement sont des ellipses de demi grand axe a et la distance P_1P_2 est:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

- les mouvement de P_1 et P_2 par rapport à leur centre de gravité G sont des ellipses de demi grand axe a_1 et a_2 respectivement avec:

$$|GP_1| = \frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad |GP_2| = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad \text{avec } a_1 = \mu a, \quad a_2 = (1-\mu)a.$$

1) Soient, dans un système de coordonnées fixe Gxy, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ $P_3 = (x, y)$, les équations du mouvement de P_3 s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -gm_1\frac{x-x_1}{r_1^3} - gm_2\frac{x-x_2}{r_2^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -gm_1\frac{x-y_1}{r_1^3} - gm_2\frac{x-y_2}{r_2^3} \end{aligned} \tag{A.125}$$

avec $m_2 = \mu$, $m_1 = 1-\mu$ et

$$r_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2, \quad r_2^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2.$$

2) (A.125) s'écrit encore, en posant $z = x + iy$:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -gm_1\frac{z-z_1}{r_1^3} - gm_2\frac{z-z_2}{r_2^3} \tag{A.126}$$

avec $r_1 = |z-z_1|$, $r_2 = |z-z_2|$. Dans le système de coordonnées tournant $G\xi\eta$, défini par (5.127), (A.126) s'écrit:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2i\frac{d\theta}{dt}\frac{d\zeta}{dt} = -gm_1\frac{\zeta-\zeta_1}{r_1^2} - gm_2\frac{\zeta-\zeta_2}{r_2^2} + \zeta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - i\zeta\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{A.127}$$

avec:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{a\mu(1-e^2)}{1+e\cos\theta}, \quad \zeta_2 = \frac{a(1-\mu)(1-e^2)}{1+e\cos\theta}, \\ r_1 &= |\zeta-\zeta_1|, \quad r_2 = |\zeta-\zeta_2|. \end{aligned}$$

3) On déduit de (5.128):

$$\bar{\zeta} = \frac{\zeta(1+e\cos\theta)}{a(1-e^2)}.$$

(A.127) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\bar{\zeta}}{d\theta^2} + 2i\frac{d\bar{\zeta}}{d\theta} = \text{grad}_{\bar{\zeta}}\phi(\bar{\zeta}), \tag{A.128}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{\xi}}{d\theta^2} - 2\frac{d\bar{\eta}}{d\theta} &= \frac{\partial\phi}{\partial\bar{\xi}}, \\ \frac{d^2\bar{\eta}}{d\theta^2} + 2\frac{d\bar{\xi}}{d\theta} &= \frac{\partial\phi}{\partial\bar{\eta}}, \end{aligned}$$

avec :

$$\phi(\bar{\zeta}) = \frac{\Omega(\bar{\zeta})}{1 + e\cos\theta)}$$

et

$$\Omega(\bar{\zeta}) = \frac{1}{2}(\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\frac{1}{2}\mu(1-\mu).$$

Exercice 5.5 :

1)

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{-2m_1}{x_1^2} - \frac{8m_3x_1}{(x_1^2+4x_2^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{-8(2m_1+m_3)x_2}{(x_1^2+4x_2^2)^{3/2}}. \tag{A.129}$$

2)

$$H(x_1,x_2,p_1,p_2) = \frac{p_1^2}{m_1} + \frac{(2m_1+m_3)p_2^2}{4m_1m_3} - \frac{m_1^2}{x_1} - \frac{4m_1m_3}{(x_1^2+4x_2^2)^{1/2}}.$$

Si $m_3 = 0$, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{-2m_1}{x_1^2}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{-16m_1x_2}{(x_1^2+4x_2^2)^{3/2}}, \tag{A.130}$$

et la relation d'énergie s'écrit :

$$\frac{m_1}{4}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 - \frac{m_1^2}{x_1} = h. \tag{A.131}$$

On définit une nouvelle variable de temps s par $dt = x_1 ds$ [34]. L'équation (A.131) s'écrit alors :

$$ds = \frac{dx}{2\sqrt{x_1}\sqrt{m_1 + hx_1/m_1}}$$

d'où :

$$s = \sqrt{\frac{m_1}{h}}\,\text{arcsinh}\left(\frac{\sqrt{hx_1}}{m_1}\right) \text{ ou } x_1 = \frac{m_1^2}{2h}\left[\cosh\left(2\sqrt{\frac{h}{m_1}}s\right) - 1\right]. \tag{A.132}$$

On en déduit :

$$t = \frac{m_1^2}{2h}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_1}{h}}\sinh\left(2\sqrt{\frac{h}{m_1}}s\right) - s\right] \tag{A.133}$$

où l'on a choisit $x_1(0) = t(0) = 0$. (A.130) se réduit alors à :

$$\frac{1}{x_1}\frac{1}{ds}\left(\frac{1}{x_1}\frac{dx_2}{ds}\right) = \frac{-16m_1x_2}{(x_1^2 + 4x_2^2)^{3/2}}. \tag{A.134}$$

avec $x_1(s)$ donné par (A.132).

A.6 Programmes

Programme A.1

```
In[1]:=
    lotka[s_] :=
      Module[{system, x, y, t, eq1, eq2},
        eq1 = x'[t] == 2 x[t] - x[t] y[t];
        eq2 = y'[t] == -3 y[t] + x[t] y[t];
        system =
          NDSolve[
            {eq1, eq2, x[0] == 3s , y[0] == 2s},
            {x[t], y[t]}, {t, 0, 4}];
        ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. system,
           {t, 0, 4}, Compiled -> False,
           PlotRange -> {{0, 13}, {0, 13}},
           DisplayFunction -> Identity]
                  ]
In[2]:=
    graphs = Table[lotka[t], {t, 1/8, 7/8, 3/40}]
In[3]:=
    Show[graphs, DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

Les résultats sont présentés sur la figure A.1.

Programme A.2

```
PROGRAM Bifurcation;
USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,i,j,l,n,Ni,tx,ty : integer;
    p,q,hx,hy,x,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,xx,yy : real ;
    MaxX, MaxY  : word;
    fs:text;
Function f (x:real) : real;
    BEGIN
      f := -x*x*x+(2/3)*x+q ;
    END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
      Assign(fs,'cub.dat'); rewrite(fs);
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
```

```
Initialize;
   Xmin:=0;   Xmax:=1.25;
(*   Xmin:=-1.25;   Xmax:=0; *)
   Ymin:=-4;   Ymax:=4.0;
      a0:=MaxX;b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0);   (* axe des x *)
   Ni:=300; n:=200;
   hx:=(Xmax - Xmin)/MaxX ; hy:=(Ymax - Ymin)/MaxY;
   q:=Xmin;   For i:=0 to MaxX do
   Begin
     x:=0.2;
     For j:=1 to Ni do x:=f(x);
     For j:=1 to n do
       Begin
         x:=f(x);   l:=round(x/hy);
         Putpixel(i,b0-l,4);
          xx := i*hx+Xmin; yy := x;
          writeln(fs,xx,' ',yy);
       End;
     q:=q+hx;
   End;
 OutTextXY(50,10, '  f(x)=-x*x*x+(2/3)*x+q : ');
  readln;  Close(fs);  CloseGraph;    END.
```

Programme A.3

```
PROGRAM Henon_Heiles1;
{Application de Henon-Heiles,
   x1:=x+a*y*(1-y*y) ; y1:=y-a*x1*(1-x1*x1) ;
Astron. J. t. 69, p.73, 1964 }
USES dos,crt,graph;
var  a0,b0,i,i1,j,k,l,iter,Ux,Uy : integer;
     Xmin,Xmax,Ymin,Ymax,a,t,x0,y0,x,y,x1,y1 : real ;
     MaxX, MaxY  : word;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=-1.5;   Xmax:=1.5;  Ymin:=-1.5;   Ymax:=1.5;
      a0 := MaxX div 2;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
        (* Unit\'es des axes : *)
   Ux := round((maxX - 20)/(Xmax - Xmin));
   Uy := round((maxY - 20)/(Ymax - Ymin));
a:=1.6; t:=sqrt(1-1/a); x0:=t-0.65 ; y0:=0.0 ; iter:= 500 ;
For i1:=1 to 10 do
Begin
   x:=x0 ; y:=y0 ;
For i:=1 to iter do
Begin
   x1:=x+a*y*(1-y*y) ; y1:=y-a*x1*(1-x1*x1) ;
   x:=x1 ; y:=y1 ;
```

```
    k:=round(Ux*x); l:=round(Uy*y);
    Putpixel(a0+k,b0-l,4);
End;
x0:=x0+0.1 ; y0:=0.0 ;
End;
 OutTextXY(100,10, ' Application de Henon-Heiles ');
  readln; CloseGraph; END.
```

Programme A.4 PROGRAM Henon_Heiles2;

```
USES dos,crt,graph;
var a0,b0,i,j,k,l,Ni,Ux,Uy : integer;
    a,r,s,H11,H12,H21,H22,lambda1,lambda2,x,y,x1,y1 : real ;
    MaxX, MaxY  : word; Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
Procedure Directe;
var u,v,eps : real;    i1 : integer;
Begin
 eps:=0.00001  ; u:=0.01 ;
For i1:=1 to 1000 do
 Begin
   u:=u-eps ; v:=u*(lambda2 -H11)/H12 ;
   x:=r+u ;   y:=v-s ;
   For i:=1 to 20 do
   Begin
     x1:=x+a*(y-y*y*y) ;  y1:=y-a*(x1-x1*x1*x1);
     x:=x1 ; y:=y1 ;
     k:=round(Ux*x); l:=round(Uy*y); Putpixel(a0+k,b0-l,2);
   End; End; End;
Procedure Inverse;
var u,v,eps : real;  i1,i2 : integer;
Begin
eps:=0.00001 ;  u:=0.002 ;
For i1:=1 to 500 do
Begin
   u:=u-eps ; v:=u*(lambda1 -H11)/H12 ;
   x:=s+u ;   y:=v-r ;
For i:=1 to 15 do
Begin
   y1:=y+a*(x-x*x*x); x1:=x-a*(y1-y1*y1*y1);
   x:=x1 ; y:=y1 ;
   k:=round(Ux*x); l:=round(Uy*y); Putpixel(a0+k,b0-l,4);
End; End; End;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=0.0;   Xmax:=1;   Ymin:=-1;   Ymax:=0;
      a0 := 0;  b0 := 0  ; (* Origine *)
        (* Unit\'es des axes : *)
   Ux := round(maxX /(Xmax - Xmin));
   Uy := round(maxY /(Ymax - Ymin));
```

```
a:=1.6 ; s:=0.28450670 ; r:=0.70287083 ;
(* Matrice H : *)
H11:=12.637776291 ; H12:=7.4836577347 ;
H21:=30.95590970  ; H22:=18.410156004 ;
lambda1:=31.01569055 ; lambda2:=1/lambda1 ;
(* Valeurs propres de H  *)
 Directe  ; Inverse ;
 OutTextXY(50,80, ' Application de Henon-Heiles ');
  readln;  CloseGraph; END.
```

Programme A.5

```
program Methode_de_Newton ;
(* Methode de Newton : f(z)=2z/3 -1/(3z*z)   *)
uses
  Crt, Dos, Graph;  Const eps = 0.1 ;
PROCEDURE Newton;
(* Pour quitter le graphe tapez ENTER *)
  const N=50 ;
var
   k,i,j,d : integer;
   x,y,x1,y1,r3,r4,hx,hy : real ;
   MaxX, MaxY  : word;
   Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
   begin
   Xmin:=-2.0; Xmax:=2.0; Ymin:=-1.5; Ymax:=1.5;
   hx:=(Xmax-Xmin)/maxX; hy:=(Ymax-Ymin)/maxY ;
   r3:=sqrt(3);
FOR i:=0 TO maxX DO
FOR j:=0 TO maxY DO
   BEGIN
      x:=Xmin+hx*i ; y:=Ymin+hy*j ;
         k:=0 ;  d:=0 ;
         REPEAT
            k:=k+1 ;
            r4:=x*x+y*y ; r4:=r4*r4 ;
            If r4 < 1.0E-10 then d:=1 else
           Begin
            x1:=2*x/3+(x*x-y*y)/r4/3 ;
            y1:=2*y/3-2*x*y/r4/3 ;
            x:=x1 ; y:=y1 ;
 (* Test :      *)
    If ((x-1)*(x-1)+y*y) < eps then d:=1 ;
    If ((x+0.5)*(x+0.5)+(y-r3*0.5)*(y-r3*0.5)) < eps then
       d:=2 ;
    If ((x+0.5)*(x+0.5)+(y+r3*0.5)*(y+r3*0.5)) < eps then
       d:=4 ;   End;  UNTIL (d>0) OR (k=N) ;
         Case d of
          1: PUTPIXEL(i,maxY-j,1);  (* Colorier en Bleu *)
          2: PUTPIXEL(i,maxY-j,2);  (* Colorier en Vert *)
          4: PUTPIXEL(i,maxY-j,4);  (* Colorier en Rouge *)
```

```
        End;
   END ;
end; (* Newton *)

begin { program body }
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
NEWTON;
OutTextXY(50,10, ' Methode de Newton pour : z*z*z - 1 = 0 ');
  readln;
  CloseGraph;
end.
```

Les résultats du programme sont présentés sur la figure A.22.

Programme A.6 *Programme écrit en Turbo Pascal.*

```
PROGRAM Bifurcation;
{Diagramme de bifurcation pour l'application tente }
USES dos,crt,graph;
var    a0,b0,i,j,l,n,Ni,Ux,Uy,Ux1,Uy1,tx,ty : integer;
    a,da,x : real ;
  maxX,maxY : word;
  Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=0.5;   Xmax:=0.75;
   Ymin:=0.0;   Ymax:=1.0;
      a0 := 50;  b0 := MaxY - 50 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0);   (* axe des x *)
      line (a0,0,a0,maxY);   (* axe des y  *)
        (* Unites des axes : *)
   Ux := round((maxX-a0)/(Xmax - Xmin));
   Uy := round(b0/(Ymax - Ymin));
   Ni:=100; n:=200;
   da:=(Xmax - Xmin)/(MaxX - a0);
   a:=Xmin;
   For i:=a0 to MaxX do
   Begin
     x:=0.5;
     For j:=1 to Ni do
      If x<0.5 then x:=2*a*x else x:=2*a*(1-x);
     For j:=1 to n do
       Begin
      If x<0.5 then x:=2*a*x else x:=2*a*(1-x);
         l:=round(Uy*x);
         Putpixel(i,b0-l,4);
       End;
     a:=a+da;
```

```
   End;
 OutTextXY(100,10, ' L''application tente : ');
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Le résultat est présenté sur la figure A.29.

Programme A.7 *Programme écrit en Turbo Pascal.*

```
PROGRAM vonkoch;
USES dos,crt,graph;
var
  x,y:real;
      choix : char;
procedure ligne (a,b,t,h,h0:real) ;
var
    a1,b1,x1,y1 : integer ;
BEGIN
If h<=h0 then
Begin
  x:=a+h*cos(t);
  y:=b+h*sin(t);
  a1:=trunc(a); b1:=trunc(b); x1:=trunc(x); y1:=trunc(y);
  line(a1,b1,x1,y1);
End else
Begin
  ligne(a,b,t,h/3,h0);
  ligne(x,y,t-Pi/3,h/3,h0);
  ligne(x,y,t+Pi/3,h/3,h0);
  ligne(x,y,t,h/3,h0);
End;
END;
PROCEDURE ETOILE_DE_VONKOCH;
BEGIN
   ligne(100,80,0.0,200,5);
   ligne(x,y,2*pi/3,200,5);
   ligne(x,y,-2*pi/3,200,5);
OutTextXY(130,300, ' Etoile de von Koch  ');
END;
PROCEDURE COURBE_DE_VONKOCH;
BEGIN
   ligne(100,80,0.0,200,5);
OutTextXY(130,300, ' Courbe de von Koch  ');
END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
ClrScr ;
(* Etoile de von Koch, taper E, Courbe de von Koch, taper C *)
```

```
writeln('Etoile de von Koch (E) ou Courbe de von Koch (C) ?');
choix := readkey;
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
case choix of
     'e','E' : ETOILE_DE_VONKOCH ;
     'c','C' : COURBE_DE_VONKOCH ;
   end;
  readln;
  CloseGraph;
END.
```

Le résultat est présenté sur la figure A.30.

Programme A.8

```
PROGRAM Henon1;
{ exposants de Lyapunov de l'application de Henon
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;
en fonction de n
}
USES dos,crt;
const N=2;
Type vecteur = array[1..N] of real ;
     Matrice = array[1..N,1..N] of real ;
var i : integer;  k, iter : longint ;
    a,b,x,y,x1,y1 : real ;
    v1,v2,w1,w2,lambda,lambd1,Norm : vecteur ;
    J : Matrice ;
  fs:text;
Begin
      Assign(fs,'henon1.dat');
      rewrite(fs);
a:=1.4 ; b:=0.3 ;
(* Valeurs initiales de l'application de Henon : *)
x:=0.0 ; y:=0.0 ;
(* Nombre d'iterations : *)
iter:=0 ;
(* Composantes initiales des vecteurs v1 et v2 : *)
v1[1]:=1.0 ; v1[2]:=0.0 ; v2[1]:=0.0 ; v2[2]:=1.0 ;
For i:=1 to N do lambda[i]:=0.0  ;
(* Matrice jacobienne : *)
J[1,1]:=-2*a*x ; J[1,2]:=1.0 ; J[2,1]:=b ; J[2,2]:=0.0 ;
For k:=1 to 10000 do
Begin  iter := iter+1;
   (*  v1 et v2 transforms: *)
   w1[1]:=v1[1]*J[1,1] + v1[2]*J[1,2] ;
   w1[2]:=v1[1]*J[2,1] + v1[2]*J[2,2] ;
   w2[1]:=v2[1]*J[1,1] + v2[2]*J[1,2] ;
   w2[2]:=v2[1]*J[2,1] + v2[2]*J[2,2] ;
```

```
    (* Normalisation de w1 : *)
    Norm[1]:=sqrt(w1[1]*w1[1]+w1[2]*w1[2]) ;
    For i:=1 to N do v1[i]:=w1[i]/Norm[1] ;
    (* Orthogonalisation de Gram-Schmidt : *)
    For i:=1 to N do
    v2[i]:=w2[i] - (w2[1]*v1[1]+w2[2]*v1[2])*v1[i] ;
    Norm[2]:=sqrt(v2[1]*v2[1]+v2[2]*v2[2]) ;
    For i:=1 to N do v2[i]:=v2[i]/Norm[2] ;
    For i:=1 to N do lambda[i]:=lambda[i]+Ln(Norm[i])  ;
    x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;
    x:=x1 ; y:=y1 ; J[1,1]:=-2*a*x ;
    For i:=1 to N do lambd1[i]:=lambda[i]/Ln(2)/iter  ;
           writeln(fs,iter,' ',lambd1[1],' ',lambda1[2]);
End;
For i:=1 to N do writeln('lambda[',i,'] = ',lambd1[i]:6:3) ;
     Close(fs);
End.
```

Les résultats sont peésentés sur la figure A.31 (haut).

Programme A.9

```
PROGRAM Henon2;
{ exposants de Lyapunov de l'application de Henon
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=0.3*x ;
en fonction de a
}

USES dos,crt;
const N=2;
Type vecteur = array[1..N] of real ;
     Matrice = array[1..N,1..N] of real ;
var i,ii,N1 : integer;
    k, iter : longint ;
    a,b,da,x,y,x1,y1 : real ;
    v1,v2,w1,w2,lambda,Norm : vecteur ;
    J : Matrice ;
  fs:text;
Begin
      Assign(fs,'henon2.dat');
      rewrite(fs);
a:=0 ; b:=0.3 ;  N1:=2000; da:=1.41/N1 ;(* 0<=a<=1.41 *)
For ii:=1 to N1 do
Begin
(* Valeurs initiales de l'application de Henon : *)
x:=0.0 ; y:=0.0 ;
(* Nombre d'iterations : *)
iter:=10000 ;
(* Composantes initiales des vecteurs v1 et v2 : *)
v1[1]:=1.0 ; v1[2]:=0.0 ; v2[1]:=0.0 ; v2[2]:=1.0 ;
For i:=1 to N do lambda[i]:=0.0  ;
```

```
(* Matrice jacobienne : *)
J[1,1]:=-2*a*x ; J[1,2]:=1.0 ; J[2,1]:=b ; J[2,2]:=0.0 ;
For k:=1 to iter do
Begin
   (*  v1 et v2 transformes: *)
   w1[1]:=v1[1]*J[1,1] + v1[2]*J[1,2] ;
   w1[2]:=v1[1]*J[2,1] + v1[2]*J[2,2] ;
   w2[1]:=v2[1]*J[1,1] + v2[2]*J[1,2] ;
   w2[2]:=v2[1]*J[2,1] + v2[2]*J[2,2] ;
   (* Normalisation de w1 : *)
   Norm[1]:=sqrt(w1[1]*w1[1]+w1[2]*w1[2]) ;
   For i:=1 to N do v1[i]:=w1[i]/Norm[1] ;
   (* Orthogonalisation de Gram-Schmidt : *)
   For i:=1 to N do
   v2[i]:=w2[i] - (w2[1]*v1[1]+w2[2]*v1[2])*v1[i] ;
   Norm[2]:=sqrt(v2[1]*v2[1]+v2[2]*v2[2]) ;
   For i:=1 to N do v2[i]:=v2[i]/Norm[2] ;
   For i:=1 to N do lambda[i]:=lambda[i]+Ln(Norm[i])  ;
   x1:=1-a*x*x+y ; y1:=b*x ;
   x:=x1 ; y:=y1 ; J[1,1]:=-2*a*x ;
End;
For i:=1 to N do lambda[i]:=lambda[i]/Ln(2)/iter  ;
For i:=1 to N do
          writeln(fs,a,' ',lambda[1]);
a:=a+da;
end;
     Close(fs);
End.
```

Les résultats sont présentés sur la figure A.31 (bas).

Programme A.10

```
PROGRAM Bifurcation;
(* Application standard  *)
USES dos,crt,graph;
var a0,b0,i,j,l,n,Ni : integer;
    a,K,hx,hy,x : real ;
    fs:text;
    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
Function f (x:real) : real;
    BEGIN
    f := x+a-(K/2/Pi)*sin (2*Pi*x)   ;
    END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
      Assign(fs,'bifur.dat');
      rewrite(fs);
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=-0.5;   Xmax:=0.5;
```

```
   Ymin:=-0.5;   Ymax:=0.5;
      a0 := maxX div 2;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
      line (0,b0,maxX,b0);   (* axe des x *)
      line (a0,0,a0,maxY);   (* axe des y  *)
   Ni:=300; n:=200;
   hx:=(Xmax - Xmin)/MaxX ;
   hy:=(Ymax - Ymin)/MaxY;
   K:=3 ; a:=Xmin;
   For i:=1 to MaxX do
   Begin
     x:=0.2;
     For j:=1 to Ni do
     begin x:=f(x);
     if abs(x)>0.5 then x:=x-abs(x)/x; end;
     For j:=1 to n do
       Begin
         x:=f(x);
         if abs(x)>0.5 then x:=x-abs(x)/x;
         l:=round(x/hy);
         Putpixel(i,b0-l,4);
          xx := i*hx+Xmin; yy := x;
       (*   writeln(fs,xx,' ',yy);  *)
       End;
     a:=a+hx;
   End;
 OutTextXY(50,10, ' f(x)=x+a-(K/2/Pi)sin(2Pi*x) : ');
  readln;
  Close(fs);
  CloseGraph;
END.
```

Les résultats sont peésentés sur la figure A.33.

Programme A.11

```
PROGRAM Lyapunov;
{ L'exposant de Lyapunov de l'application standard
  f(x)=x+a-(K/2/Pi)sin(2Pi*x)
pour K=2.7 et K=3 et -0.5 <= a <= 0.5 }
USES dos,crt,graph;
var a0,b0,i,j,l,n,Ni,Ux,Uy : integer;
    lyapu,K,a,da,x : real ;
    MaxX, MaxY  : word;
    Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
Function f (x:real) : real;
    BEGIN  f:=x+a-(K/2/Pi)*sin(2*Pi*x); END;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
   Xmin:=-0.5;   Xmax:=0.5; Ymin:=-8.0;   Ymax:=2.0;
      a0 := MaxX div 2;  b0 := MaxY div 10 ; (* Origine *)
```

```
      line (0,b0,maxX,b0);   (* axe des x *)
        (* Unites des axes : *)
   Ux := round(maxX/(Xmax - Xmin));
   Uy : = round(MaxY/(Ymax - Ymin));
   K:=3 ; n:=500;   a:=Xmin;
   da:=(Xmax - Xmin)/MaxX;
   (* Calcul du point initial de la courbe : *)
     x:=0.5; lyapu:=0.0;
     For j:=1 to n do
     Begin
      x:=f(x); lyapu := lyapu+Ln(abs(1-K*cos(2*Pi*x))) ;
     End;
         lyapu := lyapu /n/Ln(2);
         l:=round(Uy*lyapu);  Moveto(0,b0-l);
   For i:=1 to MaxX do
   Begin
     x:=0.5; lyapu:=0.0;
     For j:=1 to n do
       Begin
       x:=f(x);  lyapu := lyapu+Ln(abs(1-K*cos(2*Pi*x))) ;
       End;
         lyapu := lyapu /n;
         l:=round(Uy*lyapu);  Lineto(i,b0-l);
     a:=a+da;
   End;
 OutTextXY(150,300, ' Exposant de Lyapunov : ');
  readln; CloseGraph;
END.
```

Les résultats sont présentés sur la figure A.34.

Programme A.12

```
PROGRAM Lauwerier;
{Application de Lauwerier :
   x1:=bx(1-2y)+y ; y1:=4y(1-y) ;
}
USES dos,crt,graph;
var a0,b0,j,k,l,Ni,Ux,Uy : integer;
    i,iter : longint;
    b,x,y,x1,y1 : real ;
   MaxX, MaxY  : word;
   Xmin,Xmax,Ymin,Ymax : real ;
BEGIN    (* Programme principal  *)
{Prendre la procedure Initialize du  programme 1.1}
Initialize;
Xmin:=-1.5;   Xmax:=1.5; Ymin:=-1.5;   Ymax:=1.5;
   a0 := MaxX div 2;  b0 := MaxY div 2 ; (* Origine *)
   line (0,b0,maxX,b0);  line (a0,0,a0,maxY); (* axes  *)
        (* Unites des axes : *)
   Ux := round((maxX - 20)/(Xmax - Xmin));
```

```
   Uy := round((maxY - 20)/(Ymax - Ymin));
b:=1/3 ;
(* Valeurs initiales : *)x:=0.0 ; y:=0.8 ;
(* Nombre d'iterations : *) iter:=5000 ;
For i:=1 to iter do
Begin
   x1:=b*x*(1-2*y)+y ; y1:=4*y*(1-y); x:=x1 ; y:=y1 ;
   k:=round(Ux*x);   l:=round(Uy*y);
   Putpixel(a0+k,b0-l,4);
End;
 OutTextXY(100,10, ' Application de Lauwerier ');
  readln;  CloseGraph;
END.
```

Programme A.13

```
C Equation de Ginsburg-Landau par developpement de Fourier
C Calcul de a_0,b_1,c_1,b_2,c_2,b_3,c_3
C Bibliotheque NAG
C
C Usage:
C    CALL D02PCF(F,TWANT,TGOT,YGOT,YPGOT,YMAX,WORK,IFAIL)
C
C
      INTEGER    N,NM,LENWRK, METHOD,IFAIL,NC
      PARAMETER  (N=3,NM=2*(N+1),
     $                    LENWRK=32*NM,METHOD=3)
C            SPECIFICATIONS FOR LOCAL VARIABLES
      REAL*8   TOL,TEND,TGOT,TWANT,TSTART,R,NU,MU,BETA,PI
      REAL*8   THRES(0:NM-1), WORK(LENWRK), YGOT(0:NM-1),
     $         YMAX(0:NM-1),YPGOT(0:NM-1),YSTART(0:NM-1)
      LOGICAL   ERRASS
      CHARACTER*1  TASK

C            SPECIFICATIONS FOR SUBROUTINES
      EXTERNAL   D02PCF, D02PVF, mod1, F
C
      COMMON R,NU,MU,PI,BETA,NC
C
          open(100,file='indice0')
          open(101,file='indice1')
          open(102,file='indice2')
          open(103,file='indice3')
C
C     Set initial conditions and input for D02PVF
      Pi     = 4*atan(1.)
      beta =0.02
      R=43.74
      nu = 4.
```

```
      mu = -4.
      do i=0,nm-1,1
         ystart(i)=0
      end do
      ystart(0)=sqrt(R)
      ystart(1)=beta / 2
      tol  = 1.0E-3
      do i=0,nm-1,1
         thres(i)=1.0E-5
      end do
      task = 'U'
      errass = .false.
      hstart =0.0
      ifail= 0
C     Calcul des indices pour la somme triple :
      call mod1
      do i=0,nm-1,1
         ygot(i)=ystart(i)
         ymax(i)=1.0E6
      end do
      tgot = 0
C     Calcul des indices pour la somme triple :
c      call mod1
C
C Resolution du systeme
      iter1 =100
      do 60 j1=1,iter1
C
c Nombre d'iterations :
      iter =100
c pas de temps :
      pas =0.001
      tstart = tgot
      tend =tstart+iter*pas


      call D02PVF(NM,TSTART,YSTART,TEND,TOL,THRES,METHOD,
     $            TASK,ERRASS,HSTART,WORK,LENWRK,IFAIL)

c      WRITE(*,*) 'On appelle la seconde procedure'
      do 40 j=1,iter
      twant = tstart+j*pas
      call D02PCF(F,TWANT,TGOT,YGOT,YPGOT,YMAX,WORK,IFAIL)
      WRITE (100,1000) YGOT(0),YGOT(n+1)
      WRITE (101,1000) YGOT(1),YGOT(n+2)
      WRITE (102,1000) YGOT(2),YGOT(n+3)
      WRITE (103,1000) YGOT(3),YGOT(n+4)
c      WRITE (*,1000) YGOT(1),YGOT(n+2)
   40 continue
      do i=0,nm-1,1
```

```
         ystart(i) =ygot(i)
       end do
    60 continue
  1000 FORMAT (2F18.5)
       STOP
       END

C  Procedure de calcul des indices :
C
       SUBROUTINE MOD1
C
C
       integer n,kl,l,k,m,nc
       parameter (n=3)
       real*8 R,nu,mu,Pi,beta
       COMMON R,NU,MU,PI,BETA,NC
C
       open (10,file='indices.dat')
C  kl=k-l+m
       l=0
       k=0
       m=0
       nc=0
       do kl=0,n,1
           do l=-n,n,1
           do m=-n,n,1
           do k=-n,n,1
             nn=k-l+m
             if (nn.eq.kl) then
                 nc=nc+1
                 write(10,*)kl,k,l,m
             end if
           end do
           end do
           end do
       end do
       rewind(10)
       close(10)
       RETURN
       END


       SUBROUTINE F (T, Y, YD)

       INTEGER    N,NM,nc
       PARAMETER  (N=3,NM=2*(N+1))
       REAL*8 T,R,NU,MU,PI,BETA,Y(0:nm-1),YD(0:nm-1),a(0:n),b(0:n)
       COMMON R,NU,MU,PI,BETA,NC
C
       open (10,file='indices.dat')
```

```
       do nd=0,n,1
         a(nd)=R-(2*pi*nd)**2
         b(nd)=-nu*(2*pi*nd)**2
       end do
C   On impose W_0=reel :
       y(n+1)=0
C  Calcul de la somme triple
       do 20 nd = 0,n
       yd(nd)=0
       yd(nd+n+1)=0
       do j=1,nc,1
       read(10,*) kl,k,l,m
       l=abs(l)
       k=abs(k)
       m=abs(m)
       if(kl.eq.nd) then
        yd(nd) = yd(nd) + ( y(k)*y(l) + y(k+n+1)*y(l+n+1) ) *
     c( y(m)-mu*y(m+n+1) )- (y(l)*y(k+n+1)-y(k)*y(l+n+1)) *
     c(mu*y(m)+y(m+n+1))
         yd(nd+n+1) = yd(nd+n+1)+ (y(k)*y(l)+y(k+n+1)*y(l+n+1))*
     c(mu*y(m)+y(m+n+1)) + (y(l)*y(k+n+1)-y(k)*y(l+n+1)) *
     c(y(m)-mu*y(m+n+1))
                end if
       end do
       rewind(10)
   20 continue
C Calcul de thetapoint :
       tetap =-yd(n+1)/y(0)

C Calcul des derivees :
       do 30 nd = 0,n
       yd(nd)=-yd(nd)+a(nd)*y(nd)-b(nd)*y(nd+n+1)+tetap*y(nd+n+1)
       yd(nd+n+1)=-yd(nd+n+1)+b(nd)*y(nd)+a(nd)*y(nd+n+1)-tetap*y(nd)
   30 continue
       yd(n+1)=0
       close(10)
       RETURN
       END
C
```

Bibliographie

[1] M. L. Abell et P. Braselton, *Differential Equations with Mathematica*, Academic Press, London (1993).

[2] R. Abraham, *Foundation of Mechanics*, W. A. Benjamin, New York (1967).

[3] A. A. Andronov, E. A. Vitt et S. E. Khaiken, *Theory of Oscillators*, Pergamon Press, Oxford (1966).

[4] R. F. Arenstorf, Am. J. Math. **85**, 27 (1963).

[5] A. Arneodo P. H. Coullet, E. A. Spiegel et C. Tresser, *Physica* **14**D, 327 (1985).

[6] V. I. Arnold, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou(1980).

[7] V. I. Arnold et A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris (1967).

[8] D. K. Arrowsmith et C. M. Place, *An introduction to Dynamical Systems* , Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[9] G. L. Baker et J. P. Gollub, *Chaotic dynamics, an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[10] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, London (1993).

[11] J. H. Bartlett, *Celest. Mech.* **46**, 129 (1989).

[12] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer, New York (1991).

[13] P. Bergé, Y. Pomeau et Ch. Vidal, *L'ordre dans le chaos*, Hermann, Paris (1988).

[14] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems,* American Mathematical Society, New York (1927).

[15] R. I. Bogdanov, *Functional Anal. Appl.* **9**,144 (1975).

[16] C. Boldrighini et V. Franceschini, *Commun. Math. Phys.* **64**, 159 (1979).

[17] W. Boyce et R. C. Prima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, J. Wiley, New York (1992).

[18] B. Branner et J. H. Hubbard, *Acta Mathematica* **160**, 143 (1988) et **169**, 229 (1992).

[19] B. Branner, *A.M.S., Proc. Symp. Applied Math.*, **49**, 31 (1994).

[20] M. Braun, *Differential Equations and their Applications*, Springer, Berlin (1993).

[21] E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice Hall, Inc. Englewoods Cliffs, New Jersey (1970).

[22] Th. Bröcker, *Differentiable Germs and Catastrophes*, Cambridge University Press, Cambridge (1976).

[23] H. Brolin, *Arkiv Mat.* **6**, 103 (1965).

[24] K. Bui-Doan et H. Dang-Vu, *C. R. Acad. Sci. Paris, I* **305**, 485 (1987).

[25] J. C. Butcher, *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, Runge-Kutta and General Linear Methods*, J. Wiley, New York (1987).

[26] J. Carr, *Applications of Center Manifold Theory,* Springer, Berlin (1981).

[27] S. Castro, *Nonlinearity* **10**, 425 (1997).

[28] E. Chénier, H. Dang-Vu et C. Delcarte, dans *7th International Symposium on Computational Fluid Dynamics*, September 15-19, 1997, Beijing, ed. par F. G. Zhuang, International Academic Publishers, Beijing, 306 (1997).

[29] E. Chénier, C. Delcarte et G. Labrosse dans *16th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 5-10 July 1998, Arcachon (France), ed. par C. H. Bruneau, (1998).

[30] E. Chénier, C. Delcarte et G. Labrosse, *Physics Fluids*, **11** 527 (1999).

[31] S. N. Chow, C. Li et D. Wang, *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[32] P. Collet et J. P. Eckmann, *Iterated Maps on the Intervals as Dynamical Systems*, Birkhäuser, Boston (1980).

[33] G. Contopoulos, *Lecture Notes in Physics* **433**, 1 (1994).

[34] J. M. Cors et J. Llibre, *Nonlinearity* **9**, 1299 (1996).

[35] J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics* , MacMillan, New York (1962).

[36] H. Dang-Vu et C. Delcarte, *J. Comp. Phys.* **104**, 211 (1993).

[37] H. Dang-Vu et C. Delcarte, dans *Second International Colloquium on Numerical Analysis*, 13-17 August, 1993 (Plovdiv University, Bulgaria), ed. par D. Bainov and V. Covachev, VSP International Science Publishers, Utrecht (Pays-Bas), 63 (1994).

[38] H. Dang-Vu et C. Delcarte, dans *14th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 11-15 July 1994, Bangalore (India), ed. par S. M. Deshpande, S. S. Desai et R. Narasimha, Springer, Berlin, 385 (1995).

[39] H. Dang-Vu et C. Delcarte, *Appl. Math. Comput.* **73**, 99 (1995).

[40] H. Dang-Vu et C. Delcarte, *J. Tech. Phys.* **37**, 317 (1996).

[41] H. Dang-Vu et C. Delcarte, *Quart. Appl. Math.* , à paraître, (2000).

[42] M. Demazure, *Catastrophes et bifurcations*, Ellipses, Paris (1989).

[43] R. Devaney, *Inventiones math.* **60**, 249 (1980).

[44] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Redwood City (1989).

[45] R. Devaney, *A.M.S., Proc. Symp. Applied Math.*, **49**, 23 (1994).

[46] A. Douady et J. H. Hubbard, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **294I**, 123 (1982).

[47] A. Douady et J. H. Hubbard, *Ann. Ecole Norm. Sup.* , **18**, 287 (1985).

[48] P. G. Drazin, *Nonlinear systems*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[49] R. H. Enns et G. C. McGuire, *Nonlinear Physics with Maple*, Birkhäuser, Boston (1997).

[50] K. Falconer, *Fractal geometry*, J. Wiley, New York (1990).

[51] K. Falconer, *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[52] P. Fatou, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **143**, 546 (1906).

[53] P. Fatou, *Bull. Soc. Math. France*, **47**, 161 (1919), **48**, 33 (1920).

[54] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **19**, 158 (1978).

[55] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* **21**, 669 (1979).

[56] M. J. Feigenbaum, *Physica* **7**D, 16 (1983).

[57] P. M. Fitzpatrick, *Principles of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York (1970).

[58] A. P. Fordy, *Physica D* **52**, 204 (1991).

[59] V. Franceschini et L. Russo, *J. Stat. Phys.* **25**, 757 (1981).

[60] A. M. Fraser et H. L. Swinney, *Phys. Rev.*. **33A**, 1134 (1986).

[61] J. Frøyland, *Introduction to chaos and coherence* , Institute of Physics Publishing, Bristol (1994).

[62] P. Gaspard, *Physica D* **62**, 94 (1993).

[63] P. Glendinning, *Stability, Instability and Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[64] L. R. Goldberg et J. Milnor, *Ann. Ecole Norm. Sup.* , **26**, 51 (1993).

[65] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (1980).

[66] P. Grassberger et I. Procaccia, *Physica* **9**D, 189 (1982).

[67] J. M. Greene, *J. Math. Phys.* **20**, 1183 (1979).

[68] J. A. Guckenheimer et P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York (1983).

[69] P. Hagedorn, *Non-linear Oscillations*, Clarendon Press, Oxford (1988).

[70] E. Hairer, S. P. Norsett et G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, Springer, Berlin (1987).

[71] J. Hale, *Ordinary Differential Equations*, J. Wiley, New York (1969).

[72] J. Hale et H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer, Berlin (1991).

[73] B. D. Hassard et Y. H. Wan, *J. Math. Anal. Appl.* **63**, 297 (1978).

[74] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff et Y. H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press, Cambridge (1981).

[75] M. Hayashi, *Nonlinear Studies* **4**, 143 (1997).

[76] M. Hénon, *Commun. Math. Phys.* **50**, 69 (1976).

[77] M. Hénon, *Ann. Astrophys.* **28**, 499 et 992 (1965).

[78] M. Hénon, *Bull. Astron.* **1**, 57 (1966).

[79] M. Hénon, *Quart. Appl. Math.* **27**, 291 (1969).

[80] M. Hénon, *Physica* **5**D, 412 (1982).

[81] M. Hénon et C. Heiles, *Astro. J.* **69**, 73 (1964).

[82] D. Hilbert, *Math. Ann.*, **38**, 157 (1891).

[83] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press, Oxford (1994).

[84] M. W. Hirsch et S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra,* Academic Press, New York (1974).

[85] A. V. Holden et M. A. Muhamad, dans *Chaos*, Ed. par A. V. Holden, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1986).

[86] P. Holmes, dans *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* **39**, ed. par R. L. Devaney et L. Keen, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 25 (1989).

[87] F. C. Hoppensteadt, *Analysis and Simulation of Chaotic Systems*, Springer, Berlin (1993).

[88] L. Hsu et L. Favretto, *J. Math. Anal. Appl.* **101**, 562 (1984).

[89] I. D. Hsu et N. D. Kazarinoff, *J. Math. Anal. Appl.* **55**, 61 (1976).

[90] I. D. Hsu et N. D. Kazarinoff, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **77A**, 163 (1977).

[91] A. Huang, L. Pivka et C. W. Wu, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **6**, 2175 (1996).

[92] J. H. Hubbard et B. H. West, *Differential Equations I, II*, Springer, Berlin (1990 et 1995).

[93] J. H. Hubbard, dans *Topological Methods in Modern Mathematics*, ed. par L. R. Goldberg et A. V. Phillips, Publish or Perrish, 467 (1993).

[94] M. Humi et W. Miller, *Second Course in Ordinary Differential Equations for Scientists and Engineers*, Springer, Berlin (1988).

[95] J. G. Iooss et D. D. Joseph, *Elementary Stability and Bifurcation Theory*, Springer, New York (1990).

[96] E. A. Jackson, *Perspectives of nonlinear dynamics I, II*, Cambridge University Press, Cambridge (1989 et 1990).

[97] B. Z. Jenkins et J. H. Bartlett, *Celest. Mech.* **5**, 407 (1972).

[98] M. H. Jensen, P. Bak et T. Bohr, *Phys. Rev.* **30A**, 1970 (1984).

[99] D. W. Jordan et P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford (1987).

[100] J. L. Kaplan et J. A. Yorke, *Lecture Notes in Mathematics* **730**, 204 (1979).

[101] J. L. Kaplan, J. Mallet-Paret et J. A. Yorke, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **4**, 261 (1984).

[102] B. Krauskopf, *Experiment. Math.* **3**, 107 (1994).

[103] Y. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, New York (1995).

[104] P. S. Landa, *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1996).

[105] H. A. Lauwerier, *Physica* **21**D, 146 (1986).

[106] A. M. Leontovitch, *Russian Mathematical Surveys* **18**, 13 (1963).

[107] T. Li et J. A. Yorke, *Ann. Math. Monthly* **82**, 985 (1975).

[108] A. J. Lichtenberg et M. A. Liebermann, *Regular and Stochastic motion*, Springer, Berlin (1983).

[109] J. Llibre et C. Simo, *Math. Ann.* **248**, 153 (1980).

[110] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).

[111] B. P. Luce, *Physica* **84**D, 553 (1995).

[112] E. R. E. Maeder, *The Mathematica Journal* **5**, 28 (1995).

[113] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco (1982).

[114] P. Manneville, *Dissipative structures and weak turbulence*, Academic Press, New York (1990).

[115] P. Manneville, *Systèmes dynamiques et chaos*, École Polytechnique, Palaiseau (1999).

[116] J. E. Marsden et M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer, Berlin (1976).

[117] P. R. Massopust, *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets*, Academic Press, New York (1994).

[118] T. Matsumoto, L. O. Chua et M. Komuro, *Physica* **24**D, 97 (1987).

[119] R. McGehee, *Indiana Univ. J. Math.* **30**, 713 (1981).

[120] R. McGehee, *Inventiones math.* **27**, 191 (1987).

[121] J. Milnor, *Experiment. Math.* **1**, 5 (1992).

[122] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems*, Princeton University Press, Princeton (1973).

[123] L. D. Mullins et J. H. Bartlett, *Celest. Mech.* **7**, 421 (1973).

[124] G. Nicolis, *Introduction to nonlinear Science,* Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[125] H. E. Nusse et J. A. Yorke, *Dynamics: Numerical Explorations,* Springer, New Yorke (1994).

[126] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[127] J. Pade, A. Rauh et G. Tsarouhas, *Physica* **29**D, 236 (1987).

[128] T. S. Parker et L. O. Chua, *Pratical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*, Springer, Berlin (1989).

[129] W. Payet, *Quadrature* **15**, 5 (1993).

[130] G. Peano, *Math. Ann.*, **36**, 157 (1890).

[131] H. O. Peitgen et P. H. Richter, *The beauty of Fractals*, Springer, Berlin (1986).

[132] H. O. Peitgen, H. Jurgens et D. Saupe, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer, Berlin (1992).

[133] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, Berlin (1991).

[134] F. Pham, *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*, Dunod, Paris (1999).

[135] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Paris (1899).

[136] H. Pollard, *Celestial mechanics*, The Mathematical Association of America, New York (1976).

[137] Y. Pomeau et P. Manneville, *Commun. Math. Phys.* **74**, 189 (1980).

[138] S. N. Rasband, *Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, J. Wiley, New York (1990).

[139] L. E. Reichl, *The transition to Chaos: in conservative classical systems,* Springer, Berlin (1971).

[140] T. Robin, *Mathématiques, physique et Turbo-Pascal*, Ellipses, Paris (1989).

[141] D. Ruelle et F. Takens, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167 (1971).

[142] D. Ruelle, *Commun. Math. Phys.* **82**, 137 (1981).

[143] D. Ruelle, *Chaotic evolution and strange attractors,* Cambridge University Press, Cambridge (1989).

[144] A. N. Sarkovskii, *Ukr. Mat. Z.* **16**, 61 (1964).

[145] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos: an introduction,* VCH, Weinheim (1989).

[146] G. Sérane, *Astronomie & Ordinateur,* Dunod, Paris (1987).

[147] R. Seydel, *From Equilibrium to Chaos,* Elsevier, New York (1988).

[148] C. L. Siegel et J. K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics,* Springer, Berlin (1971).

[149] L. P. Silnikov, *Dokl. Sov. Math.*, **6**, 163 (1965).

[150] K. Sitnikov, *Dokl. Akad. Nauk.* **133**, 303 (1981).

[151] C. Sparrow, *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, Springer, Berlin (1982).

[152] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos,* Addison-Wesley, Reading (1994).

[153] V. Szebehely, *Theory of Orbits,* Academic Press, New York (1967).

[154] V. Szebehely et C. F. Peters, *Astron. J.* **72**, 876 et 1187 (1967).

[155] F. Takens, Publ. Math. IHES, **43**, 47 (1974).

[156] R. Thom, *Stabilité structurelle et Morphogénèse,* InterEditions, Paris (1977).

[157] J. M. T. Thompson et H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, J. Wiley, New York (1986).

[158] M. Toda, *Nonlinear Waves and Solitons,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1983).

[159] J. J. Tyson, *The Belousov-Zhabotinskii Reaction,* Springer, Berlin (1976).

[160] Y. Ueda, dans *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*, ed. par P. J. Holmes, SIAM, Philadelphia, p. 311 (1980).

[161] T. Wickham-Jones, *Mathematica Graphics,* Springer, New York (1994).

[162] S. Wiggins, *Global Bifurcations and Chaos,* Springer, Berlin (1988).

[163] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos,* Springer, Berlin (1990).

[164] A. Wintner, *The analytical foundations of celestial mechanics,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1941).

[165] R. W. Wittenberg et P. Holmes, *Physica* **100**D, 1 (1997).

[166] K. Wodnar, dans *Predictability, Stability and Chaos in N-Body Dynamical Systems*, ed. par A. E. Roy, Plenum Press, 457 (1991).

[167] A. Wolf, dans *Chaos*, Ed. par A. V. Holden, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1986).

[168] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney et J. A. Vastano, *Physica* **16**D, 285 (1985).

[169] Z. Xia, *J. Diff. Eq.*, **96**, 170 (1992).

[170] Z. Xia, *J. Dynam. Diff. Eq.*, **5**, 219 (1993).

[171] J. Zizi, *Mathematica*, Springer, Berlin (1997).

Index

Accrochage, 158
Angle externe, 173, 183, 184
Anosov, 204, 375
Apériodique, 147, 218
Applications itérées, 126
Archipel, 226, 230, 378, 379
Arenstorf, 309, 310
Arnold, 155, 160, 234, 367
Atterrissage, 173, 184
Attracteur, 18, 127, 240
Attracteur étrange, 22, 127

Barnsley, 241, 246
Bassin d'attraction, 19
Belousov-Zhabotinski, 93
Bendixson (Critère), 16, 366
Bernoulli, 259, 331, 336
Bifurcation, 71, 72
  de doublage, 142, 158
  de Hopf, 84, 98, 122
  fourche, 81
  nœud-col, 76, 158
  transcritique, 79
Birkhoff, 311, 318
Bogdanov-Takens, 122, 370
Boulanger (Application), 250, 255
Bruxellateur, 14, 102
Bus-orbits, 309

Cantor, 170, 181, 237, 298
Catastrophe, 73, 111
Centre, 9
Champ de vecteurs, 2
Chaos, 27, 270
Chirikov (Application), 130, 134, 232
Chua, 70, 358, 360
Code IFS, 240, 246
Codimension, 72, 104
Conjugaison, 142, 174, 182, 259
Contopoulos, 234
Contraction (Facteur de), 240
Coordonnées
  sidérales, 307, 349
  synodiques, 307, 349
Corang, 111
Crochet
  de Lagrange, 30
  de Lie, 47
  de Poisson, 33
Cubique (Polynôme), 174
Cycle, 131, 134, 164
Cycle limite, 5, 12, 19, 85, 353

Déploiement universel, 72, 105, 107
Dérivée Schwarzienne, 152
Diagramme de bifurcation, 133, 162
Dimension
  de capacité, 235
  de Hausdorff, 165, 248
Divergence (Théorème de la), 23
Douady, 166, 170, 173, 185
Dragon (Courbe), 244
Duffing, 16, 22, 44, 59, 208, 223, 265
Dynamique symbolique, 149, 258

Eckhaus (Instabilité d'), 124, 374
Elliptique (Point fixe), 9, 126, 324
Endomorphisme du cercle, 155, 397
Ensemble
  de bifurcation, 72
  fractal, 235
  invariant, 258
Equipotentielles (Lignes), 183
Escalier du diable, 164

Farey, 161, 189, 190
Fatou, 148, 165
Feigenbaum, 149, 230
Fer à cheval, 256, 298, 342, 379
Flot, 4, 23, 28, 333
Fonction universelle $g(x)$, 152

Fonctions itérées, 240
Forme normale, 46, 105, 138
Fourier, 214, 216, 228
Foyer, 9
Fronce, 111, 113

Générique (Equation), 72
Ginzburg-Landau, 123, 300
Graphe critique, 183
Guckenheimer-Holmes, 107

Hamiltonien (Système), 28, 59, 226, 262
Hassard-Kazarinoff-Wan, 88
Hausdorff, 165, 248
Henon, 2, 129, 136, 323
Henon-Heiles, 34, 204, 225
Hetérocline
  orbite, 58, 126
  point, 126
Hilbert (Courbe de), 242
Hill, 334
Homocline
  orbite, 58, 126, 335
  point, 126, 259
Hubbard, 173, 184
Hyperbolique (Point fixe), 9, 126, 324

IFS, 240, 249
Indifférent, 127, 164, 172
Instable (Point fixe), 7
Intégrable (Hamiltonien), 33, 59
Intermittence, 147, 270
Isocèle (Problème), 350

Jacobi (Constante de), 303, 308
Jacobien, 8
Jenson, 160
Julia, 165, 166, 175

KAM, 226
Kaplan-Yorke, 62, 255
Kepler, 29, 32, 348
Koch (von), 297
Kolmogorov, 235

Lagrange (Points de), 312
Langues d'Arnold, 160
Lauwerier, 299
Lax, 358
Léau-Fatou (Fleur de), 172, 174
Levi-Civita, 304, 317
Li-Yorke, 147
Liénard, 122
Limites α et ω, 5, 37
Lindstedt-Poincaré, 207
Liouville, 23, 34, 173, 321
Logistique (Application), 141
Lorenz, 20, 25, 61, 98, 270
Lotka-Volterra, 67, 351
Lyapunov
  exposants de, 249, 254
  fonction de, 17, 67
  nombre de, 87, 97, 99

MacMillan, 330
Mandelbrot, 148, 171, 176
Matrice
  jacobienne, 8, 31, 128
  symplectique, 31
McGehee, 333, 336
Melnikov, 262, 265, 300
Milnor (Nombre de), 111
Misiurewicz, 170, 184
MLC (Conjecture), 171
Multiplicateur, 128, 134, 164

Nœud, 9
Neimark-Sacker, 138
Newton, 383
Non-errants (Points), 258
Non-hyperbolique (Point fixe), 9

Ombilic
  elliptique, 111, 115
  hyperbolique, 111
  parabolique, 111
Ondelettes, 246
Orbite, 3, 13, 126
  périodique, 131, 321
  quasipériodique, 34, 325
Oregonator, 93
Oscillateur harmonique, 29

Papillon, 111
Parabolique (Point fixe), 172
Peano (Courbe de), 241
Pendule, 6, 9, 24, 217, 267

Petits dénominateurs, 228
Pli, 111, 113
Poincaré (Section), 219, 227, 262, 321, 325, 331
Poincaré-Bendixson, 13
Poincaré-Birkhoff, 229, 230
Poincaré-Dulac, 47
Point
  critique, 6, 149, 165, 167
  d'équilibre, 6
  de libration, 312
  fixe, 6, 7, 17, 84, 131
  stationnaire, 6
Pomeau-Manneville, 147, 270
Prépériodique, 165, 170, 181
Puits, 9, 109
Pythagoréen (Problème), 304

Quadratique (Application), 141
Quasi-périodique, 34, 218, 325
Queue d'aronde, 111, 115

Rayon externe, 173, 183
Régularisation, 316
Répulsif, 127, 164
Résonance, 56, 310, 389
Restreint (Problème), 306
Rossler, 104, 270
Rotation
  angle de, 325
  nombre de, 155, 227
Routh (Algorithme de), 361
Runge-Kutta, 70, 216, 342

Sarkovski (Théorème de), 147
Schleicher (Algorithme de), 184
Selle (Point), 9, 126
Séparatrices, 11, 12, 130
Série temporelle, 133, 271, 274
Siegel (Disque de), 172
Sierpinski (Triangle de), 239
Silnikov, 268
Singularité, 111
Sitnikov, 329
Smale-Birkhoff, 260
Soliton, 69
Source, 9, 109
Sous-critique, 87, 99, 365
Spectre de puissance, 214, 216
Sphère
  de Poincaré, 68, 355
  de Riemann, 205
Stabilité structurelle, 72
Stable (Point fixe), 7
Standard (Application), 155, 232
Sundman, 302
Super-cycle, 149
Super-stable, 128, 134, 158
Sur-critique, 87, 365, 374
Système
  autonome, 2
  conservatif, 23, 129
  dissipatif, 23, 129, 207
  dynamique, 2
  linéarisé, 8
  non-autonome, 2

Tente (Application), 297
Thom, 110, 111
Toda (Treillis de), 357
Tore, 34, 35, 228
Trajectoire, 3, 24
Transformation canonique, 30
Triple collision, 302

Ueda (Attracteur d'), 224

Vaisseau spatial, 304, 309, 320
Valeurs propres, 9, 10, 84, 105
Van der Pol, 15, 55, 210, 221
Variété
  centrale, 36, 39, 42, 126
  d'énergie, 234
  instable, 36, 126
  stable, 36, 126
  symplectique, 31
Variables d'action, 33
Vecteur hamiltonien, 31
Vecteurs propres, 10, 84, 105

Weierstrass, 228, 299
Wodnar (Transformation de), 334

Xia (Transformation de), 339

Yoccoz (Puzzle d'), 184, 187

Dans la même collection

CHIMIE

- *Thermodynamique. Éléments fondamentaux de l'énergétique et de la cinétique chimique,* R. Gaboriaud, 352 pages.
- *Traité de chimie organique,* É. Brown, 480 pages.

ÉLECTRONIQUE

- *Introduction à l'électronique. Cours et exercices corrigés,* J.-J. Rousseau, 256 pages.

INFORMATIQUE

- *Méthodologie et algorithmes en Pascal. Cours et exercices corrigés,* R. Legrand, 256 pages.

MATHÉMATIQUES

- *Notions et techniques de base – DEUG MASS, MIAS, SM – semestre d'orientation. Cours et exercices corrigés,* M. Jambon, 128 pages.
- *Algèbre linéaire. Rappels de cours, exercices corrigés,* P. Jeannin et H. Joulak, 240 pages.
- *Topologie et analyse fonctionnelle. Cours de licence avec 240 exercices et problèmes corrigés,* Y. Sonntag, 512 pages.
- *Transformations de Fourier généralisées – Séries et transformations de Fourier et de Walsh, leurs extensions – Transformations discrètes et rapides. Cours et problèmes résolus,* G. Demengel, 288 pages.
- *Probabilités et statistiques. Cours, exercices et problèmes résolus,* J. Istas, 176 pages.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

- *Théorie et analyse du signal. Cours et initiation pratique via MATLAB et SCILAB,* A. Yger, 272 pages.

MÉCANIQUE

- *Mécanique du solide. Problèmes résolus posés au concours,* A. Colin, 240 pages.
- *Géométrie et applications. Introduction à la géométrie différentielle,* P. Aimé, 304 pages.
- *Résistance des matériaux. Élasticité, plasticité, éléments finis. Cours et exercices,* C. Wielgosz, 320 pages.

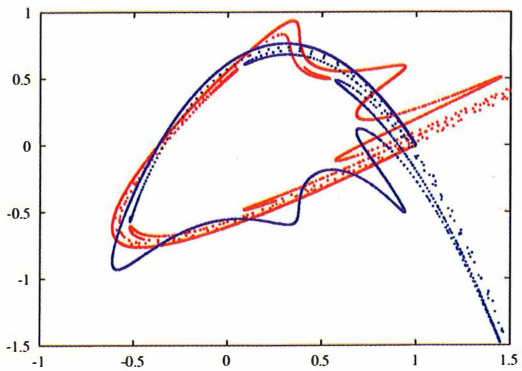
PHYSIQUE

- *Transferts thermiques. Résumés de cours, problèmes corrigés,* B. Chéron, 320 pages.
- *Probabilités et statistiques à l'usage des physiciens,* B. Escoubès, 176 pages.
- *Optique non-linéaire. Cours et problèmes résolus,* F. Sanchez, 256 pages.
- *Initiation progressive au calcul tensoriel. Cours et exercices corrigés,* C. Jeanperrin, 160 pages.
- *Utilisation du calcul tensoriel dans les géométries riemanniennes,* C. Jeanperrin, 240 pages.
- *Physique générale. Problèmes commentés et résolus posés au concours,* A. Colin, 448 pages.
- *Introduction à la mécanique théorique des fluides,* P.-A. Bois, 432 pages.
- *Relativité restreinte et électromagnétisme,* M. Lambert, 336 pages.

Achevé d'imprimer en juin 2000 dans les ateliers de Normandie Roto Impression s.a., 61250 Lonrai
N° d'impression : 001300. Dépôt légal : juin 2000

Ce livre porte sur les systèmes dynamiques non-linéaires et le chaos. Écrit pour les étudiants en Maîtrise/DEA, il se suffit à lui-même. Parmi les nombreux sujets abordés : variétés centrales et formes normales, bifurcations locales et catastrophes, bifurcation homocline et méthode de Melnikov, constantes de Feigenbaum, puzzles d'Yoccoz, théorie KAM, problème des trois corps (y compris le problème de Sitnikov)…

Les différentes notions sont illustrées par de nombreux programmes écrits en Turbo-Pascal, Fortran et Mathematica. Située à la fin du livre, la bibliographie est constituée de traités fondamentaux et d'articles récents.



L'application d'Arrowsmith-Place présentant une structure de fer-à-cheval de Smale au voisinage du point fixe hyperbolique (1,0).
[figure réalisée par le programme Pascal 4.11
sur un PC compatible IBM]

9 782729 801090

UNIVERSITÉS